

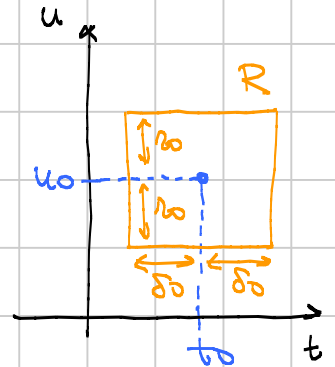
Teorema di sola esistenza per eq. diff. $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

Se f è continua, allora esiste almeno una soluzione.

Detto meglio: $f: [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$.

La soluzione, non nec. unica, la cerco del tipo

$$u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$



per un certo $\delta \leq \delta_0$.

STRATEGIA Problemi approssimanti: invece di risolvere $u' = f(t, u)$ risolvo $u' = f_n(t, u)$ con delle funzioni f_n che approssimano f e verificano il te. di esistenza e unicità. Ottengo così delle soluzioni $u_n(t)$ e spero che abbiano un limite per $n \rightarrow +\infty$ e che questo limite sia soluzione con f .

Applichiamo la strategia in un caso semplice $u' = f(u)$, cioè nel caso autonomo.

Passo 1 Sia $f: [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una successione di funzioni $f_n: [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$ che sono C^1 e $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Faccio 2 cose

- ① estendo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = f(u_0 + r_0)$ per $x \geq u_0 + r_0$ e $f(x) = f(u_0 - r_0)$ per $x \leq u_0 - r_0$

② pongo $f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds = n[F(x+\frac{1}{n}) - F(x)]$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{media di } f(x) \text{ tra } x \text{ e } x+\frac{1}{n}}$
 $\uparrow$
primitiva

È chiaro che f_n è C^1 e la sua derivata è

$$f_n'(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$$

Perché $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente?

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - f(x)| &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds - f(x) \right| \\
 &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x) ds \right| \\
 &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} (f(s) - f(x)) ds \right| \\
 &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(s) - f(x)| ds
 \end{aligned}$$

Ora f è continua nell'intervallo $[u_0 - \tau_0, u_0 + \tau_0]$, quindi è unif. continua, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x-s| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| \leq \varepsilon$. Basta quindi prendere n t.c. $\frac{1}{n} \leq \delta$ e avere che

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - f(x)| &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(s) - f(x)| ds \\
 &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon ds = \varepsilon
 \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{0} \quad \text{---} \quad \text{0} \quad \text{---}}$

Considero ora le soluzioni del problema $\begin{cases} u_n' = f_n(u_n) \\ u_n(t_0) = u_0 \end{cases}$

cioè risolvo con f_n invece di f .

Voglio dimostrare che la successione $\{u_n(t)\}$ verifica le ipotesi di Ascoli - Arzelà. Se ci riesco, ho quasi finito.

Supponiamo $u_n: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ e
 $u_n \rightarrow u_\infty$ (a meno di sottosucc.).

Dico che u_∞ risolve con f , cioè $u_\infty' = f(t, u_\infty)$

Oss. Il fatto che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. non dice nulla sul fatto che $u_n' \rightarrow u_\infty'$.

Basta pensare a

$$u_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

Per far questo si ricorre alla formulazione con gli integrali:

$$\begin{array}{ccccccc} u_n(t) & = & u_0 & + & \int_{t_0}^t f_n(u_n(s)) ds & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \text{se fosse vero che} & \\ u_\infty(t) & = & u_0 & + & \int_{t_0}^t f(u_\infty(s)) ds & & f_n(u_n(s)) \rightarrow f(u_\infty(s)) \end{array}$$

e questo è come dire che u_∞ risolve con f .

Restano da dimostrare 3 cose:

- ① u_n sono definite su un intervallo comune $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$
- ② u_n verificano A-A
- ③ $f_n(u_n(s)) \rightarrow f(u_\infty(s))$ uniformemente, il che permette di passare al limite nell'integrale.

Dim. di ② Supponendo di aver fatto ①, devo verificare le ipotesi di A-A.

(i) banale perché $u_n(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$, quindi ogni sottosuccessione ha a sua volta una s.succ. conv.

(ii) segue dal fatto che le u_n sono equi-lip. con costante $\leq$ del max di f_n in $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$, e questo max è

$\leq$ del max di f nello stesso intervallo (perché f_u è una media di f .)

Dim. di ③ Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $u_n \rightarrow u_0$ uniformi, anzi essendo equi-lip., allora $f_n(u_n(t)) \rightarrow f(u_0(t))$ uniformemente.

$$|f(u_0(t)) - f_n(u_n(t))| \leq \underbrace{|f(u_0(t)) - f(u_n(t))|}_{\text{piccolo per } u \text{ grande in quanto } u_n \rightarrow u_0 \text{ unif. (qui uso l'unif. continuità di } f\text{)}} + \underbrace{|f(u_n(t)) - f_n(u_n(t))|}_{\text{piccolo per } n \text{ grande in quanto } f_n \rightarrow f \text{ unif.}}$$

Dim. di ④ Indichiamo con R il rettangolo

$$[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$

devo dimostrare che esiste un δ garantito per cui u_n sta nel rettangolo per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Basta prendere

$$\delta = \min \left\{ \delta_0, \frac{r_0}{M} \right\}$$

dove $M := \max \{ |f(x)| : x \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \}$

Lagrange

Infatti

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_0| &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} |t - t_0| \cdot |u'_n(s)| \\ &= |t - t_0| \cdot \underbrace{|f_n(u_n(s))|}_{\leq M} \\ &\leq M \cdot |t - t_0| \\ &= M \delta_0 \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Quindi in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ la soluzione non scappa dal rettangolo, e per quando ci resta esiste

— 0 — 0 —