

Esempio 1 $F(u) = \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2 dx$

$$X = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, u(2) = 5\}$$

Prendo $v \in C^1([0,2]) : v(0) = v(2) = 0$. *Dirizioni di spostamento*

Se $u \in X$, allora $u + tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{F(u+tv) - F(u)\} &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 [\dot{u} + t\dot{v}]^2 dx - \int_0^2 \dot{u}^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 \{ \cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 - \cancel{\dot{u}^2} \} dx \right\} \\ &= 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx + t \int_0^2 \dot{v}^2 dx \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx$$

Se un pto di minimo del funzionale $F(u)$ esiste, allora questo punto di minimo è una funzione $u(x)$ tale che

$$\int_0^2 \underset{\text{deriv.}}{\dot{u}(x)} \underset{\text{integrare}}{\dot{v}(x)} dx = 0 \quad \text{per ogni } v(x) \text{ come sopra}$$

Integrando per parti ottengo

$$\boxed{[\dot{u}(x)v(x)]_{x=0}^{x=2}} - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx$$

(sto assumendo $u \in C^2$
anche se non potrei)

Questo fa 0 perché
 $v(0) = v(2) = 0$

Quindi se u è un pto di min. per $F(u)$, allora deve valere

$$\int_0^2 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \text{ come prima}$$

LEMMA FONDAMENTALE (DU BOIS - REYMOND)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

per ogni $v \in C^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$.

Allora

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Vale lo stesso se impongo $v \in C^\infty([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$,
e anche se impongo annullamenti in altri pti a mia scelta.

Dato per buono il lemma, se u è un pto di min, allora

$\ddot{u}(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$ Equazione di EULERO-LAGRANGE

Quindi $u(x)$ è la retta che passa per i 2 pti al bordo dati:

$$u(x) = 3 + x.$$

— o — o — INIZIO DIM. RIGOROSA

Voglio ora dimostrare che $F(w) \geq F(u)$ per ogni altra $w \in X$.

Questa w la posso scrivere come

$$w = u + \underbrace{(w - u)}_{v \in C^1 \text{ e } v(0) = v(2) = 0}$$

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \int_0^2 [\dot{u} + \dot{v}]^2 dx = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} + \underbrace{2 \int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx}_0 + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq F(u) \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx = \underbrace{[\dot{u} v]_0^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{grazie a } v}} - \underbrace{\int_0^2 \ddot{u} v dx}_0 \quad \text{grazie a } u.$$

Ho così dimostrato che $F(u+v) \geq F(u)$ per ogni v con uguaglianza se e solo se $v(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, quindi la retta è l'unico p.to di minimo.

— o — o — FINE DIM. RIGOROSA

Esempio 2 $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) dx$

$$X = \{u \in C^1([0, 2]) : u(0) = 3\}$$

Scelgo perturbazioni $v \in C^1([0, 2])$ tali che $v(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{F(u+tv) - F(u)\} &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 [(\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 - \dot{u}^2 - u^2] dx \right\} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^2 [\cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + \cancel{u^2} + 2tuv + t^2v^2 - \cancel{\dot{u}^2} - \cancel{u^2}] dx \\ &= 2 \int_0^2 [\dot{u}\dot{v} + uv] dx + t \int_0^2 [\dot{v}^2 + v^2] dx \end{aligned}$$

Quando $t \rightarrow 0$ ottengo

$$2 \int_0^2 (\dot{u}\dot{v} + uv) dx = 0$$

Cerco le u per cui l'integrale $= 0$ per ogni $v \in C^1$ con $v(0) = 0$.

Voglio eliminare $\dot{v}$, quindi integro il primo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx &= [\dot{u}(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx \\ &= \dot{u}(2)v(2) - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx \end{aligned}$$

(in 0 se u e v perché $v(0) = 0$)

Quindi la condizione è diventata:

$$u(2)v(2) + \int_0^2 (-u'' + u)v \, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ come sopra}$$

PASSO 1 Mi limito alle $v \in C^1([0,2])$ t.c. $v(0) = v(2) = 0$.
Per questo deve succedere che

$$\int_0^2 (-u'' + u)v \, dx = 0$$

Lemma DBR $\Rightarrow -u''(x) + u(x) = 0$ per ogni $x \in [0,2]$
cioè $u'' = u$

PASSO 2 Ora so già che se u è p.to di minimo, allora
 $-u'' + u = 0$.

Allora la condizione integrale di sopra diventa

$$u(2)v(2) = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ come sempre}$$

Poiché $v(2)$ fa quello che gli pare, per forza $u(2) = 0$.

Conseguenza: l'eventuale p.to di minimo $u(x)$ di $F(u)$ in X deve verificare

$$\begin{cases} u'' = u \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{le soluzioni dipendono da 2 parametri}$$

Dimostrazione rigrosa (esercizio)

- ① Risolvo l'eq. diff. e trovo esplicitamente $u(x)$
- ② Scrivo ogni $w \in X$ come $u+v$, con $v \in C^1$ con $v(0)=0$, e dimostro che $F(w) = F(u+v) \geq F(u)$ con $=$ se e solo se...

Morale

→ la condizione nec. affinché u sia pto di max / min
è un' eq. diff. con dati al bordo

→ i dati al bordo possono essere di 2 tipi

$u(a)$ assegnato o $u(b)$ assegnato → DIRICHLET

$\dot{u}(a)$ assegnato o $\dot{u}(b)$ assegnato → NEUMANN

Idea: D all'inizio $\Rightarrow$ D nell' eq. di Eulero
nulla all'inizio $\Rightarrow$ N nell' eq. di Eulero

Domandine a cui pensare

$$F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 dx \quad u(0) = 3 \quad \dot{u}(2) = 5$$

$$F(u) = \int_0^2 \ddot{u}^2 dx \quad u(0) = 3 \quad \dot{u}(2) = 5$$

Determinare:

- se esiste min

- se sì, chi sono i pti di min

- se no, chi è l'inf.