

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Def. La funzione f si dice continua (per successioni) se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ in X si ha che

$$f(x_n) \rightarrow f(x_\infty).$$

$\uparrow$ limite di numeri in $\mathbb{R}$
 $\nwarrow$ limite in X rispetto alla dist. d

Def. La funzione f si dice continua se $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X$
 $\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

Fatto vero (Voleudo è un esercizio)

f continua per successioni $\Leftrightarrow f$ continua (ε/δ)

Def. La funzione f si dice semicontinua inferiormente se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ (limite in X risp. a d) si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty). \quad (\text{al limite può solo crollare})$$

Semicontinua superiormente: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x_\infty).$

Teorema di Weierstrass (Versione $\liminf$). Sia (X, d) uno spazio metrico COMPATTO e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione semicont. inf. Allora esiste

$$\min \{ f(x) : x \in X \}$$

Dim. Esattamente la stessa dell'analisi 1.

Di sicuro esiste

$$L := \inf \{ f(x) : x \in X \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Allora esiste una successione $\{x_n\}$ in X tale che

$$f(x_n) \rightarrow L \quad (\text{successione minimizzante})$$

Poiché X è compatto (per successioni), allora esiste $x_\infty \in X$ ed esiste n_k t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \text{ in } X.$$

Dico che $f(x_\infty) = L$. Infatti

$$L \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = L$$

perché L è l'inf
 f è s.c.i. e $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
perché tutta la succ. $f(x_n)$ tende ad L , quindi pure le sottosuccessioni tendono ad L .

Di conseguenza $L = f(x_\infty)$, quindi L è minimo.

— o — o —

Varianti di W. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f è s.c.i.

(ii) esiste un sottolivello non vuoto compatto, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\{x \in X : f(x) \leq M\}$$

sia $\neq \emptyset$ e compatto,

Allora esiste $\min \{ f(x) : x \in X \}$,

Dim. "La lotta per il minimo si gioca nel sottolivello".

Sia Y il sottolivello. Per W vero esiste

$$\min \{ f(x) : x \in Y \} = m$$

Dico che m è minimo in generale, cioè per $x \in X$. Basta distinguere i casi $x \in Y$ e $x \in X \setminus Y$.

Def. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è coerciva se tutti i suoi sottolivelli non vuoti sono compatti.

Teorema Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è s.c.i. e coerciva, allora esiste il minimo.

Dim. Basta trovare un sottolivello $\neq \emptyset$: quello è compatto perché f è coerciva, quindi uso la variante precedente.

Prendo $x_0 \in X$ a caso e considero il sottolivello con $M = f(x_0)$ o $M = f(x_0) + 1$. Questo è non vuoto.

Caso speciale Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Supponiamo che f sia continua.

Allora f è coerciva.

$$\downarrow$$
$$\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } |x| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dim. Ogni sottolivello è per forza limitato (contenuto nella palla di raggio R corrispondente) ed è chiuso perché f è continua. Chiuso + limitato $\Rightarrow$ compatto.

Heine - Cantor Sia X sp. metrico compatto.

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f è unif. continua.

Dim. Supponiamo che non sia unif. continua. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad d(x, y) \leq \delta \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Essendoci " $\forall \delta > 0$ " la gioco con $\delta = \frac{1}{n_k}$ e trovo x_{n_k} e y_{n_k} con.
Per compattezza $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ e $y_{n_k} \rightarrow y_\infty$

Poiché $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$ si avrà $x_\infty = y_\infty$

Ma allora passando al limite in

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad \text{ho un assurdo}$$

$$f(x_\infty) - f(y_\infty)$$

uguali.

— o — o —

Def. 2 Fisso $\varepsilon > 0$ voglio trovare un δ universale.
Intanto per ogni $x \in X$ ho $\delta(x)$ t.c.,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta(x)}(x)$$

↓
sono un ricoprimento di X , dal
quale posso estrarne un s. ricoprimento
finito

Ma non ho finito !!! Anche prendendo il δ più piccolo ho
garantito che

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

solo se x è il centro di una palla del sottoricoprimento finito.

Devo prendere come δ il raggio magro del ricoprimento.

Se due p.ti qualsunque distano meno del raggio magro, allora
stanno in una stessa pallettina del ricoprimento, quindi i
corrispondenti valori distano meno di ε .

— o — o —