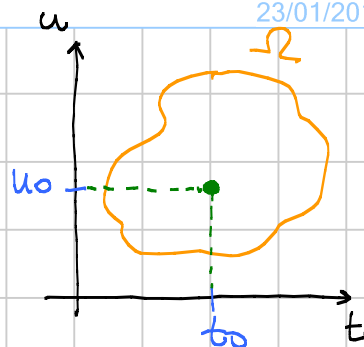


Teorema esistenza ed unicità per eq. diff.

Consideriamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{PbC})$$



dove $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e ovviamente $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Supponiamo che f sia continua e in aggiunta che esista L t.c.

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall u_1 \text{ e } u_2 \text{ per cui si finisce in } \Omega.$$

Allora il problema ammette soluzione unica locale.

Dim.

Passo 1 Formulazione integrale del problema di Cauchy

Una funzione u risolve (PbC) se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (\text{PbI})$$

Detto ancora meglio: u è una soluzione continua di (PbI) se e solo se u è una soluzione C^1 di (PbC).

(PbI) $\Rightarrow$ (PbC) Se u risolve (PbI), allora banalmente $u(t_0) = u_0$. Inoltre u è derivabile in quanto integrale di una funzione continua e

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

per il teo. fond. del calcolo integrale.

$(PbC) \Rightarrow (PbI)$ Ora per ipotesi u è derivabile e risolve (PbC) .
Banalmente u è continua. Inoltre

$$u(t) - u_0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cond. iniz.}}}{u(t) - u(t_0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto gen.}}}{\int_{t_0}^t u'(s) ds} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eq. diff.}}}{\int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds}$$

Porto u_0 al RHS ed è fatta.

Passo 2 Riscrittura in termini di p.to fisso.

Considero la funzione F che ad ogni funzione $u(t)$ associa una nuova funzione $F(u)$ definita come

$$[F(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Allora u risolve (PbI) se e solo se $u = F(u)$, cioè se e solo se u è un p.to fisso di F .

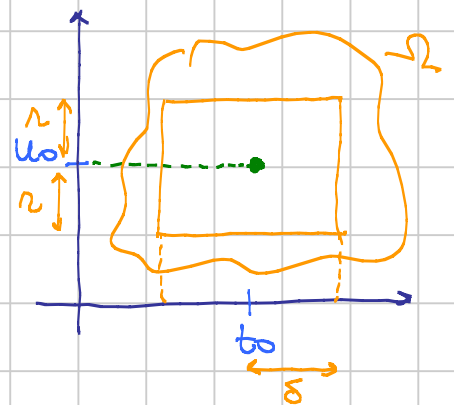
Passo 3 Cerco uno spazio metrico X tale che $F: X \rightarrow X$ sia una contrazione e X sia completo. Se ci riesco, ho vinto.

Considero il rettangolo

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - \eta, u_0 + \eta]$$

con δ e η abbastanza piccoli in modo che stia in Ω . Pongo

$$X_{\delta, \eta} := C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], [u_0 - \eta, u_0 + \eta])$$



Dico che se δ è abbastanza piccolo, allora $F: X_{\delta, \eta} \rightarrow X_{\delta, \eta}$ è una contrazione.

Passo 3.1 $X_{\delta, r}$ è completo per ogni $\delta > 0$ e ogni $r > 0$, rispetto alla solita distanza (si fa esattamente come alla versione precedente).

Passo 3.2 Se $u \in X_{\delta, r}$, allora $F(u) \in X_{\delta, r}$.

Devo dimostrare che $F(u)$ è continua e $|[F(u)](t) - u_0| \leq r$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$\begin{aligned}
 |[F(u)](t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t M ds = \max \{ |f(t, u)| \text{ sul rettangolo che esiste per Weierstrass} \} \cdot (t - t_0) \\
 &\leq M |t_0 - t| \\
 &\leq M \delta
 \end{aligned}$$

↑
prop. integrali
(OK, se $t > t_0$, altrimenti devo invertire gli estremi)

È quindi ovvio che questo è più piccolo di r se $\delta \leq \frac{r}{M}$.

Passo 3.3 Se δ è abbastanza piccolo, allora F è una contrazione rispetto alla metrica di $X_{\delta, r}$.

Prendo u_1 e u_2 in $X_{\delta, r}$ e calcolo $\text{dist}(F(u_1), F(u_2))$

$$\begin{aligned}
 |[F(u_1)](t) - [F(u_2)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_2(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L |u_1(s) - u_2(s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot \text{dist}(u_1, u_2) ds
 \end{aligned}$$

↑
gli u_0 se ne vanno

solito
"baramento"

Ho dimostrato che

$$|[F(u_1)](t) - [F(u_2)](t)| \leq L \cdot \text{dist}(u_1, u_2) |t - t_0|$$

$$\leq L \cdot \delta \cdot \text{dist}(u_1, u_2) \leftarrow \text{non dipende più da } t.$$

Ora faccio il max del LHS al variare di $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Ottengo

$$\text{dist}(F(u_1), F(u_2)) \leq L \cdot \delta \cdot \text{dist}(u_1, u_2)$$

Se prendo δ abbastanza piccolo in modo tale che $L\delta < 1$, allora è una contrazione !!!

Riavvolgendo il nastro: $F: X_{\delta, r} \rightarrow X_{\delta, r}$ è una contrazione per di aver posto

$$\delta M \leq r$$

mandare $X_{\delta, r}$ in sé.

$$\delta L < 1$$

contrazione

Oss. Devo scegliere M all'inizio come max di f in un rettangolo $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r, u_0 + r]$.

A quel p.to lo stesso M va bene per rettangoli con $\delta \leq \delta_0$.

— o — o —

Oss. Ho dimostrato l'esistenza di una soluzione, ma non l'unicità. L'unicità del p.to fisso garantisce che c'è un'unica sol. in $X_{\delta, r}$ purché δ sia abbastanza piccolo. Potrebbero esserci soluzioni in altri spazi?



Superamento dell'obiezione: considero un δ_1 più piccolo che definisce un rettangolo che le contiene entrambe.

Ora F la posso considerare come

$$F: X_{\delta_1, \tau} \longrightarrow X_{\delta_1, \tau}$$

perché δ_1 verifica ancora le 2 disuguaglianze. Ma allora il p.to fisso è unico in $X_{\delta_1, \tau}$, il che costringe le 2 soluzioni a coincidere almeno in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$.

Quindi almeno in questo sottointervallo è unica.

— o — o —

Oss. Sia Y uno spazio metrico completo.

Sia A un insieme qualunque.

Sia

$X :=$ insieme delle funzioni limitate da A in X

Allora $\text{dist}(f, g) := \sup \{d_Y(f(a), g(a)) : a \in A\}$

definisce una distanza in X che lo rende un metrico completo.

Esercizio Dimostrare che $C_{\text{bounded}}^0((a, b); \mathbb{R})$ è un metrico completo

↑ continue e limitate

Capire se si può fare il teo. di esistenza e unicità lavorando in C_{bounded}^0 , cioè senza bisogno di restringere l'immagine a $[u_0 - \tau, u_0 + \tau]$.

— o — o —