

Equazione di Eulero - Lagrange per funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b [\varphi(\dot{u}(x)) + \psi(u(x))] dx$$

+ condizioni al bordo di vario tipo, ad esempio

→ $u(a) = A, u(b) = B$

→ nessuna condizione

→ solo $u(a) = A$ oppure solo $u(b) = B$

→ $u(a) = u(b)$

→ cose più creative ...

Eq. di Eulero: si parte da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}$

perturbazione che rispetta le condizioni al bordo (se u verifica, allora $u+tv$ verifica)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_a^b [\varphi(\dot{u} + t\dot{v}) + \psi(u + tv) - \varphi(\dot{u}) - \psi(u)] dx = \\ & = \int_a^b \frac{\varphi(\dot{u} + t\dot{v}) - \varphi(\dot{u})}{t} + \frac{\psi(u + tv) - \psi(u)}{t} dx \end{aligned}$$

Supponiamo di poter passare al limite per $t \rightarrow 0$. Sono dei rapporti incrementali per cui tende a

$$\int_a^b [\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v] dx$$

Condizione necessaria affinché $u(x)$ sia p.to di max/min per $F(u)$ è che

$$\int_a^b [\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v] dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

Integrando per parti mi libero di $\ddot{u}$:

$$[\varphi'(\ddot{u})v]_a^b - \int_a^b [\varphi'(\ddot{u})]' v \, dx + \int_a^b \varphi'(\ddot{u}) v \, dx = 0$$

Se mi limito a considerare perturbazioni $v(x)$ con $v(a) = v(b) = 0$ ottengo

$$\int_a^b (-[\varphi'(\ddot{u})]' + \varphi'(\ddot{u})) \cdot v \, dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile e nulla al bordo}$$

Lemma DBR $\Rightarrow -[\varphi'(\ddot{u})]' + \varphi'(\ddot{u}) = 0$, cioè

$$[\varphi'(\ddot{u})]' = \varphi'(\ddot{u}) \quad \text{cioè}$$

$$\varphi''(\ddot{u})\ddot{u} = \varphi'(\ddot{u}) \quad \forall x \in [a, b] \quad \begin{array}{l} \text{Eq. di Eulero-Lagr.} \\ \text{in forma diff.} \end{array}$$

Si tratta di eq. diff. di ordine 2, quindi servono 2 cond. al bordo.

Ora si prendono strade diverse a seconda delle cond. al bordo date.

$\rightarrow u(a) = A, u(b) = B$. Ne ho già 2, quindi OK
 $\leadsto$ problema di DIRICHLET

$\rightarrow$ Nessuna cond. all'inizio. Le $v(x)$ ammissibili non hanno vincoli al bordo. Dopo il passaggio per parti avevo

$$\varphi'(\ddot{u}(b))v(b) - \varphi'(\ddot{u}(a))v(a) + \underbrace{\int_a^b (-[\varphi'(\ddot{u})]' + \varphi'(\ddot{u})) v \, dx}_{=0} = 0$$

$= 0$ perché u risolve l'eq. diff.

quindi deve essere 0 anche l'altro termine per ogni v ammissibile

Se scelgo $v(b) = 1$ e $v(a) = 0$ ottengo

Se scelgo $v(b) = 0$ e $v(a) = 1$ ottengo

$$\begin{array}{l} \varphi'(\ddot{u}(b)) = 0 \\ \varphi'(\ddot{u}(a)) = 0 \end{array}$$

condizioni al
bordo di
NEUMANN

→ Se all'inizio avevo $u(a) = A$, dopo il passaggio per parti ho

$$\varphi'(u(b))v(b) - \varphi'(u(a))v(a) = 0$$

" perché sono costretto ad usare perturbazioni v con $v(a) = 0$

quindi ritrovo $\varphi'(u(b))v(b) = 0 \quad \forall v$ ammissibile
e basta prendere una $v(x)$ con $v(b) = 1$ per avere $\varphi'(u(b)) = 0$.
Quindi avrei il problema misto con
 $u(a) = A$ e $\varphi'(u(b)) = 0$

→ Se all'inizio avevo $u(a) = u(b)$ mi ritrovo

$$\varphi'(u(b))v(b) - \varphi'(u(a))v(a) = 0 \quad \forall v \text{ con } \underline{v(a) = v(b)} = \lambda$$

condizioni di ammissib.

$$\lambda [\varphi'(u(b)) - \varphi'(u(a))] = 0 \quad \text{potendo scegliere } \lambda \neq 0 \text{ ritrovo}$$

$$u(a) = u(b)$$

$$\varphi'(u(b)) = \varphi'(u(a)) \rightsquigarrow \text{se } \varphi' \text{ fosse invertiva diventa } u(b) = u(a)$$

(condizioni al bordo PERIODICHE)

— o — o —

Caso particolare : $\psi \equiv 0$ (il funzionale dipende solo da u)
L'equazione di Eulero diventa:

$$\varphi''(u) \ddot{u} = 0$$

Supponiamo che $\varphi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (vuol dire che φ è convessa strettamente). Allora diventa $\ddot{u} = 0$, quindi è risolta da tutte e sole le rette.

Domanda: la retta che soddisfa le condizioni al bordo è un punto di minimo?

Risposta: nel caso di φ convessa sì.

Lo dimostro con la disuguaglianza. Sia u la retta buona, e sia w un'altra qualunque funzione. Allora $w = u + v$
↑
perturbazione

$$F(w) = F(u+v) = \int_a^b \varphi(u+v) dx$$

Per una funzione qualunque si ha per Taylor-Lagrange

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)b + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) b^2$$
↑ sta tra a e $a+b$

Se φ è convessa, allora di sicuro $\frac{1}{2} \varphi''(\xi) b^2 \geq 0$, quindi

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$$

Usandola con $a = u(x)$ e $b = v(x)$ ottengo

$$F(w) \geq \int_a^b [\varphi(u) + \varphi'(u)v] dx = F(u) + \underbrace{\int_a^b \varphi'(u)v dx}_{\substack{= 0 \text{ perché è l'eq.} \\ \text{di Eulero nella} \\ \text{forma iniziale}}}$$

$= F(u)$

Questo mostra che u è un p.to di minimo.

È unico? Come potrei avere $F(w) = F(u)$, ma se $\varphi''(x) > 0$ sempre, non posso avere uguaglianza dove ho usato Taylor-Lagrange

Conclusioni: ① Se $\varphi''(x) \geq 0$ sempre, la retta buona è p.to di min.
② Se $\varphi''(x) > 0$ sempre, la retta buona è l'unico p.to di minimo.

Analogamente: se $\varphi''(x) \geq 0$ e $\psi''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
con lo stesso ragionamento dimostro che

① La soluzione buona dell'eq. di Eulero è un pto di minimo

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_a^b [\varphi(\dot{u} + \dot{v}) + \psi(u + v)] dx \\ &\geq \int_a^b [\underbrace{\varphi(u)} + \varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \underbrace{\psi(u)} + \psi'(u) v] dx \\ &= F(u) + \int_a^b [\underbrace{\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v}] dx \\ &\quad \text{" perché è Eulero nella prima forma} \end{aligned}$$

② Se $\varphi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, oppure $\psi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
allora la sol. buona di Eulero è l'unico pto di minimo.
In particolare la soluzione buona di Eulero è UNICA.
— o — o —

Più in generale, se il funzionale è del tipo

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$$

per un'opportuna $\varphi(x, u, \dot{u})$. L'eq. di Eulero diventa

$$[\varphi_{\dot{u}}(x, u, \dot{u})]' = \varphi_u(x, u, \dot{u})$$

che volendolo si espande come

$$\varphi_{\dot{u},x} + \varphi_{\dot{u}u} \dot{u} + \varphi_{\dot{u}\dot{u}} \ddot{u} = \varphi_u$$

— o — o —