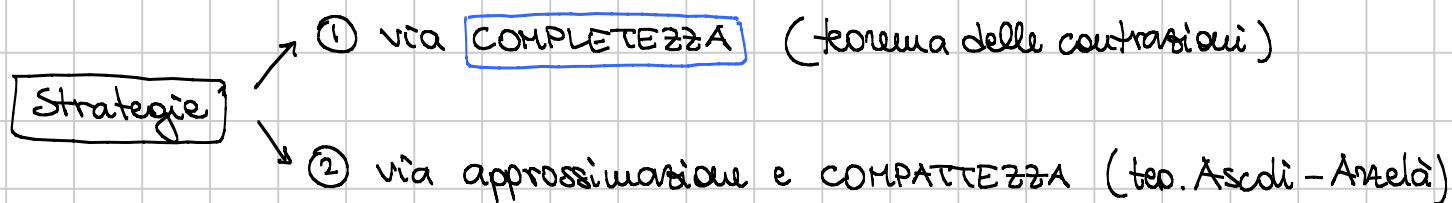


Teoremi di esistenza per equazioni differenziali

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI Sia X uno spazio metrico **COMPLETO**.

Sia $f: X \rightarrow X$ una contrazione, cioè una funzione per cui esiste una costante **$L < 1$** tale che

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq L \text{ dist}(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

(in altre parole: f è lip. con costante $L < 1$)

Allora f ammette un unico punto fisso, cioè esiste unico $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dim. **Unicità** Siano x_1 e x_2 due pti fissi. Allora

$$\begin{array}{ccc} \text{sono fissi} & & \text{contrazione} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{dist}(x_1, x_2) = \text{dist}(f(x_1), f(x_2)) \leq L \text{ dist}(x_1, x_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-L)}_{\text{pos.}} \text{dist}(x_1, x_2) \leq 0 \quad \rightarrow \text{deve essere 0, ma allora } x_1 = x_2.$$

Esistenza Prendo $x_0 \in X$ a caso e definisco per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Se sapessi che $x_n \rightarrow x_\infty$, allora x_∞ sarebbe un pto fisso poiché

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \leftarrow \text{segue facilmente dalla lip.}$$

$$x_\infty = f(x_\infty)$$

Quindi mi basta dimostrare che x_n ha limite. Poiché X è completo, mi basta dim. che x_n è di Cauchy.

$$m > n_0 \quad \text{dist}(x_n, x_m) \leq \text{dist}(x_n, x_{n+1}) + \text{dist}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \text{dist}(x_{m-1}, x_m)$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \text{dist}(x_{n+1}, x_{n+2}) &= \text{dist}(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L \text{dist}(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq L^2 \text{dist}(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq L^{m+1} \text{dist}(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra per induzione che

$$\boxed{\text{dist}(x_{k+1}, x_k) \leq L^k \text{dist}(x_1, x_0)}$$

Tornando ad inizio pagina

$$\text{dist}(x_n, x_m) \leq L^n \text{dist}(x_0, x_1) + L^{n+1} \text{dist}(x_0, x_1) + \dots + L^{m-1} \text{dist}(x_0, x_1)$$

$$= \text{dist}(x_0, x_1) \{ L^n + L^{n+1} + \dots + L^{m-1} \}$$

$$= \text{dist}(x_0, x_1) L^n \{ 1 + L + L^2 + \dots + L^{m-n} \}$$

$$\leq \boxed{\text{dist}(x_0, x_1)} L^n \boxed{\frac{1}{1-L}}$$

Fisso Fisso

← somma della serie geometrica

piccolo se n è grande

Detto altrimenti: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \text{dist}(x_n, x_m) \leq \varepsilon$
se $m \geq n \geq n_0$,

Quindi la succ. è di Cauchy.

— o — o —

x_0

x_1

x_2

x_3

x_4

Ogni distanza è $\leq$ della precedente $\cdot L$.

Esercizi

- ① Dimostrare che il teo. è falso senza completezza
- ② " " " " " " se $L = 1$
- ③ Dimostrare che il teo. è falso se impongo solo che
 $\text{dist}(f(x), f(y)) < \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in X$
— o — o —

TEOREMA

Sia $X = C^0([a, b]; \mathbb{R})$ dotato della distanza della convergenza uniforme, cioè

$$\text{dist}(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \},$$

Allora X è completo.

Dim.

Sia $\{f_n\} \subseteq X$ una succ. di Cauchy. Devo dimostrare che f_n converge ad una certa f_∞ rispetto alla distanza di X .

Passo 1

(Identificazione del limite e convergenza puntuale)

Dato un qualunque $x \in [a, b]$, ho che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \text{dist}(f_n, f_m).$$

Quindi la successione di numeri $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi ha un limite (ho usato $\mathbb{R}$ completo) che chiamo $f_\infty(x)$.

Quindi

$$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x).$$

Passo 2

Dimostro che $f_n \rightarrow f_\infty$ in X , cioè $\text{dist}(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$.

Fisso $\varepsilon > 0$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}(f_n, f_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$.

Ma allora

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \text{dist}(f_n, f_m) \leq \varepsilon$$

Passo al limite per $m \rightarrow +\infty$. Ottengo

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq n_0$$

e questo è quello che volevo.

Passo 3 Dimostro che f_∞ è una funzione continua.

Fisso $\varepsilon > 0$ e $x \in [a, b]$. Voglio dimostrare che $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta]$$

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \underbrace{|f_\infty(y) - f_n(y)|}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(y) - f_n(x)|}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_{\frac{\varepsilon}{3}}$$

È importante l'ordine in cui si fanno le cose

① fisso n in modo che il 1° ed il 3° siano più piccoli di $\frac{\varepsilon}{3}$
(posso perché $f_n \rightarrow f_\infty$ UNIFORMEMENTE: lo stesso n va bene per tutti i p.ti di $[a, b]$)

② fisso δ in maniera che il 2° sia più piccolo di $\frac{\varepsilon}{3}$
(posso perché lo devo fare per un n fisso).

— o — o —

Oss. Il teorema vale più in generale per $C^0([a, b], Y)$
purché Y sia un metrico completo
(per esercizio rifare la dimostrazione in questo contesto)

Ancora più in generale vale per $C^0(K, Y)$ dove
 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è un compatto,

↑ è stata usata per definire la
distanza, altrimenti il sup di $|f(x) - f(y)|$
potrebbe venire $+\infty$.

— o — o —