

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Dalla metrica seguono:

- una nozione di convergenza: $x_n \rightarrow x_\infty$ se e solo se $d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0$
- una definizione di sottoinsieme aperto: $U \subseteq X$ è aperto se e solo se $\forall x \in U \exists r > 0$ b.c. $B_r(x) \subseteq U$



Def. Uno spazio metrico si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ ha almeno una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge in X .

Detto diversamente: $\forall$ succ. $\{x_n\} \subseteq X$, esiste $n_k \rightarrow +\infty$ succ. di interi, ed esiste $x_\infty \in X$ b.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Def. Uno spazio metrico si dice COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di X fatto da aperti esiste un sottoricoprimento finito, cioè esiste $J \subseteq I$ b.c. $\bigcup_{j \in J} U_j = X$

Esempio $\{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti parametrizzata da un insieme di indici I , che può essere finito o infinito.

$X = \mathbb{R}$ $U_n = (n, n+1)$ non ricopre tutto $\mathbb{R}$

$X = \mathbb{R}$ $U_x = (x, x+1)$ $x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ non è compatto per ricoprimenti in quanto $U_n = (n, n+2)$ con $n \in \mathbb{Z}$ lo ricoprono, ma non ci sono sottoricoprimenti finiti

$[0, 1]$ non è compatto per ricoprimenti: ad esempio

$U_n = (\frac{1}{n}, 2)$ sono aperti, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq [0, 1]$, ma non esiste un sottoricoprimento finito.

Def. X si dice limitato se $\exists x_0 \in X \exists R > 0$ t.c.
 $X \subseteq B_R(x_0)$

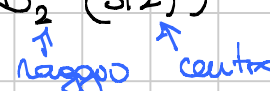
Def. X è totalmente limitato se $\forall r > 0$ esiste un insieme finito $x_1, \dots, x_k$ di d. di X t.c.
$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_r(x_i)$$

(per ogni raggio r , posso fissare un numero finito di distributori tali che ogni pto $x \in X$ ha almeno un distributore a distanza $< r$)

Esercizio 1 Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato se e solo se è totalmente limitato.

Esercizio 2 Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato, ma non viceversa.

Esempio Pseudo $X = \mathbb{N}$ e $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

È ovvio che è limitato (tutto è contenuto in $B_2(3, 2)$)


ma non è contenuto in un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$.

Fatto vero $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ chiuso + limitato.

Teorema (compattezza in spazi metrici)

Per uno sp. metrico (X, d) i seguenti 3 fatti sono equivalenti:

- (i) X è compatto per ricoprimenti,
- (ii) X è compatto per successioni,
- (iii) X è completo + totalmente limitato.

Oss. Se $Y \subseteq X$ e X è completo, allora Y è completo se e solo se è chiuso (facile esercizio).

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2) Hp: X è compatto per ricoprimenti

Th: X è compatto per successioni.

Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione. Voglio trovare una s.succ. conv.

Oss. Supponiamo che $\exists x_\infty \in X$ t.c. $\forall r > 0$ esistono infiniti termini della successione che stanno in $B_r(x_\infty)$. Allora esiste n_k t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

[Dim.: prendo n_1 t.c. $x_{n_1} \in B_{\frac{1}{2}}(x_\infty)$
prendo n_2 t.c. $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x_\infty)$
:
per induzione prendo n_{k+1} t.c.
 $n_{k+1} > n_k$ e $x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x_\infty)$]

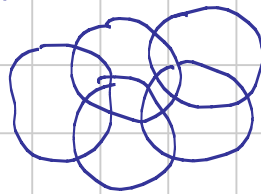
Se trovo un p.to $x_\infty \in X$ con questa proprietà, allora ok.

Supponiamo per assurdo di non trovarlo. Allora $\forall x \in X$

$\exists r(x) > 0$ t.c. $B_{r(x)}(x)$ contiene solo un numero finito di termini della successione.

Ora $\bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$ è un ricoprimento aperto di X , il quale quindi ammette un sottoricoprimento finito.

Ma allora abbiamo un numero finito di palle ciascuna delle quali contiene un numero finito di el. della successione, e questo è assurdo.



(2) $\Rightarrow$ (3)

(2) $\Rightarrow$ Completo

Hp: X compatto per successioni

Th: X completo

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Per hp ha una s.succ. convergente, ma allora essendo di Cauchy converge tutta.

(2) $\Rightarrow$ Totalmente limitato

Hp: X compatto per successioni

Tn: X totalmente limitato

Fisso $r > 0$ e inizio a disporre i "distributori". Per induzione

- scelgo x_1 a caso
- scelgo x_2 fuori da $B_r(x_1)$
- scelgo x_3 fuori da $B_r(x_1) \cup B_r(x_2)$
- $\vdots$
- scelgo x_{k+1} fuori da $B_r(x_1) \cup \dots \cup B_r(x_k)$

Se strada facendo ho ricoperto tutto X , allora ok, altrimenti ho ottenuto una succ. x_n t.c. $d(x_i, x_j) \geq r \quad \forall i \neq j$.

Questa non può avere sottosucc. convergenti (una s.succ. conv. dovrebbe essere di Cauchy ma non esistono s.succ. di Cauchy).

(3) $\Rightarrow$ (2) Hp: X totalmente limitato + completo
 X compatto per successioni

Prendo una successione $\{x_n\}$ e cerco una s.succ. convergente. Essendo completo, basta che trovi una s.succ. di Cauchy.

Per induzione

- Fisso raggio $r=1 \Rightarrow$ esiste un insieme finito di palle di raggio 1 che ricopre X
 $\Rightarrow$ esiste un insieme infinito di indici $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ t.c. x_i con $i \in N_1$ stanno in una stessa palla di raggio 1.
- $\vdots$
- Fisso raggio $r = \frac{1}{k+1} \Rightarrow$ esiste un insieme infinito di indici $N_{k+1} \subseteq N_k$ t.c. x_i con $i \in N_{k+1}$ stanno in una stessa palla di raggio $\frac{1}{k+1}$.

Prendiamo una succ. m_k crescente con $m_k \in N_k$.

La corrispondente s.succ. $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy.

Infatti da un certo p.to in poi gli indici stanno in un certo N_m , quindi da lì in poi i termini della successione distano meno di $\frac{2}{m}$.

Resta (2) $\Rightarrow$ (1)

Mp X è compatto per successioni

Th X è compatto per ricoprimenti

Prendo $(U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X .

Lemma (raggio magico) $\exists r > 0$ t.c. $\forall x \in X$ la palla $B_r(x)$ è contenuta in un qualche U_i

Dim. Supponiamo che non esista un raggio magico, quindi ogni raggio $r = \frac{1}{n}$ non va bene, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un p.to x_n t.c. $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ non sta in nessun U_i . Ora gli $\{x_n\}$ sono una successione, quindi per ipotesi hanno una s.succ. x_{n_k} convergente.

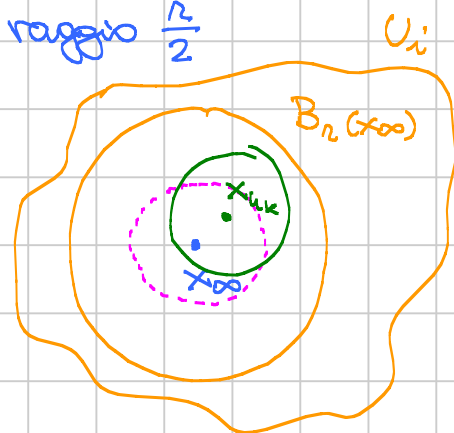
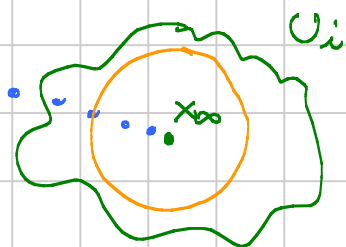
Ora $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$, x_∞ sta in un certo U_i , quindi $\exists r > 0$

t.c. $B_r(x_\infty) \subseteq U_i$.

Ma allora appena $d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{r}{2}$, gli x_{n_k} hanno garantita la palla di raggio $\frac{r}{2}$ perché

$$B_{\frac{r}{2}}(x_{n_k}) \subseteq B(x_\infty, r) \subseteq U_i$$

Quindi era assurdo che x_{n_k} non avesse garantito il raggio $\frac{1}{n_k}$ non appena $\frac{1}{n_k} < \frac{r}{2}$.



Mostro che ogni ricoprimento $\{U_i\}$ ha un sottoricoprimento finito.

Prendo $r > 0$ il raggio magico e ricopro X con un numero finito di palle di raggio r (posso perché (2) $\Rightarrow$ (3)).

Per definizione di raggio magico ciascuna di queste palle è contenuta in qualche U_i .

Poiché queste palle, che sono un numero finito, ricoprono X , allora anche i corrispondenti U_i ricoprono X .

Più formalmente

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_r(x_j)$$

$$B_r(x_j) \subseteq U_{i_j}$$

$$\Rightarrow X \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{i_j} \quad \text{che sono un numero finito.}$$

— o — o —