

Spazio di Banach Sia X uno spazio vettoriale

Def. Una NORMA su X è una funzione da X in $\mathbb{R}$, che per comodità si indica con $\|x\|$ (o $|x|$) con queste proprietà

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in X,$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se } \|x\| = 0$$

$$(N3) \quad \|\lambda x\| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{val. assoluto}} \cdot \|x\| \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(N4) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{triangolare})$$

Oss. (Norma vs Distanza) Se $\|x\|$ è una norma su X , allora

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \text{è una distanza su } X.$$

Esercizio Verificare le proprietà di d .

Def. Si dice che X è uno spazio di Banach se la distanza indotta dalla norma lo rende uno spazio metrico completo.

SPAZIO DI HILBERT Un prodotto scalare in uno spazio vettoriale X è una funzione $\langle x, y \rangle$ con queste proprietà

$$(PS1) \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{per ogni } x \text{ e } y \quad (\text{simmetrico})$$

$$(PS2) \quad \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \text{per ogni } \dots \quad (\text{bilineare})$$

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle \quad \text{per ogni } \dots$$

$$(PS3) \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in X$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} (\text{Definito positivo})$$

Oss. [prod. scalare vs norma] Se $\langle x, y \rangle$ è un prodotto scalare in uno spazio vett. X , allora
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

è una norma in X .

Esercizio Fare le verifiche (la triangolare richiede un bel conto)

Triangolare $\|x+y\| \stackrel{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \text{Faccio i } \square \text{ (posso...)}$$

$$\langle x+y, x+y \rangle \stackrel{?}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

Espando il LHS (left-hand side) con la bilinearità:

$$\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + \cancel{2\langle x, y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + \cancel{2\|x\| \cdot \|y\|}$$

e quello che resta è Cauchy-Schwarz!!

Def. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare che lo rende uno spazio metrico completo.

Idea per il futuro. Completezza = succ. convergenti
= compatti
= teo. di Weierstrass.
= esistenza di max e o min.

Esempio Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $X = C^0([a, b], \mathbb{R})$

= funzioni continue su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$.

Date f e g in X , pongo

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \}$$

↑ in realtà è un max per Weierstrass



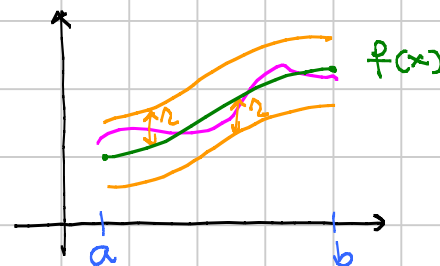
Allora $\text{dist}(f, g)$ è una distanza in X che lo rende uno spazio metrico completo, anzi addirittura un Banach.

Facile: si tratta di una distanza che proviene da una norma

$$\|f\| := \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

Meno facile: è completo.

[Oss.] Data $f \in X$, come è fatta $B_r(f)$?
Sono tutte le funzioni $g(x)$ il cui grafico sta nella striscia di ampiezza r intorno al grafico di $f(x)$.



[Oss.] Cosa vuol dire che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ in X ?
Per ogni $\varepsilon > 0$ definitivamente $f_n(x)$ casca nell' intorno di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$.

[Oss.] Se sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ per ogni $x \in [a, b]$,
NON possiamo concludere che $f_n \rightarrow f_\infty$ nel senso dello spazio X .

Esempio $[a,b] = [0,1]$ $f_n(x) = x^n$.

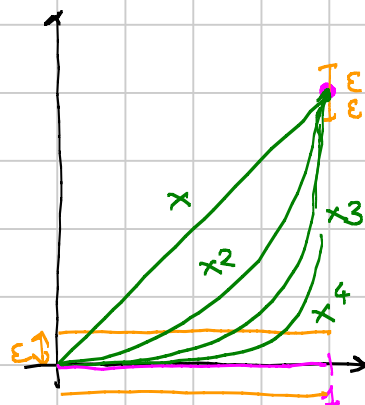
Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Si dice che $f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f_\infty(x)$ che vale 0 per $x \in [0,1)$ e vale 1 per $x = 1$,

Questa NON è convergenza nel senso della norma introdotta precedentemente.

Non è vero che il grafico casca all'interno dell' intorno di ampiezza ε definitivamente.



La convergenza nel senso della norma si chiama convergenza uniforme.

Vediamolo con gli epsilon.

Convergenza puntuale: $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in [a,b] \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Convergenza uniforme: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall x \in [a,b]$
 $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Differenza: nella convergenza puntuale n_0 (cioè il definitivamente) dipende da x , nella conv. unif. c'è un n_0 che va bene per tutti gli x .

Obs. Convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale
ma non viceversa.

Come dimostro una conv. puntuale? Faccio il limite per $n \rightarrow +\infty$, pensando x come un parametro.

Come dimostro una conv. uniforme? Uso la definizione "metrica".
Calcolo

$$\max \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in [a, b] \} \quad \leadsto \text{dist}(f_n, f_\infty)$$

Questo viene un numero dipendente da n , di cui poi vado a fare il limite per $n \rightarrow +\infty$. Se viene 0 allora ok, altrimenti NO.

— 0 — 0 —