

CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Problemi di max / min

$$\min_{\text{inf}} \{ f(x) : x \in X \} \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
insieme (spazio di dim. infinita)

Due approcci:

→ METODO DIRETTO

→ METODO INDIRETTO

Esempio $\min \{ \underbrace{x^2 + 2y^2 - 2x + 4y}_{f(x,y)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Metodo indiretto

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

Condizione necessaria

Se il minimo esiste, allora è assunto in $(1, -1)$ Fatto la sorte: $x = 1 + u$, $y = -1 + v$ e calcolo

$$\begin{aligned} f(1+u, -1+v) &= 1 + \cancel{2u} + u^2 + \cancel{2} - \cancel{4v} + 2v^2 - \cancel{2} - \cancel{2u} - \cancel{4} + \cancel{4v} \\ &= -3 + u^2 + 2v^2 \\ &\geq -3 \quad (\text{vale il segno di } = \text{ se e solo se } u=v=0) \\ &= f(1, -1) \end{aligned}$$

Conclusione: il minimo vale -3 e l'unico pto di min. è $(1, -1)$.

Metodo indiretto: → condizione necessaria (e trovo i candidati)
→ disuguaglianza per finire.

Metodo diretto : $\rightarrow$ dimostrare l'esistenza con W. o varianti

$\rightarrow$ passare alle condizioni necessarie che a quel p.to danno sicuramente i p.ti buoni (candidati p.ti di max. / min.)

Nell'esempio: $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

W. generalizzato $\Rightarrow$ esistenza
e poi si procede come sopra.

— o — o —

Metodo indiretto $\leadsto$ EQUAZIONE DI EULERO

Consideriamo problemi del tipo

$$\min \underbrace{\left\{ \int_a^b \varphi(x, u(x), u'(x)) dx \right\}}_{F(u)} : \left. \begin{array}{l} u \in \text{spazio di funzioni} \\ \text{definite su } [a,b] \\ \text{a valori reali} \end{array} \right\}$$

Esempio 1

$$F_1(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 dx$$

Esempio 2

$$F_2(u) = \int_{-1}^1 \left\{ [u'(x)]^4 + (u(x) - x^2)^3 \right\} dx$$

$$\varphi(x, u, u') = u'^4 + (u - x^2)^3$$

L'insieme X in cui varia u può essere diverso da problema a problema

$$\min \{ F_1(u) : u \in C^1([0,2], \mathbb{R}) \} \quad \left(\begin{array}{l} \text{problema banale: min} = 0 \\ \text{e i p.ti di min. sono le} \\ \text{funzioni costanti} \end{array} \right)$$

$$\min \{ F_1(u) : \underbrace{u \in C^1([0,2], \mathbb{R}), u(0)=3, u(2)=5}_{\text{Definiscono l'insieme } X} \}$$

Fatto generale

Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale.

Sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in X$ un pto di minimo per $F(x)$.

Sia $v \in X$.

Considero

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \text{numero reale}}} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$$



Questo limite, se esiste, si dice DIFFERENZIALE SECONDO GATEAUX del funzionale F nel pto x_0 (è la derivata direzionale)

Se x_0 è un pto di min. o un pto di max, il limite se esiste deve venire 0, qualunque sia $v \in X$.

Achtung!

- ① Può accadere che x_0 sia pto di min, ma il limite non esiste per alcuni o per tutti i v .
- ② Può accadere che il lim = 0 per ogni $v \in X$, ma x_0 non è pto di max./min.

Condizione necessaria (ma non suff.) affinché x_0 sia pto di min/max è che il diff. secondo Gateaux in x_0 sia nullo per tutti i v per cui esiste.

Cosa succede se X non è uno spazio vettoriale?

Posso sperare che esistano delle direzioni v , non necessariamente in X , tali che $x_0 + tv \in X$ almeno per valori di t vicini a $t=0$.

Ancora più in generale, posso considerare una qualunque

curva $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$,

prendere la funzione $t \rightarrow F(\gamma(t))$ e calcolarne

la derivata per $t=0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(x_0)}{t}$$



Per ogni curva, se x_0 è un pto di max/min per F , il limite se esiste deve fare 0.

↑ Generalizzazione della derivata direzionale (corrisponde a $\gamma(t) = x_0 + tv$)

Vantaggio: non devo fare somme in X (però devo fare curve...)

Se il problema è $\min \{F_1(u) : u \in \underline{C^1([0,2])}\}$
posso considerare $\times$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_1(u+tv) - F_1(u)}{t}$$

per ogni $v \in C^1([0,2])$
 $u \in X \quad v \in X$

Se il problema è $\min \{F_1(u) : u \in \underline{C^1([0,2]), u(0)=3, u(2)=5}\}$
posso considerare $\times$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_1(u+tv) - F_1(u)}{t}$$

$u \in X \quad v \notin X$

per ogni $v \in C^1([0,2])$ tale che
 $v(0) = v(2) = 0$

Ora $v \notin X$ ma
 $u+tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Se il problema è $\min \left\{ \int_0^2 (u'^2 + u^2) dx : u \in \underline{C^1([0,2]), u(0)=3} \right\}$
 $\times$

Faccio come sopra con $v \in C^1([0,2])$ con $v(0)=0$

Più in generale si possono considerare funzionali integrali

$$F(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u, u', u'', \dots, u^{(m)}) dx$$

o ancora con $F(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u, Du, \dots) dx$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.