

Teo. esistenza per eq. diff.

- ① Completezza via teo. di punto fisso
- ② Compattezza via Ascoli-Arzelà

Def. Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni.

Si dice che $\{f_n(x)\}$ è **EQUICONTINUA** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b] \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

δ dipende da ε ed
x, ma non da n.

Si dice che $\{f_n(x)\}$ è **EQUI UNIFORMEMENTE CONTINUA** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

δ dipende da ε , ma
non dipende da x
né da n.

Esempio Supponiamo che tutte le $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siano
lipschitziane con la stessa costante L. (**EQUILIPSCHITZ**)
Allora sono una famiglia equi-unif. continua.

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L |x - y|$$

Ma allora per ogni ε basta porre $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e la definizione
ne è verificata.

Stesso discorso se sono equi-hölder, con la stessa
costante e lo stesso esponente $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq H \cdot |x - y|^\alpha.$$

TEOREMA (ASCOLI-ARZELÀ)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) compattità a t fissato: per ogni $t \in [a, b]$ la successione $\{f_n(t)\}$, che è una succ. di numeri, è relativamente compatta, cioè ogni sua sottosuccessione ammette a sua volta una sottosuccessione convergente (nel caso di $\mathbb{R}$ questo è equivalente a dire che $\{f_n(t)\}$ è limitata)
- (ii) equi-uniforme continuità delle $\{f_n(t)\}$.

Allora la successione $\{f_n\}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente, cioè esiste $f_\infty: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ed esiste una succ. crescente $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ t.c.

$$f_{n_k} \rightarrow f_\infty \text{ uniformemente.}$$

Oss. L'enunciato è in realtà un "se e solo se", cioè se $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente, allora le f_n sono equi-uniformemente continue e verificano la (i).

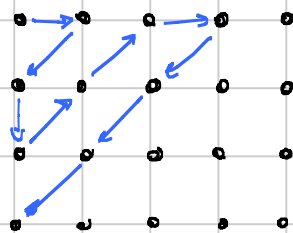
— o — o —

Preliminari

- ① Insiemi numerabili: un insieme è numerabile se è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Esempio: $\mathbb{N}$ è numerabile, $\mathbb{N}^2$ è numerabile,

$\mathbb{Q}$ è numerabile



- ② Insiemi densi numerabili: dato un intervallo $[a, b]$, esiste un sottoinsieme $\{t_k\}$ (volendo si può pensare come una succ. a valori in $[a, b]$) che è DENSO cioè

$$\forall t \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |t - t_k| < \varepsilon.$$

(basta prendere $[a, b] \cap \mathbb{Q}$)

③ Procedimento diagonale Consideriamo una successione di sottoinsiemi

$$N \supseteq N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

Supponiamo che tutti contengano infiniti elementi.

Allora esiste una successione $\{n_k\} \subseteq N$ strett. crescente tale che $n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(Dim.: n_0 lo prendo a caso in N_0

n_1 lo prendo a caso in N_1 purché $> n_0$

n_2 " " " " " N_2 purché $> n_1$

e così via.

Ad ogni passo posso perché tutti gli N_i hanno infiniti elementi).

In generale ho ottenuto pure che $n_i \in N_j$ per ogni $j \leq i$.

Dim. di Ascoli - Arzelà

Passo 1 Scelgo un sottoinsieme denso $\{t_i\} \subseteq [a, b]$.

Voglio trovare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ delle funzioni date tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t_i) \text{ esiste per ogni } i \in \mathbb{N}$$

(lo vorremmo per ogni $t \in [a, b]$, ma per ora ci accontentiamo dei t_i).

Per ipotesi (i) so che c'è una sottosucc. Ok per t_1 , una Ok per t_2 , e così via... però ne vorrei una che vada bene per tutti!

Procedimento induttivo:

- scelgo una s.succ. che va bene per t_1 e indico con N_1 gli indici corrispondenti
- scelgo una s.succ. della prec. che va bene per t_2 e indico con N_2 gli indici con... chiaramente $N_2 \subseteq N_1$.

Procedendo in questo modo ottengo insiemei $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \dots$

Sia ora u_k la successione di interi data dal procedimento diagonale. Allora dico che funziona, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{u_k}(t_i) \text{ esiste per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Infatti, $f_{u_k}(t_i)$ è una sottosuccessione di quella che andava bene per t_i , in quanto $u_k \in \mathbb{N}_i$ definitivamente.

Passo 2 La sottosuccessione $\{f_{u_k}\}$ che va bene per i t_i va bene in realtà per ogni $t \in [a, b]$, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{u_k}(t) \text{ esiste.}$$

A tal fine basta mostrare che $\{f_{u_k}(t)\}$ è di Cauchy. Se lo dimostro convergerà perché ha una s.succ. convergente.

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $\delta > 0$ corrispondente nell'ipotesi (ii) a $\frac{\varepsilon}{3}$.

Poi prendo i t.c. $|t - t_i| < \delta$. Ora

$$\begin{aligned} |f_{u_k}(t) - f_{u_{k'}}(t)| &\leq \underbrace{|f_{u_k}(t) - f_{u_k}(t_i)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{u_k}(t_i) - f_{u_{k'}}(t_i)|}_{\substack{\text{se } k \text{ e } k' \text{ sono grandi,} \\ \text{allora è } \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ in quanto} \\ \{f_{u_k}(t_i)\} \text{ converge, quindi} \\ \text{è di Cauchy.}}} + \underbrace{|f_{u_{k'}}(t_i) - f_{u_{k'}}(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon$$

da cui la tesi.

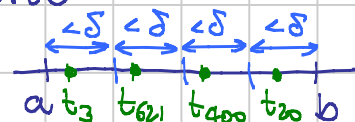
Passo 3 Dedito $f_\infty(t)$ il limite della sottosuccessione $\{f_{u_k}(t)\}$, si ha che f_∞ è uniformemente continua.

$$\begin{array}{ccc} |f_{u_k}(t) - f_{u_k}(s)| \leq \varepsilon & \text{se} & |t - s| \leq \delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ |f_\infty(t) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon & \text{se} & |t - s| \leq \delta. \end{array}$$

Passo 4 Dimostro che $f_{n_k}(t) \rightarrow f_{\infty}(t)$ uniformemente (già ho dimostrato che converge puntualmente), cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che per k suff. grande

$$|f_{\infty}(t) - f_{n_k}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

Scelgo il $\delta > 0$ che corrisponde ad $\frac{\varepsilon}{3}$ nella equi-unif. continuità. Ricopro $[a, b]$ con intervalli di ampiezza $< \delta$ contenenti qualcuno dei t_i . Ne basta un numero FINITO



$$|f_{\infty}(t) - f_{n_k}(t)| \leq |f_{\infty}(t) - f_{\infty}(t_i)| + |f_{\infty}(t_i) - f_{n_k}(t_i)| + |f_{n_k}(t_i) - f_{n_k}(t)|$$

Dato t , scelgo il t_i corrispondenti all'intervallo in cui sta t ,

- il 1° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ per l'equi-unif. continuità di f_{∞}
- il 2° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ per l'unif. continuità di f_{∞}
- il 3° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ se k è abbastanza grande perché $f_{n_k}(t_i) \rightarrow f_{\infty}(t_i)$ ed i t_i che sto considerando sono un numero finito.

Morale: il k grande che sistema i t_i FINITI sistema in realtà tutti i $t \in [a, b]$.

— o — o —