

ANALISI 1 Funzioni di 1 variabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}$

→ problemi di max/min $\min \{ f(x) : x \in A \}$

→ problemi di evoluzione $u' = f(t, u)$ $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ANALISI 2 Funzioni di n variabili $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

↑
quello che decide è la pendenza

→ problemi di max/min $\min \{ f(x) : x \in A \}$

→ problemi di evoluzione: sistemi di eq. diff. $u' = f(t, u)$

$u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

↑
cambia poco

ANALISI 3 Funzioni di ∞ variabili $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

X contenuto a uno spazio di dimensione infinita

→ max/min $\min \{ f(x) : x \in X \}$

Esempio tipico: X è uno spazio di funzioni

$\min \left\{ \int_0^1 [u'(x)]^2 dx : u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \right\}$

$u(0) = 7$ $u(1) = 12$

continua con
derivata
continua

Nell'esempio $X =$ insieme delle funzioni $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1

tali che $u(0) = 7$ $u(1) = 12$

= spazio di dimensione infinita

$F: X \rightarrow \mathbb{R}$ $F(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$

↑
funzionale

funzioni

→ problemi di evoluzione: l'incognita è ora $u: [a, b] \rightarrow X$

Esempio classico: $u(t)$ = distribuzione di temperatura all'interno di una sbarretta al tempo t .

— o — o — o —

Problemi di max / min $\leadsto$ Calcolo delle variazioni

Problemi di evoluzione a valori in spazi di funzioni $\leadsto$ Equazioni alle derivate parziali

— o — o —

Strutture possibili nello spazio di partenza

$X \rightarrow$ insieme

$\rightarrow$ insieme con una nozione di convergenza

$\rightarrow$ spazio topologico

$\rightarrow$ spazio metrico

$\rightarrow$ spazio di Banach

$\rightarrow$ spazio di Hilbert

$\rightarrow \mathbb{R}^n$

c'è struttura algebrica

SPAZIO METRICO Sia X un insieme.

Una distanza su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ con queste proprietà:

(d1) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x \in X$ e ogni $y \in Y$,

(d2) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni ... (simmetrica)

(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ per ogni x, y, z in X

(disuguaglianza triangolare)

Def. Uno spazio metrico è un insieme X su cui è definita una distanza d .

Oss. Data una metrica, ha senso parlare di successioni convergenti. Si dice infatti che $x_n \rightarrow x_\infty$ ($x_n \in X, x_\infty \in X$) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{d(x_n, x_\infty)}_{\text{numeri reali } \geq 0} = 0$$

← limite di numeri

Oss.

Sia (X, d) uno spazio metrico

Sia (Y, δ) un' altro spazio metrico

Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.

Si dice che f è Lipschitziana con costante L se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X$$

Si dice che f è Hölderiana con esponente α e cost. H se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq H [d(x, y)]^\alpha \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Quindi Lip. e Höld sono concetti metrici.

Oss.

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice palla con centro in $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$

Q' insieme

APERTA

se $\leq$ la palla **CHIUSA**

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

↑
ball

Una volta definite le palle, si definiscono gli intorni, gli insiemi aperti, chiusi, la frontiera, e così via.

Esempio 1

X insieme qualunque

$$\text{dist}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

è banalmente una distanza

Oss.

Se X = vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e la distanza è quella classica, allora siamo (a meno di $\sqrt{2}$) nella situazione dell' esempio 1

— 0 — 0 —

DEFINIZIONE Uno spazio metrico si dice **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy a valori in X convergono.

Def. Una successione $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \text{dist}(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$$

Esempio 2 lo spazio metrico dell'esempio 1 è completo.

Dim.: Ogni successione di Cauchy è per forza definitivamente costante. Infatti uso la def. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (basta $\varepsilon < 1$). Allora $\exists n_0$ t.c.

$$\text{dist}(x_n, x_{n_0}) \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad (\text{ho posto } m = n_0)$$

$\downarrow$
ma allora deve essere $\text{dist}(x_n, x_{n_0}) = 0$, cioè $x_n = x_{n_0}$.

Esempio 3 $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ con le distanze di analisi 1 e 2 sono spazi metrici completi.

Esempio 4 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o più in generale $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{p.to}\}$ non sono spazi metrici completi (basta prendere una succ. che tende a quel p.to mancante).

Fatti importanti In uno spazio metrico:

① se una successione converge, allora è di Cauchy (ma non vicev.)

$$\text{dist}(x_n, x_m) \leq \text{dist}(x_n, x_\infty) + \text{dist}(x_m, x_\infty)$$

② se una succ. di Cauchy ha una s.succ. convergente, allora converge tutta quanta.

$$\begin{aligned} \text{da cui certo in poi } \text{dist}(x_n, x_m) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{" " " " " } \text{dist}(x_{n_k}, x_\infty) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

