

SSSUP 2014
Corso di Complementi di
Analisi Matematica II
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01 – Presentazione del corso. Spazi metrici: prime definizioni ed esempi. . .	5
Lezione 02 – Spazi di Banach e spazi di Hilbert. Rapporti tra prodotto scalare, norma, distanza. Convergenza puntuale ed uniforme di funzioni.	9
Lezione 03 – Teorema delle contrazioni in spazi metrici (teorema di punto fisso). Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo chiuso rispetto alla distanza della convergenza uniforme è completo	14
Lezione 04 – Dimostrazione mediante punto fisso del teorema di esistenza ed unicità per equazioni differenziali.	18
Lezione 05 – Teorema di Ascoli-Arzelà (con dimostrazione).	23
Lezione 06 – Dimostrazione del teorema di sola esistenza per equazioni differenziali mediante approssimazione con problemi Lipschitz.	28
Lezione 07 – Compattezza in spazi metrici: equivalenza tra compattezza per ricoprimenti, compattezza per successioni e completezza + totale limitatezza.	32
Lezione 08 – Teorema di Weierstrass e sue varianti in spazi metrici. Teorema di Heine-Cantor in spazi metrici.	38
Lezione 09 – Introduzione al calcolo delle variazioni: metodo diretto vs metodo indiretto. Condizioni necessarie per essere punto di max/min: differenziale secondo Gateaux e derivata lungo curve.	42
Lezione 10 – Equazione di Eulero-Lagrange per funzionali integrali: primi esempi. Condizioni al bordo di Dirichlet e di Neumann.	46
Lezione 11 – Equazione di Eulero-Lagrange per funzionali integrali: caso più generale. Discussione di diverse condizioni al bordo. Ruolo della convessità nel dimostrare che le soluzioni sono minimi.	51
Lezione 12 – Esempi di studio di funzionali: caso convesso vs caso non convesso (rispetto alla derivata).	56
Lezione 13 – Spazi di Hilbert. Convergenza di serie negli spazi di Hilbert. Basi Hilbertiane.	61
Lezione 14 – Enunciato dell'esistenza della base Hilbertiana. Convergenza forte e convergenza debole negli spazi di Hilbert. Compattezza debole delle palle. . .	65
Lezione 15 – Principali proprietà della convergenza debole. Semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole. Spazio L^2	70
Lezione 16 – Spazi di Sobolev: definizione W (integrazione per parti) e definizione H (approssimazione). Holderianità delle funzioni in H^1 (in dimensione 1). Primi esempi di convergenza.	74
Lezione 17 – Metodo diretto nel calcolo delle variazioni (parte prima): formulazione debole, compattezza, semicontinuità. Passaggio al limite negli integrali: convergenza dominata.	80

Lezione 18 – Metodo diretto nel calcolo delle variazioni (parte seconda): equazione di Eulero in H^1 , regolarità via bootstrap. Convergenza debole e semicontinuità di integrali.	85
Lezione 19 – Teorema spettrale in dimensione finita. Caratterizzazione variazione di autovalori/autovettori. Quoziente di Rayleigh e moltiplicatori di Lagrange. . .	89
Lezione 20 – Quoziente di Rayleigh senza moltiplicatori di Lagrange. Applicazioni compatte in spazi di Hilbert. Teorema spettrale per applicazioni compatte in spazi di Hilbert.	93
Lezione 21 – Doppia primitiva come esempio di operatore lineare, simmetrico e compatto. Discussione di varie possibili condizioni al bordo.	97
Lezione 22 – Calcolo degli autovalori e autovettori della doppia primitiva con diverse condizioni al bordo. Corrispondenti sviluppi in serie di Fourier.	102
Lezione 23 – Teoremi di convergenza puntuale e uniforme per serie di Fourier. Applicazione al calcolo di una serie numerica.	107
Lezione 24 – Serie di Fourier e spazi di Sobolev. Equazione di Eulero per un problema variazionale in più dimensioni: Laplaciano. Condizioni di Dirichlet e Neumann in più variabili.	112
Lezione 25 – Laplaciano su un rettangolo e relativa serie di Fourier. Laplaciano discreto e algoritmo jpeg.	117
Lezione 26 – Introduzione alle equazioni alle derivate parziali di evoluzione. Equazione del calore risolta mediante serie di Fourier.	121
Lezione 27 – Regolarità delle soluzioni dell'equazione del calore ottenuta mediante le serie di Fourier. Equazione del calore con dato iniziale distribuzione.	126
Lezione 28 – Delta di Dirac come esempio di distribuzione. Proprietà qualitative dell'equazione del calore: decrescita dell'energia, comportamento dell'integrale, limite all'infinito.	131
Lezione 29 – Equazione delle onde su tutta la retta: formula esplicita come somma di traveling waves. Dominio di dipendenza. Accenno al dominio di dipendenza in dimensione pari vs dispari.	135
Lezione 30 – Equazione delle onde su un intervallo risolta mediante serie di Fourier. Regolarità dei dati vs regolarità della soluzione. Identità dell'energia.	140

SSSUP 2014 - LEZIONE 01

Titolo nota

21/01/2014

ANALISI 1 Funzioni di 1 variabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}$
 → problemi di max/min $\min \{ f(x) : x \in A \}$
 → problemi di evoluzione $u' = f(t, u)$ $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ANALISI 2 Funzioni di n variabili $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
quello che decide è la potenza.
 → problemi di max/min $\min \{ f(x) : x \in A \}$
 → problemi di evoluzione: sistemi di eq. diff. $U' = f(t, U)$
 $U: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
cambia poco

ANALISI 3 Funzioni di ∞ variabili $f: X \rightarrow \mathbb{R}$
 X contenuto a uno spazio di dimensione infinita
 → max/min $\min \{ f(x) : x \in X \}$
 Esempio tipico: X è uno spazio di funzioni
 $\min \left\{ \int_0^1 [u'(x)]^2 dx : u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \right\}$
continua con derivata continua
 $u(0) = 7$ $u(1) = 12$
 Nell'esempio $X =$ insieme delle funzioni $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1
 tali che $u(0) = 7$ $u(1) = 12$
 = spazio di dimensione infinita

$$F: X \rightarrow \mathbb{R} \quad F(u) = \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$$

funzionale

→ problemi di evoluzione: l'incognita è ora $u: [a, b] \rightarrow X$
tempi
 Esempio classico: $u(t)$ = distribuzione di temperatura all'interno
 di una sbarra al tempo t .
funzioni

— o — o — o —

Problemi di max / min $\leadsto$ Calcolo delle variazioni

Problemi di evoluzione a valori in spazi di funzioni $\leadsto$ Equazioni alle derivate parziali

— o — o —

Strutture possibili nello spazio di funzioni

$X \rightarrow$ insieme

$\rightarrow$ insieme con una nozione di convergenza

$\rightarrow$ spazio topologico

$\rightarrow$ spazio metrico

$\rightarrow$ spazio di Banach

$\rightarrow$ spazio di Hilbert

$\rightarrow \mathbb{R}^n$

c'è struttura algebrica

SPAZIO METRICO Sia X un insieme.

Una distanza su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ con queste proprietà:

(d1) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x \in X$ e ogni $y \in Y$,

(d2) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $\dots$ (simmetrica)

(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ per ogni x, y, z in X
(disuguaglianza triangolare)

Def. Uno spazio metrico è un insieme X su cui è definita una distanza d .

Oss. Data una metrica, ha senso parlare di successioni convergenti. Si dice infatti che $x_n \rightarrow x_\infty$ ($x_n \in X, x_\infty \in X$) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{d(x_n, x_\infty)}_{\text{numeri reali } \geq 0} = 0$$

(limite di numeri)

Oss. Sia (X, d) uno spazio metrico
 Sia (Y, δ) un' altro spazio metrico
 Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione.
 Si dice che f è Lipschitziana con costante L se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X$$

Si dice che f è Hölderiana con esponente α e cost. H se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq H [d(x, y)]^\alpha \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Quindi Lip. e Höld sono concetti metrici.

Oss. Sia (X, d) uno spazio metrico.

Si dice palla con centro in $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$

Q' insieme

↑
APERTA

se $\leq$ ho palla **CHIUSA**

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

↑
ball

Una volta definite le palle, si definiscono gli intorni, gli insiemi aperti, chiusi, la frontiera, e così via.

Esempio 1 X insieme qualunque

$$\text{dist}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad \text{è banalmente una distanza}$$

Oss. Se $X =$ vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e la distanza è quella classica, allora siamo (a meno di $\sqrt{2}$) nella situazione dell' esempio 1.

— o — o —

DEFINIZIONE Uno spazio metrico si dice **COMPLETO** se tutte le successioni di Cauchy a valori in X convergono.

Def. Una successione $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \text{dist}(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0, \forall m \geq m_0$$

Esempio 2 lo spazio metrico dell'esempio 1 è completo.

Dim.: Ogni successione di Cauchy è per forza definitivamente costante. Infatti uso la def. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (basta $\varepsilon < 1$). Allora $\exists n_0$ t.c.

$$\text{dist}(x_n, x_{n_0}) \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad (\text{ho posto } m = n_0)$$

ma allora deve essere $\text{dist}(x_n, x_{n_0}) = 0$, cioè $x_n = x_{n_0}$.

Esempio 3 $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^n$ con le distanze di analisi 1 e 2 sono spazi metrici completi.

Esempio 4 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ o più in generale $\mathbb{R}^n \setminus \{p.to\}$ non sono spazi metrici completi (basta prendere una succ. che tende a quel p.to mancante).

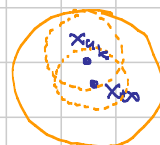
Fatti importanti In uno spazio metrico:

① se una successione converge, allora è di Cauchy (ma non vicev.)

$$\text{dist}(x_n, x_m) \leq \text{dist}(x_n, x_\infty) + \text{dist}(x_m, x_\infty)$$

② se una succ. di Cauchy ha una s.succ. convergente, allora converge tutta quanta.

$$\begin{aligned} \text{da un certo in poi} \quad \text{dist}(x_n, x_m) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{" " " " " " } \quad \text{dist}(x_{n_k}, x_\infty) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$



SSSUP 2014 - LEZIONE 02

Titolo nota

21/01/2014

Spazio di Banach Sia X uno spazio vettorialeDef. Una NORMA su X è una funzione da X in $\mathbb{R}$, che per comodità si indica con $\|x\|$ ($o |x|$) con queste proprietà

(N1) $\|x\| \geq 0$ per ogni $x \in X$,

(N2) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$

(N3) $\|\lambda x\| = \underbrace{|\lambda|}_{\text{val. assoluto}} \cdot \|x\|$ per ogni $x \in X$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

(N4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (triangolare)

Oss. (Norma vs Distanza) Se $\|x\|$ è una norma su X , allora

$$d(x, y) := \|x - y\| \text{ è una distanza su } X.$$

Esercizio Verificare le proprietà di d .Def. Si dice che X è uno spazio di Banach se la distanza indotta dalla norma lo rende uno spazio metrico completo.SPAZIO DI HILBERT Un prodotto scalare in uno spazio vettoriale X è una funzione $\langle x, y \rangle$ con queste proprietà

(PS1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ per ogni x e y (simmetrico)

(PS2) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ per ogni ... (bilineare)

$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$ per ogni...

(PS3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in X$
 $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$. } (Definito positivo)

Oss. prod. scalare vs norma Se $\langle x, y \rangle$ è un prodotto scalare in uno spazio vett. X , allora

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

è una norma in X .

Esercizio Fare le verifiche (la triangolare richiede un bel conto)

Triangolare $\|x+y\| \stackrel{?}{\leq} \|x\| + \|y\|$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \text{Faccio i } \square \text{ (posso...)}$$

$$\langle x+y, x+y \rangle \stackrel{?}{\leq} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

Espando il LHS (left-hand side) con la bilinearità:

$$\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\langle x, y \rangle \stackrel{?}{\leq} \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

e quello che resta è Cauchy-Schwarz !!

Def. Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare che lo rende uno spazio metrico completo.

Idea per il futuro . Completezza = succ. convergenti
 = compatti
 = teo. di Weierstrass.
 = esistenza di max e o min.

Esempio Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $X = C^0([a, b], \mathbb{R})$

- funzioni continue su $[a, b]$ a valori in $\mathbb{R}$.

Date f e g in X , pongo

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \}$$

↑ in realtà è un max per Weierstrass



Allora $\text{dist}(f, g)$ è una distanza in X che lo rende uno spazio metrico completo, anzi addirittura un Banach.

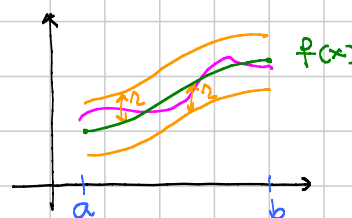
Facile: si tratta di una distanza che proviene da una norma

$$\|f\| := \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

Meno facile : è completo.

Oss. Data $f \in X$, come è fatta $B_r(f)$?

Sono tutte le funzioni $g(x)$ il cui grafico sta nella striscia di ampiezza r intorno al grafico di $f(x)$.



Oss. Cosa vuol dire che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ in X ?

Per ogni $\varepsilon > 0$ definitivamente $f_n(x)$ casca nell' intorno di ampiezza ε intorno al grafico di $f_\infty(x)$.

Oss. Se sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, NON possiamo concludere che $f_n \rightarrow f_\infty$ nel senso dello spazio X .

Esempio $[a,b] = [0,1]$ $f_n(x) = x^n$.

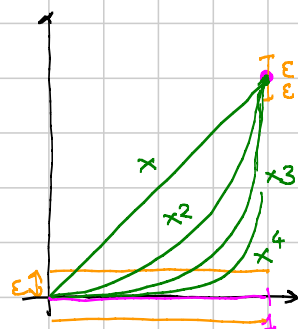
Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Si dice che $f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $f_\infty(x)$ che vale 0 per $x \in [0,1)$ e vale 1 per $x = 1$.

Questa NON è convergenza nel senso della norma introdotta precedentemente.

Non è vero che il grafico casca all'interno dell' intorno di ampiezza ε definitivamente.



La convergenza nel senso della norma si chiama convergenza uniforme.

Vediamolo con gli epsilon.

Convergenza puntuale: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.}$
 $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Convergenza uniforme: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in [a,b]$
 $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Differenza: nella convergenza puntuale n_0 (cioè il definitivamente) dipende da x , nella conv. unif. c'è un n_0 che va bene per tutti gli x .

Obs. Convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale
 ma non viceversa.

Come dimostro una conv. puntuale? Faccio il limite per $n \rightarrow +\infty$, pensando x come un parametro.

Come dimostro una conv. uniforme? Uso la definizione "metrica".
Calcolo

$$\max \{ |f_n(x) - f_\infty(x)| : x \in [a, b] \} \quad \leadsto \text{dist}(f_n, f_\infty)$$

Questo viene un numero dipendente da n , di cui poi vado a fare il limite per $n \rightarrow +\infty$. Se viene 0 allora OK, altrimenti NO.

— 0 — 0 —

SSSUP 2014 - LEZIONE 03

Titolo nota

23/01/2014

Teoremi di esistenza per equazioni differenziali

Strategie

- ① via **COMPLETEZZA** (teorema delle contrazioni)
- ② via approssimazione e **COMPATTEZZA** (teo. Ascoli-Arzelà)

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI Sia X uno spazio metrico **COMPLETO**.

Sia $f: X \rightarrow X$ una contrazione, cioè una funzione per cui esiste una costante **$L < 1$** tale che

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq L \text{ dist}(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

(in altre parole: f è lip. con costante $L < 1$)

Allora f ammette un unico punto fisso, cioè esiste unico $\bar{x} \in X$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dim. **Unicità** Siano x_1 e x_2 due pti fissi. Allora

$$\begin{array}{ccc} \text{sono fissi} & & \text{contrazione} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{dist}(x_1, x_2) & = & \text{dist}(f(x_1), f(x_2)) \leq L \text{ dist}(x_1, x_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-L)}_{\text{pos.}} \text{ dist}(x_1, x_2) \leq 0$$

→ deve essere 0, ma allora $x_1 = x_2$.

Esistenza Prendiamo $x_0 \in X$ a caso e definisco per ricorrenza

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Se sapessi che $x_n \rightarrow x_\infty$, allora x_∞ sarebbe un pto fisso poiché

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \sim \text{segue facilmente dalla lip.}$$

$$x_\infty = f(x_\infty)$$

Quindi mi basta dimostrare che x_n ha limite. Poiché X è completo, mi basta dim. che x_n è di Cauchy.

$$m > n_0 \quad \text{dist}(x_n, x_m) \leq \text{dist}(x_n, x_{n+1}) + \text{dist}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \text{dist}(x_{m-1}, x_m)$$

$$\begin{aligned} \text{Ora } \text{dist}(x_{n+1}, x_{n+2}) &= \text{dist}(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L \text{dist}(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq L^2 \text{dist}(x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq L^{m+1} \text{dist}(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra per induzione che

$$\boxed{\text{dist}(x_{k+1}, x_k) \leq L^k \text{dist}(x_1, x_0)}$$

Tornando ad inizio pagina

$$\text{dist}(x_n, x_m) \leq L^m \text{dist}(x_0, x_1) + L^{m+1} \text{dist}(x_0, x_1) + \dots + L^{m-1} \text{dist}(x_0, x_1)$$

$$= \text{dist}(x_0, x_1) \{ L^m + L^{m+1} + \dots + L^{m-1} \}$$

$$= \text{dist}(x_0, x_1) L^m \{ 1 + L + L^2 + \dots + L^{m-1} \}$$

$$\leq \boxed{\text{dist}(x_0, x_1)} L^m \boxed{\frac{1}{1-L}} \leftarrow \text{somma della serie geometrica}$$

Fisso Fisso

piccolo se m è grande

Detto altrimenti: $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}(x_n, x_m) \leq \varepsilon$
se $m \geq n \geq m_0$,

Quindi la succ. è di Cauchy.

x_0

x_1

x_2

x_3

x_4

Ogni distanza è $\leq$ della precedente $\cdot L$.

Esercizi

- ① Dimostrare che il teo. è falso senza completezza
 ② " " " " " " se $L = 1$
 ③ Dimostrare che il teo. è falso se impongo solo che
 $\text{dist}(f(x), f(y)) < \text{dist}(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in X$
 — o — o —

TEOREMA

Sia $X = C^0([a, b]; \mathbb{R})$ dotato della distanza della convergenza uniforme, cioè

$$\text{dist}(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a, b] \},$$

Allora X è completo.

Dim.

Sia $\{f_n\} \subseteq X$ una succ. di Cauchy. Devo dimostrare che f_n converge ad una certa f_∞ rispetto alla distanza di X .

Passo 1

(Identificazione del limite e convergenza puntuale)

Dato un qualunque $x \in [a, b]$, ho che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \text{dist}(f_n, f_m).$$

Quindi la successione di numeri $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, quindi ha un limite (ho usato $\mathbb{R}$ completo) che chiamo $f_\infty(x)$.
 Quindi

$$\forall x \in [a, b] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x).$$

Passo 2

Dimostro che $f_n \rightarrow f_\infty$ in X , cioè $\text{dist}(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$.

Fisso $\varepsilon > 0$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\text{dist}(f_n, f_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$.

Ma allora

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \text{dist}(f_n, f_m) \leq \varepsilon$$

Passo al limite per $m \rightarrow +\infty$. Otengo

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq n_0$$

e questo è quello che volevo.

Passo 3 Dimostro che f_∞ è una funzione continua.

Fisso $\varepsilon > 0$ e $x \in [a, b]$. Voglio dimostrare che $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta]$$

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \underbrace{|f_\infty(y) - f_n(y)|}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(y) - f_n(x)|}_{\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_{\frac{\varepsilon}{3}}$$

È importante l'ordine in cui si fanno le cose

- ① fisso n in modo che il 1° ed il 3° siano più piccoli di $\frac{\varepsilon}{3}$
(posso perché $f_n \rightarrow f_\infty$ UNIFORMEMENTE: lo stesso n va bene per tutti i p.ti di $[a, b]$)
- ② fisso δ in maniera che il 2° sia più piccolo di $\frac{\varepsilon}{3}$
(posso perché lo devo fare per un n fisso).

— o — o —

Oss. Il teorema vale più in generale per $C^0([a, b], Y)$ purché Y sia un metrico completo
(per esercizio rifare la dimostrazione in questo contesto)

Ancora più in generale vale per $C^0(K, Y)$ dove $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è un compatto.

↑ è stata usata per definire la
distanza, altrimenti il sup di $|f(x) - f(y)|$
potrebbe venire $+\infty$.

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 04

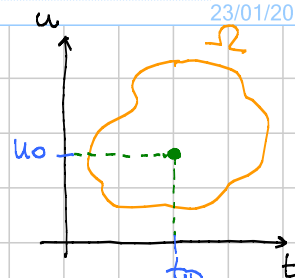
Titolo nota

23/01/2014

Teorema esistenza ed unicità per eq. diff.

Consideriamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{PbC})$$

dove $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e ovviamente $(t_0, u_0) \in \Omega$.Supponiamo che f sia continua e in aggiunta che esista L t.c.

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \quad \forall u_1 \text{ e } u_2 \text{ per cui si finisce in } \Omega$$

Allora il problema ammette soluzione unica locale.

Dim.Passo 1 Formulazione integrale del problema di CauchyUna funzione u risolve (PbC) se e solo se

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (\text{PbI})$$

Detto ancora meglio: u è una soluzione continua di (PbI)se e solo se u è una soluzione C^1 di (PbC).

(PbI) $\Rightarrow$ (PbC) Se u risolve (PbI), allora banalmente $u(t_0) = u_0$
 Inoltre u è derivabile in quanto integrale di una funzione continua e

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

per il te. fond. del calcolo integrale.

(PbC) $\Rightarrow$ (PbI) Ora per ipotesi u è derivabile e risolve (PbC).

Banalmente u è continua. Inoltre

$$u(t) - u_0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cond. iniz.}}}{u(t) - u(t_0)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto gen.}}}{\int_{t_0}^t u'(s) ds} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eq. diff.}}}{\int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds}$$

Porto u_0 al RHS ed è fatta.

Passo 2 Riscrittura in termini di p.to fisso.

Considero la funzione F che ad ogni funzione $u(t)$ associa una nuova funzione $F(u)$ definita come

$$[F(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Allora u risolve (PbI) se e solo se $u = F(u)$, cioè se e solo se u è un p.to fisso di F .

Passo 3 Cerco uno spazio metrico X tale che $F: X \rightarrow X$ sia una contrazione e X sia completo. Se ci riesco, ho vinto.

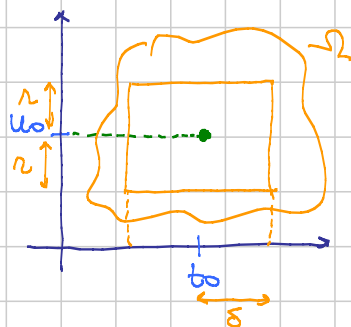
Considero il rettangolo

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - r, u_0 + r]$$

con δ e r abbastanza piccoli in modo che stia in Ω . Pongo

$$X_{\delta, r} := C^0([t_0 - \delta, t_0 + \delta], [u_0 - r, u_0 + r])$$

Dico che se δ è abbastanza piccolo, allora $F: X_{\delta, r} \rightarrow X_{\delta, r}$ è una contrazione.



Passo 3.1 $X_{\delta,n}$ è completo per ogni $\delta > 0$ e ogni $n > 0$, rispetto alla solita distanza (si fa esattamente come alla lezione precedente).

Passo 3.2 Se $u \in X_{\delta,n}$, allora $F(u) \in X_{\delta,n}$.

Devo dimostrare che $F(u)$ è continua e $|[F(u)](t) - u_0| \leq \delta$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$\begin{aligned}
 |[F(u)](t) - u_0| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t M ds = M |t - t_0| \leq M \delta
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ propr. integrali
 (OK, se $t > t_0$, altrimenti devo invertire gli estremi)
 $\nwarrow$ $= \max \{|f(t, u)| \text{ sul rettangolo che esiste per Weierstrass}\}$

È quindi ovvio che questo è più piccolo di δ se $\delta \leq \frac{\delta}{M}$.

Passo 3.3 Se δ è abbastanza piccolo, allora F è una contrazione rispetto alla metrica di $X_{\delta,n}$.

Prendo u_1 e u_2 in $X_{\delta,n}$ e calcolo $\text{dist}(F(u_1), F(u_2))$

$$\begin{aligned}
 |[F(u_1)](t) - [F(u_2)](t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, u_2(s)) ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \\
 &\leq \int_{t_0}^t L |u_1(s) - u_2(s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \cdot \text{dist}(u_1, u_2) ds
 \end{aligned}$$

$\uparrow$ gli u_0 se ne vanno
 solito "argomento"
 $\nwarrow$

Ho dimostrato che

$$|[F(u_1)](t) - [F(u_2)](t)| \leq L \cdot \text{dist}(u_1, u_2) |t - t_0|$$

$$\leq L \cdot \delta \cdot \text{dist}(u_1, u_2) \leftarrow \text{non dipende più da } t.$$

Ora faccio il max del LHS al variare di $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Otengo

$$\text{dist}(F(u_1), F(u_2)) \leq L \cdot \delta \cdot \text{dist}(u_1, u_2)$$

Se prendo δ abbastanza piccolo in modo tale che $L\delta < 1$, allora è una contrazione !!!

Riavvolgendo il nastro: $F: X_{\delta, \epsilon} \rightarrow X_{\delta, \epsilon}$ è una contrazione per di aver posto

$$\delta M \leq \epsilon$$

mandare $X_{\delta, \epsilon}$ a sé.

$$\delta L < 1$$

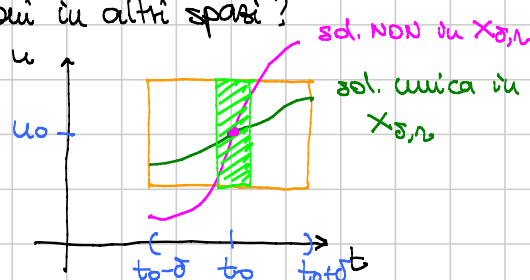
contrazione

Oss. Devo scegliere M all'inizio come max di f in un rettangolo $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon]$.

A quel pto lo stesso M va bene per rettangoli con $\delta \leq \delta_0$.

— o — o —

Oss. Ho dimostrato l'esistenza di una soluzione, ma non l'unicità. L'unicità del pto fisso garantisce che c'è un'unica sol. in $X_{\delta, \epsilon}$ purché δ sia abbastanza piccolo. Potrebbero esserci soluzioni in altri spazi?



Superamento dell'obiezione: considero un δ_1 più piccolo che definisce un rettangolo che le contiene entrambe.

Ora F la posso considerare come

$$F: X_{\delta_1, r} \longrightarrow X_{\delta_1, r}$$

perché δ_1 verifica ancora le 2 disuguaglianze. Ma allora il p.to fisso è unico in $X_{\delta_1, r}$, il che costringe le 2 soluzioni a coincidere almeno in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Quindi almeno in questo sottointervallo è unica.

— o — o —

Oss. Sia Y uno spazio metrico completo.

Sia A un insieme qualunque.

Sia

$X :=$ insieme delle funzioni limitate da A in Y

Allora $\text{dist}(f, g) := \sup \{d_Y(f(a), g(a)) : a \in A\}$

definisce una distanza in X che lo rende un metrico completo.

Esercizio Dimostrare che $C_{\text{bounded}}^0((a, b); \mathbb{R})$ è un
metrico completo

↑ continue e
limitate

Capire se si può fare il teo. di esistenza e unicità lavorando in C_{bounded}^0 , cioè senza bisogno di restringere l'immagine a $[u_0 - r, u_0 + r]$.

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 05

Titolo nota

27/01/2014

Teo. esistenza per eq. diff.

- ① Completezza via teo. di punto fisso
- ② Compattezza via Ascoli-Arzelà

Def. Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni.

Si dice che $\{f_n(x)\}$ è EQUICONTINUA se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \delta \text{ dipende da } \varepsilon \text{ ed } x, \text{ ma non da } n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b] \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

Si dice che $\{f_n(x)\}$ è EQUI UNIFORMEMENTE CONTINUA se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \cap [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$$

δ dipende da ε , ma non dipende da x né da n .

Esempio Supponiamo che tutte le $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ siano lipschitziane con la stessa costante L . (EQUILIPSCHITZ)
Allora sono una famiglia equi-unif. continua.

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L |x - y|$$

Ma allora per ogni ε basta porre $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ e la definizione è verificata.

Stesso discorso se sono equi-Hölder, con la stessa costante e lo stesso esponente $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq H \cdot |x - y|^\alpha.$$

TEOREMA (ASCOLI-ARZELÀ)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

- (i) compattità a t fissato: per ogni $t \in [a, b]$ la successione $\{f_n(t)\}$, che è una succ. di numeri, è relativamente compatta, cioè ogni sua sottosuccessione ammette a sua volta una sottosuccessione convergente (nel caso di $\mathbb{R}$ questo è equi-
valente a dire che $\{f_n(t)\}$ è limitata)
- (ii) equi-uniforme continuità delle $\{f_n(t)\}$.

Allora la successione $\{f_n\}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente, cioè esiste $f_\infty: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ed esiste una succ. crescente $\{m_k\} \subseteq \mathbb{N}$ t.c.

$$f_{m_k} \rightarrow f_\infty \text{ uniformemente.}$$

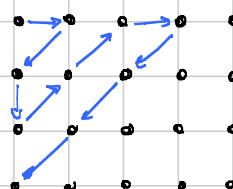
Oss. L'enunciato è in realtà un "se e solo se", cioè se $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente, allora le f_n sono equi-uniformemente continue e verificano la (i).

— o — o —

Preliminari

- ① Insiemi numerabili: un insieme è numerabile se è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Esempio: $\mathbb{N}$ è numerabile, $\mathbb{N}^2$ è numerabile,
 $\mathbb{Q}$ è numerabile



- ② Insiemi densi numerabili: dato un intervallo $[a, b]$, esiste un sottoinsieme $\{t_k\}$ (volendo si può pensare come una succ. a valori in $[a, b]$) che è DENSE
cioè

$$\forall t \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |t - t_k| < \varepsilon.$$

(basta prendere $[a, b] \cap \mathbb{Q}$)

③ Procedimento diagonale Consideriamo una successione di sottoinsiemi

$$\mathbb{N} \supseteq N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

Supponiamo che tutti contengano infiniti elementi.

Allora esiste una successione $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ strett. crescente tale che $n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

(Dim.: n_0 lo prendo a caso in N_0

n_1 lo prendo a caso in N_1 purché $> n_0$

n_2 " " " " " N_2 purché $> n_1$

e così via.

Ad ogni passo posso perché tutti gli N_i hanno infiniti elementi).

In generale ho ottenuto pure che $n_i \in N_j$ per ogni $j \leq i$.

Dim. di Ascoli - Arzelà

Passo 1 Scelgo un sottoinsieme denso $\{t_i\} \subseteq [a, b]$.

Voglio trovare una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ delle funzioni date tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(t_i) \text{ esiste per ogni } i \in \mathbb{N}$$

(lo vorremmo per ogni $t \in [a, b]$, ma per ora ci accontentiamo dei t_i).

Per ipotesi (i) so che c'è una sottosucc. o_k per t_1 , una o_k per t_2 , e così via... però ne vorrei una che vada bene per tutti!

Procedimento induttivo:

- scelgo una s.succ. che va bene per t_1 e indico con N_1 gli indici corrispondenti
- scelgo una s.succ. della prec. che va bene per t_2 e indico con N_2 gli indici corr.... chiaramente $N_2 \subseteq N_1$.

Procedendo in questo modo ottengo insiemi $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \dots$.
Sia ora u_k la successione di interi data dal procedimento diagonale. Allora dico che funziona, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{u_k}(t_i) \text{ esiste per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Infatti, $f_{u_k}(t_i)$ è una sottosuccessione di quella che andava bene per t_i , in quanto $u_k \in \mathbb{N}_i$ definitivamente.

Passo 2 La sottosuccessione $\{f_{u_k}\}$ che va bene per i t_i va bene in realtà per ogni $t \in [a, b]$, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{u_k}(t) \text{ esiste.}$$

A tal fine basta mostrare che $\{f_{u_k}(t)\}$ è di Cauchy. Se lo dimostro convergerà perché ha una s.succ. convergente.
Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $\delta > 0$ corrispondente nell'ipotesi (ii) a $\frac{\varepsilon}{3}$.
Poi prendo i t.c. $|t - t_i| < \delta$. Ora

$$\begin{aligned} |f_{u_k}(t) - f_{u_l}(t)| &\leq \underbrace{|f_{u_k}(t) - f_{u_k}(t_i)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{u_k}(t_i) - f_{u_l}(t_i)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{u_l}(t_i) - f_{u_l}(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

da cui la tesi.

se l e k sono grandi,
allora è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ in quanto
 $\{f_{u_k}(t_i)\}$ converge, quindi
è di Cauchy.

Passo 3 Detto $f_\infty(t)$ il limite della sottosuccessione $\{f_{u_k}(t)\}$, si ha che f_∞ è uniformemente continua.

$$\begin{array}{ccc} |f_{u_k}(t) - f_{u_k}(s)| \leq \varepsilon & \text{se} & |t - s| \leq \delta \\ \downarrow & & \downarrow \\ |f_\infty(t) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon & \text{se} & |t - s| \leq \delta. \end{array}$$

Passo 4 Dimostro che $f_{n_k}(t) \rightarrow f_\infty(t)$ uniformemente (già ho dimostrato che converge puntualmente), cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che per k suff. grande

$$|f_\infty(t) - f_{n_k}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]$$

Scelgo il $\delta > 0$ che corrisponde ad $\frac{\varepsilon}{3}$ nella equi-unif. continuità. Ricopro $[a, b]$ con intervalli di ampiezza $< \delta$ contenenti qualcuno dei t_i . Ne basta un numero FINITO



$$|f_\infty(t) - f_{n_k}(t)| \leq |f_\infty(t) - f_\infty(t_i)| + |f_\infty(t_i) - f_{n_k}(t_i)| + |f_{n_k}(t_i) - f_{n_k}(t)|$$

Dato t , scelgo il t_i corrispondenti all'intervallo in cui sta t .

- il 1° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ per l'equi-unif. continuità di f_∞
- il 2° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ per l'unif. continuità di f_∞
- il 3° termine è $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ se k è abbastanza grande perché $f_{n_k}(t_i) \rightarrow f_\infty(t_i)$ ed i t_i che sto considerando sono un numero finito.

Morale: il k grande che sistema i t_i FINITI sistema in realtà tutti i $t \in [a, b]$.

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 06

Titolo nota

27/01/2014

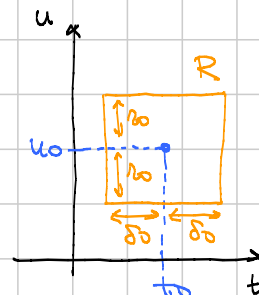
Teorema di sola esistenza per eq. diff. $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

Se f è continua, allora esiste almeno una soluzione.

Detto meglio: $f: [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$.

La soluzione, non nec. unica, la cerco del tipo

$$u: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$



per un certo $\delta \leq \delta_0$.

STRATEGIA

Problemi approssimanti: invece di risolvere $u' = f(t, u)$ risolvo $u' = f_n(t, u)$ con delle funzioni f_n che approssimano f e verificano il te. di esistenza e unicità. Ottengo così delle soluzioni $u_n(t)$ e spero che abbiano un limite per $n \rightarrow \infty$ e che questo limite sia soluzione con f .

Applichiamo la strategia in un caso semplice $u' = f(u)$, cioè nel caso autonomo.

Passo 1 Sia $f: [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora esiste una successione di funzioni

$$f_n: [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

che sono C^1 e $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Faccio 2 cose

- ① estendo f a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(x) = f(u_0 + r_0)$ per $x \geq u_0 + r_0$
e $f(x) = f(u_0 - r_0)$ per $x \leq u_0 - r_0$

② ponga $f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds = n [F(x+\frac{1}{n}) - F(x)]$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{media di } f(x) \text{ tra } x \text{ e } x+\frac{1}{n}}$
 $\uparrow$
primitiva

È chiaro che f_n è C^1 e la sua derivata è

$$f_n'(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$$

Perché $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente?

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - f(x)| &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds - f(x) \right| \\
 &= \left| n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(s) ds - n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(x) ds \right| \\
 &= n \left| \int_x^{x+\frac{1}{n}} (f(s) - f(x)) ds \right| \\
 &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(s) - f(x)| ds
 \end{aligned}$$

Ora f è continua nell'intervallo $[u_0 - \tau_0, u_0 + \tau_0]$, quindi è unif. continua, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x-s| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(s)| \leq \varepsilon$. Basta quindi prendere n t.c. $\frac{1}{n} \leq \delta$ e avere che

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - f(x)| &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} |f(s) - f(x)| ds \\
 &\leq n \int_x^{x+\frac{1}{n}} \varepsilon ds = \varepsilon
 \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Considero ora le soluzioni del problema $\begin{cases} u_n' = f_n(u_n) \\ u_n(t_0) = u_0 \end{cases}$

cioè risolvo con f_n invece di f .

Voglio dimostrare che la successione $\{u_n(t)\}$ verifica le ipotesi di Ascoli - Arzelà. Se ci riesco, ho quasi finito.

Supponiamo $u_n: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$ e

$u_n \rightarrow u_\infty$ (a meno di sottosucc.).

Dico che u_∞ risolve con f , cioè $u_\infty' = f(t, u_\infty)$

Oss. Il fatto che $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. non dice nulla sul fatto che $u_n' \rightarrow u_\infty'$.

Basta pensare a

$$u_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

Per far questo si ricorre alla formulazione con gli integrali:

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) = & u_0 & + \int_{t_0}^t f_n(u_n(s)) ds \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \text{se fosse vero che} \\ u_\infty(t) = & u_0 & + \int_{t_0}^t f(u_\infty(s)) ds \end{array} \quad f_n(u_n(s)) \rightarrow f(u_\infty(s))$$

e questo è come dire che u_∞ risolve con f .

Restano da dimostrare 3 cose:

- ① Le u_n sono definite su un intervallo comune $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$
- ② Le u_n verificano A-A
- ③ $f_n(u_n(s)) \rightarrow f(u_\infty(s))$ uniformemente, il che permette di passare al limite nell'integrale.

Dim. di ② Supponendo di aver fatto ①, devo verificare le ipotesi di A-A.

(i) banale perché $u_n(t) \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$, quindi ogni sottosuccessione ha a sua volta una s.succ. conv.

(ii) segue dal fatto che le u_n sono equi-lip. con costante $\leq$ del max di f_n in $[u_0 - r_0, u_0 + r_0]$, e questo max è

$\leq$ del max di f nello stesso intervallo (perché f_n è una media di f .)

Dim. di ③ Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $u_n \rightarrow u_\infty$ uniformi, anzi essendo equi-lip., allora $f_n(u_n(t)) \rightarrow f(u_\infty(t))$ uniformemente.

$$|f(u_\infty(t)) - f_n(u_n(t))| \leq \underbrace{|f(u_\infty(t)) - f(u_n(t))|}_{\substack{\text{piccolo per } n \text{ grande} \\ \text{in quanto} \\ u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ (\text{qui uso l'unif.} \\ \text{continuità di } f)}} + \underbrace{|f(u_n(t)) - f_n(u_n(t))|}_{\substack{\text{piccolo per } n \\ \text{grande in quanto} \\ f_n \rightarrow f \text{ unif.}}}$$

Dim. di ④ Indichiamo con R il rettangolo

$$[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \times [u_0 - r_0, u_0 + r_0]$$

devo dimostrare che esiste un δ garantito per cui u_n sta nel rettangolo per $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Basta prendere

$$\delta = \min \left\{ \delta_0, \frac{r_0}{M} \right\}$$

$$\text{dove } M = \max \{ |f(x)| : x \in [u_0 - r_0, u_0 + r_0] \}$$

Infatti

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_0| &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} |t - t_0| \cdot |u'_n(s)| \\ &= |t - t_0| \cdot \underbrace{|f_n(u_n(s))|}_{\leq M} \\ &\leq M \cdot |t - t_0| \\ &= M \delta_0 \\ &\leq r_0. \end{aligned}$$

Quindi in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ la soluzione non scappa dal rettangolo, e fin quando ci resta esiste

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 07

Titolo nota

31/01/2014

COMPATTEZZA IN SPAZI METRICISia (X, d) uno spazio metrico.

Dalla metrica seguono:

- una nozione di convergenza: $x_n \rightarrow x_\infty$ se e solo se $d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0$
- una definizione di sottosistema aperto: $U \subseteq X$ è aperto se e solo se $\forall x \in U \exists r > 0$ b.c. $B_r(x) \subseteq U$



Def. Uno spazio metrico si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ ha almeno una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge in X .

Detto diversamente: $\forall$ succ. $\{x_n\} \subseteq X$, esiste $n_k \rightarrow +\infty$ succ. di interi, ed esiste $x_\infty \in X$ b.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Def. Uno spazio metrico si dice COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni ricoprimento $\{U_i\}_{i \in I}$ di X fatto da aperti esiste un sottoricoprimento finito, cioè esiste $J \subseteq I$ b.c. $\bigcup_{j \in J} U_j = X$

Esempio $\{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti parametrizzata da un insieme di indici I , che può essere finito o infinito.

$$X = \mathbb{R} \quad U_n = (n, n+1) \quad \text{non ricopre tutto } \mathbb{R}$$

$$X = \mathbb{R} \quad U_x = (x, x+1) \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ non è compatto per ricoprimenti in quanto $U_n = (n, n+2)$ con $n \in \mathbb{Z}$ lo ricoprono, ma non ci sono sottoricoprimenti finiti

$[0, 1]$ non è compatto per ricoprimenti: ad esempio

$U_n = (\frac{1}{n}, 2)$ sono aperti, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq [0, 1]$, ma non esiste un sottoricoprimento finito.

Def. X si dice limitato se $\exists x_0 \in X \exists R > 0$ t.c.
 $X \subseteq B_R(x_0)$

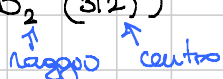
Def. X è totalmente limitato se $\forall r > 0$ esiste un insieme finito $x_1, \dots, x_k$ di el. di X t.c.
 $X \subseteq \bigcup_{i=1}^k B_r(x_i)$

(per ogni raggio r , posso fissare un numero finito di distributori tali che ogni p.to $x \in X$ ha almeno un distributore a distanza $< r$)

Esercizio 1 Un sottosistema $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è limitato se e solo se è totalmente limitato.

Esercizio 2 Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato, ma non viceversa.

Esempio Prendo $X = \mathbb{N}$ e $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

È ovvio che è limitato (tutto è contenuto in $B_2(3/2)$)


ma non è contenuto in un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$.

Fatto vero $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto per successioni $\Leftrightarrow$ chiuso + limitato.

Teorema (compattezza in spazi metrici)

Per uno sp. metrico (X, d) i seguenti 3 fatti sono equivalenti:

- (i) X è compatto per ricoprimenti,
- (ii) X è compatto per successioni,
- (iii) X è completo + totalmente limitato.

Oss. Se $Y \subseteq X$ e X è completo, allora Y è completo se e solo se è chiuso (facile esercizio).

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2) Hp: X è compatto per ricoprimenti

Th: X è compatto per successioni.

Sia $\{x_n\} \subseteq X$ una successione. Voglio trovare una s.succ. conv.

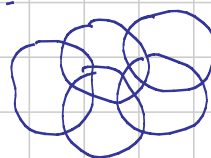
Oss. Supponiamo che $\exists x_\infty \in X$ t.c. $\forall r > 0$ esistono infiniti termini della successione che stanno in $B_r(x_\infty)$. Allora esiste n_k t.c. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$

[Dim.: prendo n_1 t.c. $x_{n_1} \in B_{\frac{1}{2}}(x_\infty)$
 prendo n_2 t.c. $n_2 > n_1$ e $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x_\infty)$
 $\vdots$
 per induzione prendo n_{k+1} t.c.
 $n_{k+1} > n_k$ e $x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x_\infty)$]

Se trovo un p.to $x_\infty \in X$ con questa proprietà, allora Ok.
 Supponiamo per assurdo di non trovarlo. Allora $\forall x \in X$
 $\exists r(x) > 0$ t.c. $B_{r(x)}(x)$ contiene solo un numero finito di termini della successione.

Ora $\bigcup_{x \in X} B_{r(x)}(x)$ è un ricoprimento aperto di X , il quale quindi ammette un sottoricoprimento finito.

Ma allora abbiamo un numero finito di palle ciascuna delle quali contiene un numero finito di el. della successione, e questo è assurdo.



(2) $\Rightarrow$ (3) (2) $\Rightarrow$ Completo Hp: X compatto per successioni
 Th: X completo

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy. Per hp ha una s.succ. convergente, ma allora essendo di Cauchy converge tutta.

(2) $\Rightarrow$ Totalmente limitatoHp: X compatto per successioniTh: X totalmente limitatoFisso $r > 0$ e inizio a disporre i "distributori". Per inclusione

- scelgo x_1 a caso
- scelgo x_2 fuori da $B_r(x_1)$
- scelgo x_3 fuori da $B_r(x_1) \cup B_r(x_2)$
- $\vdots$
- scelgo x_{k+1} fuori da $B_r(x_1) \cup \dots \cup B_r(x_k)$

Se strada facendo ho ricoperto tutto X , allora ok, altrimenti ho ottenuto una succ. x_n t.c. $d(x_i, x_j) \geq r \quad \forall i \neq j$.

Questa non può avere sottosucc. convergenti (una s.succ. conv. dovrebbe essere di Cauchy ma non esistono s.succ. di Cauchy).

(3) $\Rightarrow$ (2) Hp: X totalmente limitato + completo
 X compatto per successioni

Prendo una successione $\{x_n\}$ e cerco una s.succ. convergente.

Essendo completo, basta che trovi una s.succ. di Cauchy.

Per inclusione

- Fisso raggio $r=1 \Rightarrow$ esiste un insieme finito di palle di raggio 1 che ricopre X
 $\Rightarrow$ esiste un insieme infinito di indici $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ t.c. x_i con $i \in N_1$ stanno in una stessa palla di raggio 1.

$\vdots$

- Fisso raggio $r = \frac{1}{k+1} \Rightarrow$ esiste un insieme infinito di indici $N_{k+1} \subseteq N_k$ t.c. x_i con $i \in N_{k+1}$ stanno in una stessa palla di raggio $\frac{1}{k+1}$

Prendiamo una succ. m_k crescente con $m_k \in N_k$.

Mostro che ogni ricoprimento $\{U_i\}$ ha un sottoricoprimento finito.

Prendo $r > 0$ il raggio magico e ricopro X con un numero finito di palle di raggio r (posso perché (2) $\Rightarrow$ (3)).

Per definizione di raggio magico ciascuna di queste palle è contenuta in qualche U_i .

Poiché queste palle, che sono un numero finito, ricoprono X , allora anche i corrispondenti U_i ricoprono X .

Più formalmente

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^k B_r(x_j)$$

$$B_r(x_j) \subseteq U_{i_j}$$

$$\Rightarrow X \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{i_j} \text{ che sono un numero finito.}$$

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 08

Titolo nota

31/01/2014

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Def. La funzione f si dice continua (per successioni) se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ in X si ha che

$$f(x_n) \rightarrow f(x_\infty).$$

$\uparrow$ limite di numeri in $\mathbb{R}$
 $\nwarrow$ limite in X rispetto alla dist. d

Def. La funzione f si dice continua se $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X$
 $\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

Fatto vero (Voleudo è un esercizio)

f continua per successioni $\Leftrightarrow f$ continua (ε/δ)

Def. La funzione f si dice semicontinua inferiormente se per ogni successione $x_n \rightarrow x_\infty$ (limite in X risp. a d) si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty).$$

(al limite può solo crollare)

Semicontinua superiormente: $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x_\infty).$

Teorema di Weierstrass (Versione $\liminf$). Sia (X, d) uno spazio metrico COMPATTO e sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione semicont. inf. Allora esiste

$$\min \{ f(x) : x \in X \}$$

Dim. Esattamente la stessa dell'analisi 1.

Di sicuro esiste

$$L := \inf \{ f(x) : x \in X \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Allora esiste una successione $\{x_n\}$ in X tale che

$$f(x_n) \rightarrow L \quad (\text{successione minimizzante})$$

Poiché X è compatto (per successioni), allora esiste $x_\infty \in X$ ed esiste n_k t.c.

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \text{ in } X.$$

Dico che $f(x_\infty) = L$. Infatti

$$L \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = L$$

$\uparrow$ perché L è l'inf $\uparrow$ f è s.c.i. e $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ $\nwarrow$ perché tutta la succ. $f(x_n)$ tende ad L , quindi pure le sottosuccessioni tendono ad L .

Di conseguenza $L = f(x_\infty)$, quindi L è minimo.

Varianti di W. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f è s.c.i.

(ii) esiste un sottolivello non vuoto compatto, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\{x \in X : f(x) \leq M\}$$

sia $\neq \emptyset$ e compatto,

Allora esiste min $\{f(x) : x \in X\}$,

Dim. "La lotta per il minimo si gioca nel sottolivello".

Sia Y il sottolivello. Per W vero esiste

$$\min \{f(x) : x \in Y\} = m$$

Dico che m è minimo in generale, cioè per $x \in X$. Basta distinguere i casi $x \in Y$ e $x \in X \setminus Y$.

Def. Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è coerciva se tutti i suoi sottolivelli non vuoti sono compatti.

Teorema Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è s.c.i. e coerciva, allora esiste il minimo.

Dim. Basta trovare un sottolivello $\neq \emptyset$: quello è compatto perché f è coerciva, quindi uso la variante precedente.

Prendo $x_0 \in X$ a caso e considero il sottolivello con $M = f(x_0)$ o $M = f(x_0) + 1$. Questo è non vuoto.

Caso speciale Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Supponiamo che f sia continua.

Allora f è coerciva.

$$\downarrow$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } |x| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$$

Dim. Ogni sottolivello è per forza limitato (contenuto nella palla di raggio R corrispondente) ed è chiuso perché f è continua. Chiuso + limitato $\Rightarrow$ compatto.

Heine - Cantor Sia X sp. metrico compatto.

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora f è unif. continua.

Dim. Supponiamo che non sia unif. continua. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X \exists y \in Y \quad d(x, y) \leq \delta \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Essendoci " $\forall \delta > 0$ " la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e trovo x_n e y_n con.

Per compattezza $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ e $y_{n_k} \rightarrow y_\infty$

Poiché $d(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k}$ si avrà $x_\infty = y_\infty$

Ma allora passando al limite in

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad \text{ho un assurdo}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ f(x_\infty) - f(y_\infty) \\ \nwarrow \text{uguale} \nearrow \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

Dim. 2 Fisso $\varepsilon > 0$ voglio trovare un δ universale.
Intanto per ogni $x \in X$ ho $\delta(x)$ t.c.,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta(x)}(x)$$

$\downarrow$
sono un ricoprimento di X , dal
quale posso estrarne un s. ricoprimento
finito

Ma non ho finito !!! Anche prendendo il δ più piccolo ho
garantito che

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

solo se x è il centro di una palla del sottoricoprimento finito.

Devo prendere come δ il raggio magro del ricoprimento.

Se due p.ti qualunque distano meno del raggio magro, allora
stanno in una stessa palletina del ricoprimento, quindi i
corrispondenti valori distano meno di ε .

--- $\circ$ --- $\circ$ ---

SSSUP 2014 - LEZIONE 09

Titolo nota

04/03/2014

CALCOLO DELLE VARIAZIONI Problemi di max / min

$$\min_{\text{inf}} \{ f(x) : x \in X \} \quad f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
insieme (spazio di dim. infinita)

Due approcci:

→ METODO DIRETTO

→ METODO INDIRETTO

Esempio $\min \{ \underbrace{x^2 + 2y^2 - 2x + 4y}_{f(x,y)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

Metodo indiretto

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 & x = 1 \\ 4y + 4 = 0 & y = -1 \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}} \right\} \text{Condizione necessaria}$$

Se il minimo esiste, allora è assunto in $(1, -1)$ Tento la sorte: $x = 1 + u$, $y = -1 + v$ e calcolo

$$\begin{aligned} f(1+u, -1+v) &= 1 + \cancel{2u} + u^2 + \cancel{2} - \cancel{4v} + 2v^2 - \cancel{2} - \cancel{2u} - \cancel{4} + \cancel{4v} \\ &= -3 + u^2 + 2v^2 \\ &\geq -3 \quad (\text{vale il segno di } = \text{ se e solo se } u=v=0) \\ &= f(1, -1) \end{aligned}$$

Conclusione: il minimo vale -3 e l'unico pto di min. è $(1, -1)$.

Metodo indiretto: → condizione necessaria (e trovo i candidati)
→ disuguaglianza per finire.

Metodo diretto: $\rightarrow$ dimostrare l'esistenza con W. o varianti
 $\rightarrow$ passare alle condizioni necessarie che a quel
 p.to danno sicuramente i p.ti buoni
 (candidati p.ti di max./min.)

Nell'esempio: $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

W. generalizzato $\Rightarrow$ esistenza
 e poi si procede come sopra.
 — o — o —

Metodo indiretto $\leadsto$ EQUAZIONE DI EULERO

Consideriamo problemi del tipo

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \varphi(x, u(x), u'(x)) dx}_{F(u)} : u \in \text{spazio di funzioni} \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{definite su } [a,b] \\ \text{a valori reali} \end{array} \right\}$$

Esempio 1 $F_1(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 dx$

Esempio 2 $F_2(u) = \int_{-1}^1 \{ [u'(x)]^4 + (u(x) - x^2)^3 \} dx$

$$\varphi(x, u, u') = u'^4 + (u - x^2)^3$$

L'insieme X in cui varia u può essere diverso da problema a problema

$$\min \{ F_1(u) : u \in C^1([0,2], \mathbb{R}) \} \quad (\text{problema banale: } \min = 0 \\ \text{e i p.ti di min. sono le} \\ \text{funzioni costanti})$$

$$\min \{ F_1(u) : u \in C^1([0,2]; \mathbb{R}), u(0)=3, u(2)=5 \}$$

Definiscono l'insieme X .

Fatto generale Supponiamo che X sia uno spazio vettoriale.
 Sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$
 Sia $x_0 \in X$ un pto di minimo per $F(x)$.
 Sia $v \in X$.

Considero $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}$
 (t è un numero reale)



Questo limite, se esiste, si dice DIFFERENZIALE SECONDO GATEAUX del funzionale F nel pto x_0 (è la derivata direzionale)

Se x_0 è un pto di min. o un pto di max, il limite se esiste deve venire 0, qualunque sia $v \in X$.

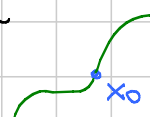
- Achtung!
- ① Può accadere che x_0 sia pto di min, ma il limite non esiste per alcuni o per tutti i v .
 - ② Può accadere che il lim = 0 per ogni $v \in X$, ma x_0 non è pto di max./min.

Condizione necessaria (ma non suff.) affinché x_0 sia pto di min/max è che il diff. secondo Gateaux in x_0 sia nullo per tutti i v per cui esiste.

Cosa succede se X NON è uno spazio vettoriale?

Posso sperare che esistano delle direzioni v , non necessariamente in X , tali che $x_0 + tv \in X$ almeno per valori di t vicini a $t=0$.

Ancora più in generale, posso considerare una qualunque curva $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$, prendere la funzione $t \rightarrow F(\gamma(t))$ e calcolarne la derivata per $t=0$:



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(x_0)}{t}$$

Per ogni curva, se x_0 è un pto di max/min per F , il limite se esiste deve fare 0.

↑ Generalizzazione della derivata direzionale (corrisponde a $\delta(t) = x_0 + tv$)

Vantaggio: non devo fare somme in X (però devo fare curve...)

Se il problema è $\min \{F_1(u) : u \in \underline{C^1([0,2])}\}$
posso considerare X

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_1(u+tv) - F_1(u)}{t} \quad \text{per ogni } \begin{matrix} v \in C^1([0,2]) \\ u \in X \quad v \in X \end{matrix}$$

Se il problema è $\min \{F_1(u) : u \in \underline{C^1([0,2]), u(0)=3, u(2)=5}\}$
posso considerare X

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_1(u+tv) - F_1(u)}{t} \quad \text{per ogni } v \in C^1([0,2]) \text{ tale che } v(0)=v(2)=0$$

$u \in X \quad v \notin X$ Ora $v \notin X$ ma $u+tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

Se il problema è $\min \{ \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) dx : u \in \underline{C^1([0,2]), u(0)=3} \}$
X

Faccio come sopra con $v \in C^1([0,2])$ con $v(0)=0$

Più in generale si possono considerare funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(m)}) dx$$

o ancora con $F(u) = \int_{\Omega} \varphi(x, u, Du, \dots) dx$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

SSSUP 2014 - LEZIONE 10

Titolo nota

04/03/2014

Esempio 1 $F(u) = \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2 dx$

$$X = \{u \in C^1([0,2]) : u(0)=3, u(2)=5\}$$

Prendo $v \in C^1([0,2]) : v(0)=v(2)=0$. *Direzioni di spostamento*

Se $u \in X$, allora $u+tv \in X$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{F(u+tv) - F(u)\} &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 [\dot{u} + t\dot{v}]^2 dx - \int_0^2 \dot{u}^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 \{ \cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 - \cancel{\dot{u}^2} \} dx \right\} \\ &= 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx + t \int_0^2 \dot{v}^2 dx \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx$$

Se un pto di minimo del funzionale $F(u)$ esiste, allora questo punto di minimo è una funzione $u(x)$ tale che

$$\int_0^2 \underset{\text{deriv.}}{\dot{u}(x)} \underset{\text{integrare}}{\dot{v}(x)} dx = 0 \quad \text{per ogni } v(x) \text{ come sopra}$$

Integrando per parti ottengo

$$\boxed{[\dot{u}(x)v(x)]_{x=0}^{x=2}} - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx \quad \left(\text{sto assumendo } u \in C^2 \text{ anche se non potrei} \right)$$

↓
Questo fa 0 perché

$$v(0) = v(2) = 0$$

Quindi se u è un pto di min. per $F(u)$, allora deve valere

$$\int_0^2 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \text{ come prima}$$

LEMMA FONDAMENTALE (DU BOIS - REYMOND)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

per ogni $v \in C^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$.

Allora

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Vale lo stesso se impoigo $v \in C^\infty([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$,
e anche se impoigo annullamenti in altri pti a mia scelta.

Dato per buono il lemma, se u è un pto di min., allora

$$\ddot{u}(x) = 0 \text{ per ogni } x \in [0, 2] \quad \text{Equazione di EULERO-LAGRANGE}$$

Quindi $u(x)$ è la retta che passa per i 2 pti al bordo dati:

$$u(x) = 3 + x.$$

— o — o — INIZIO DIM. RIGOROSA

Voglio ora dimostrare che $F(w) \geq F(u)$ per ogni altra $w \in X$.

Questa w la posso scrivere come

$$w = u + \underbrace{(w-u)}_{v \in C^1 \text{ e } v(0) = v(2) = 0}$$

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \int_0^2 [\dot{u} + \dot{v}]^2 dx = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx}_0 + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq F(u) \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx = \underbrace{[\dot{u} v]_0^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{grazie a } v}} - \underbrace{\int_0^2 \ddot{u} v dx}_{\substack{\uparrow \\ 0 \\ \text{grazie a } u}}$$

Ho così dimostrato che $F(u+v) \geq F(u)$ per ogni v con uguaglianza se e solo se $v(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$, quindi la retta è l'unico pto di minimo.

— o — o — FINE DIM. RIGOROSA

Esempio 2 $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) dx$

$$X = \{u \in C^1([0, 2]) : u(0) = 3\}$$

Scelgo perturbazioni $v \in C^1([0, 2])$ tali che $v(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \{F(u+tv) - F(u)\} &= \frac{1}{t} \left\{ \int_0^2 [(\dot{u} + t\dot{v})^2 + (u+tv)^2 - \dot{u}^2 - u^2] dx \right\} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^2 [\cancel{\dot{u}^2} + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + \cancel{u^2} + 2tuv + t^2v^2 - \cancel{\dot{u}^2} - \cancel{u^2}] dx \\ &= 2 \int_0^2 [\dot{u}\dot{v} + uv] dx + t \int_0^2 [\dot{v}^2 + v^2] dx \end{aligned}$$

Quando $t \rightarrow 0$ ottengo

$$2 \int_0^2 (\dot{u}\dot{v} + uv) dx = 0$$

Cerco le u per cui l'integrale $= 0$ per ogni $v \in C^1$ con $v(0) = 0$.

Voglio eliminare $\dot{v}$, quindi integro il primo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx &= [\dot{u}(x)v(x)]_0^2 - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx \\ &= \dot{u}(2)v(2) - \int_0^2 \ddot{u}(x)v(x) dx \end{aligned}$$

(in 0 se ne va perché $v(0) = 0$)

Quindi la condizione è diventata:

$$\ddot{u}(2)v(2) + \int_0^2 (-\ddot{u} + u)v \, dx = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ come sopra.}$$

PASSO 1 Mi limito alle $v \in C^1([0,2])$ b.c. $v(0) = v(2) = 0$.

Per queste deve succedere che

$$\int_0^2 (-\ddot{u} + u)v \, dx = 0$$

Lemma DBR $\Rightarrow -\ddot{u}(x) + u(x) = 0$ per ogni $x \in [0,2]$
cioè $\ddot{u} = u$

PASSO 2 Ora so già che se u è p.to di minimo, allora

$$-\ddot{u} + u = 0.$$

Allora la condizione integrale di sopra diventa

$$\ddot{u}(2)v(2) = 0 \quad \text{per ogni } v \text{ come sempre}$$

Poiché $v(2)$ fa quello che gli pare, per forza $\ddot{u}(2) = 0$.

Conseguenza: l'eventuale p.to di minimo $u(x)$ di $F(u)$ in X deve verificare

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(0) = 3 \\ \ddot{u}(2) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{le soluzioni dipendono da 2 parametri}$$

Dimostrazione rigorosa (esercizio)

- ① Risolvo l'eq. diff. e trovo esplicitamente $u(x)$
- ② Scrivo ogni $w \in X$ come $u+v$, con $v \in C^1$ con $v(0)=0$, e dimostro che $F(w) = F(u+v) \geq F(u)$ con $=$ se e solo se...

Morale

→ la condizione nec. affinché u sia pto di max / min
è un' eq. diff. con dati al bordo

→ i dati al bordo possono essere di 2 tipi

$u(a)$ assegnato o $u(b)$ assegnato → DIRICHLET

$u'(a)$ assegnato o $u'(b)$ assegnato → NEUMANN

Idea: D all'inizio $\Rightarrow$ D nell' eq. di Eulero

nulla all'inizio $\Rightarrow$ N nell' eq. di Eulero

Domandine a cui pensare

$$F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 dx \quad u(0) = 3 \quad \dot{u}(2) = 5$$

$$F(u) = \int_0^2 \ddot{u}^2 dx \quad u(0) = 3 \quad \dot{u}(2) = 5$$

Determinare: • se esiste min

• se sì, chi sono i pti di min

• se no, chi è l'inf.

SSSUP 2014 — LEZIONE 11

Titolo nota

14/03/2014

Equazione di Eulero - Lagrange per funzionali integrali

$$F(u) = \int_a^b [\varphi(\dot{u}(x)) + \psi(u(x))] dx$$

+ condizioni al bordo di vario tipo, ad esempio

$$\rightarrow u(a) = A, u(b) = B$$

→ nessuna condizione

$$\rightarrow \text{solo } u(a) = A \text{ oppure solo } u(b) = B$$

$$\rightarrow u(a) = u(b)$$

→ cose più creative ...

Eq. di Eulero: si parte da $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}$

↑
perturbazione che rispetta le
condizioni al bordo
(se u verifica,
allora u+tv
verifica)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_a^b [\varphi(\dot{u} + t\dot{v}) + \psi(u + tv) - \varphi(\dot{u}) - \psi(u)] dx = \\ & = \int_a^b \frac{\varphi(\dot{u} + t\dot{v}) - \varphi(\dot{u})}{t} + \frac{\psi(u + tv) - \psi(u)}{t} dx \end{aligned}$$

Supponiamo di poter passare al limite per $t \rightarrow 0$. Sono dei rapporti incrementali per cui tende a

$$\int_a^b [\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v] dx$$

Condizione necessaria affinché $u(x)$ sia p.to di max/min per $F(u)$ è che

$$\int_a^b [\varphi'(\dot{u}) \dot{v} + \psi'(u) v] dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

Integrando per parti mi libero di ψ :

$$[\varphi'(u)\psi]_a^b - \int_a^b [\varphi'(u)]' \psi \, dx + \int_a^b \varphi'(u) \psi \, dx = 0$$

Se mi limito a considerare perturbazioni $\psi(x)$ con $\psi(a) = \psi(b) = 0$ ottengo

$$\int_a^b (-[\varphi'(u)]' + \varphi'(u)) \cdot \psi \, dx = 0 \quad \forall \psi \text{ ammissibile e nulla al bordo}$$

Lemma DBR $\Rightarrow -[\varphi'(u)]' + \varphi'(u) = 0$, cioè

$$[\varphi'(u)]' = \varphi'(u) \quad \text{cioè}$$

$$\varphi''(u) \ddot{u} = \varphi'(u) \quad \forall x \in [a, b]$$

Eq. di Eulero-Lagr.
in forma diff.

Si tratta di eq. diff. di ordine 2, quindi servono 2 cond. al bordo. Ora si prendono strade diverse a seconda delle cond. al bordo date.

$\rightarrow u(a) = A$, $u(b) = B$. Ne ho già 2, quindi OK
 $\leadsto$ problema di DIRICHLET

$\rightarrow$ Nessuna cond. all'inizio. Le $\psi(x)$ ammissibili non hanno vincoli al bordo. Dopo il passaggio per parti avevo

$$\varphi'(u(b))\psi(b) - \varphi'(u(a))\psi(a) + \int_a^b (-[\varphi'(u)]' + \varphi'(u)) \psi \, dx = 0$$

$= 0$ perché u risolve l'eq. diff.

quindi deve essere 0 anche l'altro termine per ogni ψ ammissibile

Se scelgo $\psi(b) = 1$ e $\psi(a) = 0$ ottengo

Se scelgo $\psi(b) = 0$ e $\psi(a) = 1$ ottengo

$$\begin{aligned} \varphi'(u(b)) &= 0 \\ \varphi'(u(a)) &= 0 \end{aligned}$$

condizioni al
bordo di
NEUMANN

→ Se all'inizio avevo $u(a) = A$, dopo il passaggio per parti ho

$$\varphi'(u(b))v(b) - \varphi'(u(a))v(a) = 0$$

" perché sono costretto ad usare perturbazioni v con $v(a) = 0$

quindi ritrovo $\varphi'(u(b))v(b) = 0 \quad \forall v$ ammissibile
e basta prendere una $v(x)$ con $v(b) = 1$ per avere $\varphi'(u(b)) = 0$.
Quindi avrai il problema misto con
 $u(a) = A$ e $\varphi'(u(b)) = 0$

→ Se all'inizio avevo $u(a) = u(b)$ mi ritrovo

$$\varphi'(u(b))v(b) - \varphi'(u(a))v(a) = 0 \quad \forall v \text{ con } \underline{v(a) = v(b)} = \lambda$$

condizioni di ammissibilità

$\lambda [\varphi'(u(b)) - \varphi'(u(a))] = 0$ potendo scegliere $\lambda \neq 0$ ritrovo

$$u(a) = u(b)$$

$$\varphi'(u(b)) = \varphi'(u(a))$$

→ se φ fosse riemanniana diventa $u(b) = u(a)$
(condizioni al bordo PERIODICHE)

— o — o —

Caso particolare: $\psi \equiv 0$ (il funzionale dipende solo da u)
L'equazione di Eulero diventa:

$$\varphi''(u) \ddot{u} = 0$$

Supponiamo che $\varphi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (vuol dire che φ è convessa strettamente). Allora diventa $\ddot{u} = 0$, quindi è risolta da tutte e sole le rette.

Domanda: la retta che soddisfa le condizioni al bordo è un punto di minimo?

Risposta: nel caso di φ convessa sì.

Lo dimostro con la disuguaglianza. Sia u la retta buona, e sia w un'altra qualunque funzione. Allora $w = u + v$
↑
perturbazione

$$F(w) = F(u+v) = \int_a^b \varphi(\dot{u} + \dot{v}) dx$$

Per una funzione qualunque si ha per Taylor-Lagrange

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi'(a)b + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) b^2$$
↑ sta tra a e $a+b$

Se φ è convessa, allora di sicuro $\frac{1}{2} \varphi''(\xi) b^2 \geq 0$, quindi

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b$$

Usandola con $a = \dot{u}(x)$ e $b = \dot{v}(x)$ ottengo

$$F(w) \geq \int_a^b [\varphi(\dot{u}) + \varphi'(\dot{u}) \dot{v}] dx = F(u) + \underbrace{\int_a^b \varphi'(\dot{u}) \dot{v} dx}_0 = F(u)$$

" 0 perché è l'eq. di Eulero nella forma iniziale

Questo mostra che u è un p.to di minimo.

È unico? Come potrei avere $F(w) = F(u)$, ma se $\varphi''(x) > 0$ sempre, non posso avere uguaglianza dove ho usato Taylor-Lagrange

Conclusioni: ① Se $\varphi''(x) \geq 0$ sempre, la retta buona è p.to di min.
 ② Se $\varphi''(x) > 0$ sempre, la retta buona è l'unico p.to di minimo.

Analogamente : se $\varphi''(x) \geq 0$ e $\psi''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
con lo stesso ragionamento dimostro che

① La soluzione buona dell'eq. di Eulero è un pto di minimo

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_a^b [\varphi(u+v) + \psi(u+v)] dx \\ &\geq \int_a^b [\varphi(u) + \varphi'(u)v + \psi(u) + \psi'(u)v] dx \\ &= F(u) + \int_a^b [\varphi'(u)v + \psi'(u)v] dx \\ &\quad \text{"perché è Eulero nella prima forma"} \end{aligned}$$

② Se $\varphi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, oppure $\psi''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
allora la sol. buona di Eulero è l'unico pto di minimo.
In particolare la soluzione buona di Eulero è UNICA.
— o — o —

Più in generale, se il funzionale è del tipo

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x, u, u') dx$$

per un'opportuna $\varphi(x, u, u')$. L'eq. di Eulero diventa

$$[\varphi_{u'}(x, u, u')] = \varphi_u(x, u, u')$$

che volendo si espande come

$$\varphi_{u',x} + \varphi_{u'u} u' + \varphi_{u'u'} u'' = \varphi_u$$

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 12

Titolo nota

14/03/2014

SIGNAL PROCESSING Sia $f(x)$ una funzione data

$$\min \left\{ \int_a^b [\dot{u}(x)]^2 + [u(x) - f(x)]^2 dx : u \in C^1([a, b]) \right\}$$

Pensiamo $f(x)$ come un segnale ricevuto, che può essere alterato dal "rumore".

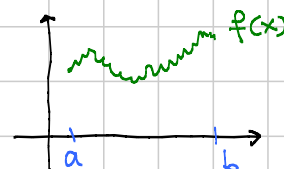
Il problema consiste nel recuperare il "vero" segnale a partire da quello arrivato $f(x)$.

Un possibile approccio è risolvere il pbm. di minimo.

Infatti

→ tenere basso il termine con $\dot{u}^2$ vuol dire "segnale smooth"

→ tenere basso il termine $|u - f|^2$ vuol dire che u è "simile" a f .



Il funzionale è

$$F(u) = \int_a^b [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf + f^2] dx$$

↓ è una costante (il suo integrale)
quindi lo posso eliminare

mi riduco a minimizzare

$$\int_a^b [\dot{u}^2 + u^2 - 2uf] dx$$

L'equazione di Eulero diventa...

$$--- [\varphi_u(x, u, \dot{u})]' = \varphi_u(x, u, \dot{u}) ---$$

$$[2\dot{u}]' = 2u - 2f, \quad \text{cioè}$$

$$\ddot{u} = u - f$$

Eq. diff. lineare a coeff. costanti
non omogenea → Analisi 1

Al bordo vengono
cond. di NEUMANN
 $\dot{u}(a) = \dot{u}(b) = 0$

La soluzione buona dell'eq. diff. è UNICA ed è l'unico pto di minimo in quanto l'integranda del funzionale è convessa in $\dot{u}$ e convessa in u .

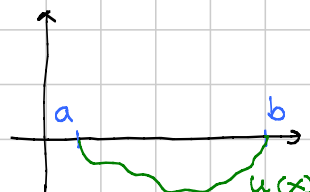
Esercizio Mostrare esplicitamente che $F(u) \geq F(u)$ scrivendo i termini.

— o — o —

Esempio meccanico

$$\min \left\{ \int_a^b [\dot{u}(x)]^2 + k u(x) dx : u \in C^1([a,b]) \text{ con } u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

$u(x)$ rappresenta la posizione di un filo sospeso tra 2 pti a e b.



Il termine $\dot{u}^2$ è un termine elastico, che rappresenta quanto costa allungare il filo (a rigore dovrei mettere $\sqrt{1+\dot{u}^2}$ che interviene nella lunghezza della curva)

Il termine ku rappresenta la convenienza di stare nelle zone a potenziale basso (penso $k = g$ gravità).

L'eq. di Eulero diventa $[2\dot{u}]' = k$, cioè $2\ddot{u} = k$, da cui il minimo è l'unica parabola che passa per i pti dati. È un minimo ed è unico perché $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = kx$ sono convessi, e la prima lo è strettamente.

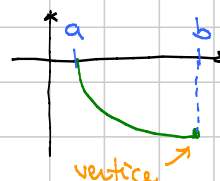
Oss. Se non ponessimo condizioni al bordo, l'inf. era banalmente $-\infty$ (rette orizzontali basse)

Se ponessimo $u(a) = 0$ e basta, dovevo risolvere

Eulero con $u(a) = 0$ e $\dot{u}(b) = 0$

Se ponessimo $u(a) = u(b)$ l'inf. era $-\infty$ come nel caso senza condizioni.

— o — o —



CASO NON CONVESSO

$$F(u) = \int_a^b \varphi(u) dx$$

↑ non convessa

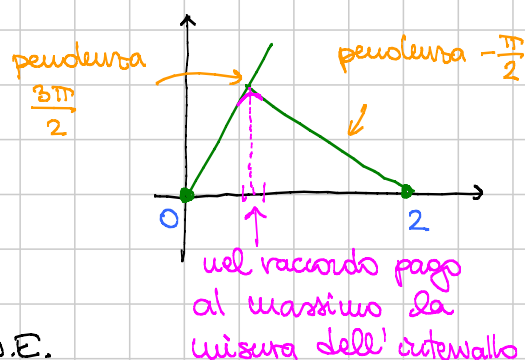
Esempio 1 $\min \left\{ \int_0^2 \sin(u(x)) dx : u \in C^1, u(0) = u(2) = 0 \right\}$

Eulero diventa $(\cos u)' = 0$, cioè $-\sin u \cdot u' = 0$
 Le rette sono comunque soluzioni.

Oss. Senza condizioni al bordo il minimo era -2 , ottenuto da una qualunque $u(x)$ con $u'(x) = \frac{3\pi}{2}$

Con le condizioni al bordo non posso fare meno di -2 , e nemmeno posso fare -2 , ma posso avvicinarmi quanto voglio a -2 .

L'esempio non è C^1 , ma posso appiattirlo con un raccordo vicino all'angolo



Quindi

- ① su C^1 l'inf. è -2 ed il min. N.E.
- ② Se ammetto competitori che sono C^1 tranne in un pto a mia scelta, allora il min esiste ed è -2 .

MORALE: nel caso non convesso i minimi hanno poca voglia di esistere

Esempio 2 $\min \left\{ \int_0^3 |\dot{u}(x)|^{1/2} + [u(x)]^2 dx : u(0) = 8 = u(3) \right\}$

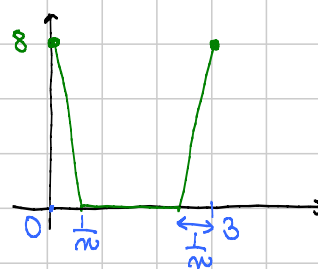
↑ questo è convesso

√x è non convessa

Sotto 0 non ci posso andare, ma mi ci posso avvicinare quanto voglio!

La derivata nei tratti laterali è $8m$,
quindi in ciascuno dei 2 tratti laterali
pago

$$\int_0^{\frac{1}{m}} |8m|^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{m} \cdot \sqrt{8m} \rightarrow 0$$



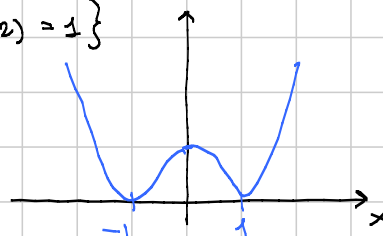
Anche sul secondo termine pago $\int_0^{\frac{1}{m}} [u(x)]^2 \leq \frac{1}{m} \cdot 64 \rightarrow 0$

Quindi l'inf. è 0 ed il minimo non esiste.

La colpa è la NON CONVESSITÀ del termine con u .

Esempio 3 $\min \left\{ \int_0^2 \varphi(u) dx : u(0)=0, u(2)=1 \right\}$

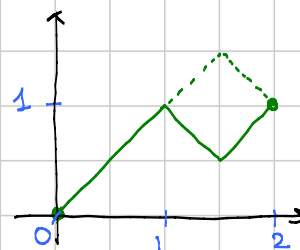
dove $\varphi(x) = (x^2-1)^2$



Oss: φ è non convessa e le derivate
meno care sono $u(x) = \pm 1$

Ora riesco a realizzare le condizioni al
bordo usando solo $u(x) = \pm 1$

Come prima $\inf = 0$ e min N.E.

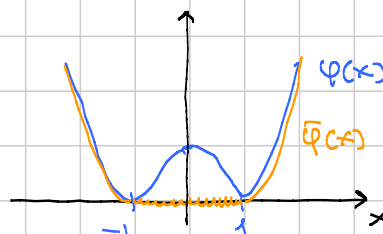


E se fosse $u(0)=0$ e $u(2)=4$?

Lo stesso trucco non funziona. Ora il
minimo esiste e l'unico p.to di min.
è la retta.

Considero il problema con $\bar{\varphi}(x)$ invece
di $\varphi(x)$. Nota $\bar{\varphi}(x)$ è la convessificata
di $\varphi(x)$.

Questo problema è convesso e ha soluzione
(la retta). Il problema originario ha $\inf$ in teoria + grande.



Detto meglio, sia $\bar{F}(u)$ il nuovo funzionale, sia u la retta e w qualcos'altro. Allora

$$F(w) \geq \bar{F}(w) \geq \bar{F}(u) = F(u)$$

↑
la retta è minimo
per $\bar{F}$

↑ perché la retta ha pendenza
2 e $\varphi(2) = \bar{\varphi}(2)$.

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 13

Titolo nota

21/03/2014

SPAZI DI HILBERT

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vett. su cui è definito un prodotto scalare definito positivo che lo rende uno spazio metrico completo.

Dimensione finita

Sia V sp. vett. di dim. n su cui è definito un prodotto scalare definito pos. ($\langle v, v \rangle > 0 \ \forall v \neq 0$).

Allora esiste base ortonormale $e_1, \dots, e_n$, cioè

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

dove $a_i = \langle v, e_i \rangle$. Inoltre

$$\|v\|^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2$$

Dim.

Gram-Smidt (GS). Prendo una base $e_1, \dots, e_n$ qualunque poi definisco

$$\bar{e}_1 := e_1$$

$$\bar{e}_2 := e_2 - \frac{\langle e_2, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} \bar{e}_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{e}_k := e_k - \frac{\langle e_k, \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle} \bar{e}_1 - \dots - \frac{\langle e_k, \bar{e}_{k-1} \rangle}{\langle \bar{e}_{k-1}, \bar{e}_{k-1} \rangle} \bar{e}_{k-1}.$$

In questo modo $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ (base ortogonale).

Poi concludo (ortonormalizzando) $e_i = \frac{\bar{e}_i}{\|\bar{e}_i\|}$.

Moralmente: uno sp. vett. V di dim. finita con prod. scal. def. positivo è come se fosse $\mathbb{R}^n$.

$$v \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

In dimensione infinita ci sono due nozioni di base:

- base algebrica: insieme $\mathcal{B} \subseteq H$ tale che ogni elemento $v \in H$ si scrive in modo unico come comb. lin. di elem. di $\mathcal{B}$, cioè

$$\forall v \in H \quad \exists n \geq 1 \quad \exists v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B} \quad \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.}$$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \quad (\text{occhio: } n \text{ non è fisso, ma dipende da } v)$$

[Si può dim. che una base algebrica esiste sempre, ma a voi non serve]

- base Hilbertiana: insieme (finito o) numerabile $\{e_n\}_{n=1,2,\dots}$ tale che

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\text{ortonormali})$$

e tale che ogni $v \in H$ si scrive in modo unico come

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

— 0 — 0 —

Serie di vettori

Sia $v_1, \dots, v_n, \dots$ una successione di vettori.

Dico che

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k$$

se, costruendo le somme parziali

$$S_1 = v_1, \quad S_2 = v_1 + v_2, \quad \dots, \quad S_k = v_1 + \dots + v_k$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = v$$

(Ho usato che $\mathcal{H}$ è sp. vettoriale per fare le somme, e che è metrico per fare i limiti)

Come dimostrare che una serie di vettori converge?

Cow. totale $\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \text{ converge}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{serie di numeri}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{serie di vettori}}$

L'implicazione vale se lo spazio H è completo

Dim. $S_n = \sum_{k=1}^n v_k \quad \bar{S}_n = \sum_{k=1}^n \|v_k\|$

Se dimostro che S_n è di Cauchy ho vinto. So per ipotesi che $\bar{S}_n$ è di Cauchy. Sia $n > m$

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|v_n + v_{n-1} + \dots + v_{m+1}\| \\ &\leq \|v_n\| + \|v_{n-1}\| + \dots + \|v_{m+1}\| \\ &= \bar{S}_n - \bar{S}_m \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Se n ed m sono grandi il RHS $\leq \varepsilon$, quindi pure $\|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$.

— o — o —

Sia ora $e_1, \dots, e_n, \dots$ una base Hilbertiana, allora

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k}_{\text{vettori}} \text{ converge} \iff \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}_{\text{numeri}} \text{ converge}$$

Dim. Definisco $S_n = \sum_{k=1}^n a_k e_k$, $\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$, $n > m$

$$\|S_n - S_m\|^2 = \underbrace{\|a_n e_n + \dots + a_{m+1} e_{m+1}\|^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{Def } S_k}} = a_n^2 + \dots + a_{m+1}^2 = \bar{S}_n - \bar{S}_m$$

Questo mostra che in questo caso S_n di Cauchy $\iff \bar{S}_n$ di Cauchy

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

$\sum a_n e_n \text{ cow.}$

$\sum a_n^2 \text{ cow.}$

— o — o —

Data una base Hilbertiana e_k , abbiamo che ogni $v \in H$ si scrive come

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

Inoltre $a_k = \langle v, e_k \rangle$ e $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

Inoltre se $v = \sum a_k e_k$ $w = \sum b_k e_k$, allora

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

Dim. (che $a_k = \langle v, e_k \rangle$). Dette S_n le somme parziali, si ha che

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad \text{cioè } S_n \rightarrow v$$

Dico che $\langle S_n, w \rangle \rightarrow \langle v, w \rangle$ per ogni $w \in H$

Infatti

$$|\langle S_n, w \rangle - \langle v, w \rangle| = |\langle S_n - v, w \rangle| \leq \underbrace{\|S_n - v\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{c.s.}}} \cdot \underbrace{\|w\|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \text{fisso}$$

[Dim. di c.s. $p(t) := \|v + tw\|^2 = \|v\|^2 + 2t\langle v, w \rangle + t^2\|w\|^2 \geq 0$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi $\Delta \leq 0$, quindi

$$\langle v, w \rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0$$

aggiustando viene c.s.]

Lo applico con $w = e_k$ e ottengo $\langle S_n, e_k \rangle \rightarrow \langle v, e_k \rangle$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ 0 \text{ per } n < k \\ a_k \text{ per } n \geq k \leftarrow \text{definito} \\ \downarrow \\ a_k \end{array}$$

Esercizio. Dimostrare formula per $\|v\|$ e per $\langle v, w \rangle$.

SSSUP 2014

—

LEZIONE 14

Titolo nota

21/03/2014

Def. Uno spazio metrico X si dice separabile se esiste un sottoinsieme $D \subseteq X$ che sia denso e numerabile.

Cioè $D = \{d_1, \dots, d_n, \dots\}$ e $\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$ t.c.
 $\text{dist}(x, d_k) \leq \varepsilon$.

Teorema (Esistenza della base Hilbertiana)

In ogni spazio di Hilbert H separabile esiste almeno una base Hilbertiana.

Idea della dim.:

- ① Prendo il D denso numerabile $\{d_1, d_2, \dots, d_n, \dots\}$
- ② Induttivamente elimino d_k se $\in \text{Span}\{d_1, \dots, d_{k-1}\}$
- ③ GS sui rimanenti. (se non avessi fatto prima ② potrebbero venire degli zeri!)
- ④ Dovrei ora dimostrare che ogni v si scrive in modo unico come "comb. lineare infinita" degli eprodotti.

— o — o —

Brutta notizia

Le palle non sono compatte se lo spazio ha dimensione infinita.

Dim.:

(almeno se esiste una base Hilbertiana).

A suo tempo già fatto che compatto per ricopr. = comp. per succ.
 Prendiamo la base Hilbertiana. Questa è contenuta in B con
 centro in 0 e raggio 1 . Questa non può avere s.succ. convergenti
 perché la distanza tra e_i e e_j è sempre $\sqrt{2}$ se $i \neq j$, quindi
 non possono essere s.succ. di Cauchy.

Oss. Per lo stesso motivo nemmeno la sfera $S = \{v \in H : \|v\| = 1\}$
 sono compatte.

CONVERGENZA DEBOLE

Sia u_m una succ. in H Hilbert, e sia $u_\infty \in H$. Dico che

① $u_m \rightarrow u_\infty$ (conv. forte) $\Leftrightarrow \|u_m - u_\infty\| \rightarrow 0$

② $u_m \rightarrow u_\infty$ (conv. DEBOLE) se $\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$
per ogni $w \in H$.

FACILE : $u_m \rightarrow u_\infty \Rightarrow u_m \rightarrow u_\infty$

Dim.: $|\langle u_m, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| = |\langle u_m - u_\infty, w \rangle| \leq \|u_m - u_\infty\| \cdot \|w\|$
 $\uparrow$
C.S.

Teorema In uno spazio di Hilbert le palle sono debolmente compatte per successioni, cioè ogni successione u_m limitata ammette almeno una s.succ. convergente debolmente.

Moralmente : u_∞ ha come componente k -esima il limite delle componenti k -esime dei u_m . Esempio : se e_n è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightarrow 0$.

Fatto semplice Supponiamo che $u_m \rightarrow u_\infty$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\langle u_m, e_k \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle$$

$\uparrow$
 k -esima comp. di u_m

$\uparrow$
 k -esima comp. di u_∞

Dim. (della compattezza debole delle palle usando che esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$).

È data una succ. u_n limitata, cioè $\exists R > 0$ b.c. $\|u_n\| \leq R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Voglio trovare una sottosucc. u_{n_k} e un elemento u_∞ t.c.

$$u_{n_k} \longrightarrow u_\infty, \text{ cioè } \langle u_{n_k}, w \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Idee: ① Faccio il limite delle prime comp. di u_n

" " " seconde " " " e così via

② Prendo il vettore u_∞ che ha come componenti i limiti di sopra

③ Dimostro che è ben definito

④ Dimostro che è il limite debole.

Realizzo ① $|\langle u_n, e_1 \rangle| \leq \|u_n\| \cdot \|e_1\| \leq R$
 $\uparrow$
 c.s.

Le prime componenti sono limitate, quindi a meno di s.succ.

$$\langle u_n, e_1 \rangle \longrightarrow a_1$$

Idee per le seconde componenti (uso una s.succ. della precedente)

" " terze e così via

Con il procedimento di sopra trovo una s.succ. u_{n_k} tale che

$$\langle u_{n_k}, e_i \rangle \longrightarrow a_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots$$

D'ora in poi per semplificare la notazione chiamo u_n la sottosuccessione (come se gli altri termini non esistessero più).

②

Pongo:

$$u_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

- ③ Devo dim. che la serie del ② converge, il che è equivalente a dire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$$

Prendiamo

$$\begin{array}{ccc} a_1^2 + \dots + a_k^2 & & \langle v_n, e_1 \rangle \rightarrow a_1 \\ \uparrow & \nwarrow & \langle v_n, e_2 \rangle \rightarrow a_2 \\ \langle v_n, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle v_n, e_k \rangle^2 & \leq & R^2 \end{array}$$

Infatti

$$\|v_n\|^2 = \underbrace{\langle v_n, e_1 \rangle^2 + \langle v_n, e_2 \rangle^2 + \dots}_{\substack{\downarrow \\ \text{se mi fermo alle prime } k \text{ è ancora} \\ \text{di più } \leq R^2}} \leq R^2$$

- ④ Devo dimostrare che $\langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$.

Ora w sarà somma di una serie $w = \sum b_n e_n$.

Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un w_ε con un numero finito di componenti, tale che $\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. (ogni vettore si approssima con vettori che hanno solo un numero finito di componenti) (w_ε è una somma parziale con n grande)

Ora

$$\begin{aligned} |\langle v_n, w \rangle - \langle v_\infty, w \rangle| &= |\langle v_n - v_\infty, w \rangle| \\ &= |\langle v_n - v_\infty, w - w_\varepsilon + w_\varepsilon \rangle| \\ &= |\langle v_n - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle + \langle v_n - v_\infty, w_\varepsilon \rangle| \\ &\leq |\langle v_n - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle| + |\langle v_n - v_\infty, w_\varepsilon \rangle| \end{aligned}$$

$$|\langle v_n - v_\infty, w - w_\varepsilon \rangle| \leq \underbrace{\|v_n - v_\infty\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{c.s.}}} \cdot \underbrace{\|w - w_\varepsilon\|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon (\|v_n\| + \|v_\infty\|) \leq 2\varepsilon R$$

quindi qui non ci sono problemi.

Per l'altro termine sfruttiamo che siamo con un numero finito di componenti

$$w_\varepsilon = b_1 e_1 + \dots + b_k e_k$$

e inoltre

$$v_n - v_\infty = (\langle v_n, e_1 \rangle - a_1) e_1 + \dots + (\langle v_n, e_k \rangle - a_k) e_k + \text{ci sono anche le successive}$$

Il prodotto scalare tra i 2 diventa

$$\langle v_n - v_\infty, w_\varepsilon \rangle = \overbrace{b_1 (\langle v_n, e_1 \rangle - a_1) + \dots + b_k (\langle v_n, e_k \rangle - a_k)}^{\text{SOMMA FINITA}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Occhio alla dim. sbagliata

$$\langle v_n, w \rangle = \langle v_n, e_1 \rangle \cdot b_1 + \langle v_n, e_2 \rangle b_2 + \dots + \langle v_n, e_k \rangle b_k + \dots$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

"Il limite della somma è la somma dei limiti vale solo per somme finite"

Ad esempio: $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

D'altra parte $S_n \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot (n+1) \rightarrow +\infty$

$\uparrow$ $\uparrow$
 termine + numero
 piccolo dei termini

SSSUP 2014

-

LEZIONE 15

Titolo nota

28/03/2014

Convergenza debole In uno spazio di Hilbert H si dice che

$$v_m \rightarrow v_\infty$$

se $\langle v_m, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in H$.

Nei casi in cui c'è la base Hilbertiana, questo implica la convergenza "componente per componente".

Proprietà facili(1) Se $v_m \rightarrow v_\infty$ e $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $v_m + u_m \rightarrow v_\infty + u_\infty$

$$\text{Dim.: } \langle v_m + u_m, w \rangle = \langle u_m, w \rangle + \langle v_m, w \rangle$$

↓

↓

$$\langle u_\infty, w \rangle + \langle v_\infty, w \rangle = \langle u_\infty + v_\infty, w \rangle$$

per ogni $w \in H$.(2) Se $v_m \rightarrow v_\infty$, allora $v_m \rightarrow v_\infty$

$$\text{Dim.: } \langle v_m, w \rangle = \langle v_m - v_\infty + v_\infty, w \rangle = \langle v_m - v_\infty, w \rangle + \langle v_\infty, w \rangle$$

↓ spesso
0

infatti

$$|\langle v_m - v_\infty, w \rangle| \leq \|v_m - v_\infty\| \cdot \|w\| \rightarrow 0$$

↑ c.s.

↓

0 per def. di lim. forte

(3) Se $v_m \rightarrow v_\infty$ e $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $\langle u_m, v_m \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$
e $\|u_m\| \leq M$

$$\text{Dim.: } \langle u_m, v_m \rangle = \langle u_m, v_m - v_\infty + v_\infty \rangle = \langle u_m, v_m - v_\infty \rangle + \langle u_m, v_\infty \rangle$$

spesso ↓

↓

0

 $\langle u_\infty, v_\infty \rangle$

$$|\langle u_n, v_n - v_\infty \rangle| \leq \underbrace{\|u_n\|}_{\substack{\uparrow \text{c.s.} \\ \text{serie che sia limitato}}} \cdot \underbrace{\|v_n - v_\infty\|}_{\downarrow 0}$$

— 0 — 0 —

Fatto misterioso (vero, ma non servirà mai) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\|u_n\|$ è limitata.

Fatti FALSI (1) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\|u_n\| \rightarrow \|u_\infty\|$

Esempio: Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana in dim. infinita, allora $e_n \rightarrow 0$, ma $\|e_n\| \rightarrow 1 \neq \|0\|$

(2) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $v_n \rightarrow v_\infty$, allora $\langle u_n, v_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, v_\infty \rangle$

Esempio: basta prendere $u_n = v_n = e_n \dots$

Nota bene Supponiamo che e_n sia base Hilbertiana. Allora

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \langle u_n, e_1 \rangle^2 + \langle u_n, e_2 \rangle^2 + \langle u_n, e_3 \rangle^2 + \dots \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\langle u_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_2 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_3 \rangle^2 + \dots = \|u_\infty\|^2 \end{aligned}$$

SBAGLIATO PERCHÉ PER LE SOMME INFINITE IL LM DELLA SOMMA NON È LA SOMMA DEI LIMITI.

— 0 — 0 —

Teorema Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\| \geq \|u_\infty\|$

Dim.:

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &= \|(u_n - u_\infty) + u_\infty\|^2 \\ &= \|u_n - u_\infty\|^2 + \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle \\ &\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\|u_\infty\|^2$ $\downarrow$ per def. di conv. debole
 — 0 — 0 —

Spazio $L^2(\mathbb{R})$ o $L^2((a,b))$ Si dice che $f \in L^2(\mathbb{R})$ se
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} [f(x)]^2 dx < +\infty$$

Si dice che $f \in L^2((a,b))$ se $\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty$
 $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema misterioso

(1) Sono spazi vettoriali

(2) Su questi spazi è definito

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) \quad (\text{o su } (a,b))$$

e questo è un prodotto scalare

(3) Rispetto a questo prodotto scalare $L^2(\mathbb{R})$ e $L^2((a,b))$ diventano spazi di Hilbert separabili

Dim.: (1) $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ da cui

$$|f(x) + g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2 \quad \text{Integrando ...}$$

(2) $|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ per ogni a e b , da cui

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx$$

se convergono, allora converge

ma se $\int |f(x)g(x)| < +\infty$, allora converge $\int f(x)g(x)$.

(3) FATTO MISTERIOSO.

Oss. Posso definire $L^p(\mathbb{R})$ e di (a,b) per ogni $p \geq 1$ ponendo

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty. \quad \text{Per } p \neq 2 \text{ sono "solo" BANACH}$$

Elementi di $L^2(0,1)$ possono essere brutti.

① Possono essere non limitati: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx < +\infty$$

② Possono essere non limitate in ogni sottointervallo.

$$f(x) = \frac{a}{|x|^{1/4}} + \frac{b}{|x-1/2|^{1/4}} + \frac{c}{|x-1/3|^{1/4}}$$

Ora numero $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$ i razionali in $(0,1)$ e poi pongo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{a_n}{|x-q_n|^{1/4}}} \quad \text{con } a_i > 0$$

$f_n(x)$

Mi serve che la serie converga in $L^2(0,1)$.

Per far questo basta essere sicuri che la serie delle norme converga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\int_0^1 \frac{1}{|x-q_n|^{1/2}} dx \right]^{1/2}$$

sono tutti minori di $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|^{1/2}} dx$

Basta fare in modo che $\sum a_n$ converga.

— o — o —

Nello spazio L^2 la disuguaglianza c.s. diventa:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$

Disuguaglianza di HÖLDER.

— o — o —

SSSUP 2014 — LEZIONE 16

Titolo nota

28/03/2014

SPAZI DI SOBOLEV (Spazio H^1 in dim. 1)Premessa: sia $u \in C^1(\mathbb{R})$ e sia $\phi \in C_0^1(\mathbb{R})$

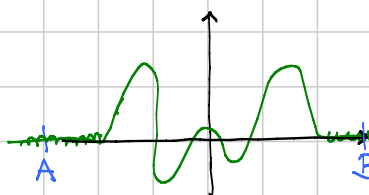
↑
a supporto compatto, cioè
nulla fuori da un certo
intervallo

Allora

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u'(x) \phi(x) dx$$

① invece che su $\mathbb{R}$ integro su $[A, B]$

② integro per parti

③ il pezzo di bordo se ne va perché $\phi(A) = \phi(B) = 0$ 

Analogo su un intervallo $\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b u'(x) \phi(x) dx$

per ogni $u \in C^1([a, b])$ e $\phi \in C^1([a, b])$ con $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

— o — o —

Spazi di Sobolev, definizione W

Dico che $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ se $u \in L^2(\mathbb{R})$ ed esiste $v \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R})$$

Brutalmente: $v(x)$ è il surrogato di $u'(x)$ nella formula di integrazione per parti

Se succede questo, $v(x)$ si dice DERIVATA DEBOLE di $u(x)$.

Analogamente, dico che $u \in W^{1,2}((a,b))$ se $u \in L^2((a,b))$ ed esiste $v \in L^2((a,b))$ t.c.

$$\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C^1([a,b])$$

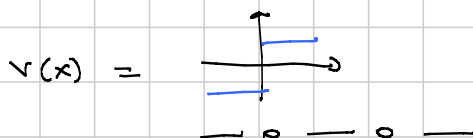
con $\phi(a) = \phi(b) = 0$

derivata prima

$W^{1,2}$ potenza nell'integrale

[Posso definire $W^{k,p}$ imponendo $u \in L^p$ e $v \in W^{k-1,p}$]

Esempio Si verifica facilmente (esercizio) che $u(x) = |x| \in W^{1,2}((-1,1))$ e la sua derivata debole è

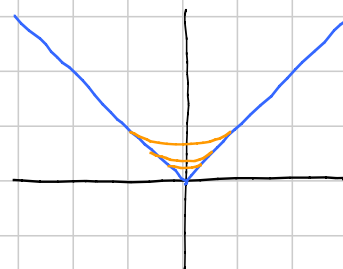


Spazi di Sobolev, definizione H

Dico che $u \in H^{1,2}(\mathbb{R})$ e v è la sua derivata debole se esiste una successione di funzioni $u_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ tali che

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^2(\mathbb{R}) \\ u_n' &\rightarrow v & \text{in } L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Esempio Approssimo $|x|$ con funzioni "arrotondate" e ottengo quello che voglio.



Oss. In modo analogo posso definire $H^{k,p}(\mathbb{R})$ e anche $H^{k,p}((a,b))$.

— o — o —

TEOREMA MISTERIOSO

$$H = W$$

D'ora in avanti ci occuperemo solo di $H^{1,2} = W^{1,2}$ (e si indica per brevità con H^1 sottintendendo il 2).

Fatto 1 Sia u_n una succ. di funzioni $C^1([a,b])$.

Supponiamo che

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } L^2$$

$$u_n' \rightarrow v \quad \text{in } L^2$$

Allora v fa funzionare la formula di int. per parti, cioè

$$\int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C^1 \text{ con } \phi(a) = \phi(b) = 0$$

Dim.: la formula vale per ogni u per motivi classici

$$\begin{aligned} \langle u_n, \phi' \rangle &= \int_a^b u_n(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b u_n'(x) \phi(x) dx & \langle u_n', \phi \rangle \\ &\downarrow & \downarrow \\ \int_a^b u(x) \phi'(x) dx &= - \int_a^b v(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

Oss. fondamentale: ho usato solo che $u_n \rightarrow u$ e $v_n \rightarrow v$

FATTO 2 Sia u_n una successione in H^1 e siano v_n le corrispondenti derivate deboli.

Supponiamo che

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{in } L^2((a,b))$$

$$\|v_n\| \text{ limitata}$$

Allora, a meno di sottosuccessioni, abbiamo che $v_n \rightharpoonup v_\infty$.

Allora v_∞ è la derivata debole di u_∞ .

Dim. Per ipotesi v_n è derivata debole di u_n , cioè

$$\int_a^b u_n(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v_n(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

$$\int_a^b u_\infty(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v_\infty(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

e questo è come dire che v_∞ è la derivata debole di u_∞ .

FATTO 3 Se $u \in H^1(a,b)$, allora u è almeno continua, anzi Hölder con esponente $\frac{1}{2}$, e

$$u(t) - u(s) = \int_s^t v(x) dx \quad \forall a \leq s < t \leq b$$

↑ derivata debole

Dim. Uso la definizione 1. Quindi esiste una successione u_n di funzioni C^∞ tali che

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u & \text{in } L^2 \\ u_n' &\rightarrow v & \text{in } L^2 \end{aligned}$$

Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t u_n'(x) dx$$

ma allora

funzione che vale 1
tra s e t e 0 altrove

$$|u_n(t) - u_n(s)| = \left| \int_s^t u_n'(x) dx \right| = |\langle u_n', 1_{[s,t]} \rangle|$$

$$\leq \left[\int_a^b |u_n'(x)|^2 dx \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b 1_{[s,t]}^2(x) dx \right]^{1/2}$$

$$= \|u_n'\| \cdot |t-s|$$

← sono equicontinuità perché $u_n' \rightarrow v$

Quindi tutte le u_n sono $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante di Hölder equi-limitata.

Quindi per Ascoli - Arzelà (e qui sto barando un minimo) a meno di sottosuccessioni convergono uniformemente ed il limite è a sua volta $\frac{1}{2}$ Hölder, quindi continuo.

Quindi, a meno di s.succ.

$u_n \rightarrow u$ uniformemente.

$$\begin{array}{ccc}
 u_n(t) - u_n(s) = \int_s^t u'_n(x) dx & = & \langle u'_n, 1|_{[s,t]} \rangle \\
 \downarrow \text{basta conv. puntuale} & & \downarrow \\
 u(t) - u(s) = \int_s^t v(x) dx & = & \langle v, 1|_{[s,t]} \rangle \\
 & & \downarrow \\
 & & \text{e basta la convergenza debole}
 \end{array}$$

— o — o —

Oss. Se $u \in L^2$, NON ha senso parlare del suo valore in un punto (potrebbe essere $+\infty$, e se lo cambio non cambio il suo essere L^2). Hanno senso solo gli integrali.

Invece per le funzioni $u \in H^1$ ha senso considerare il valore in un punto, perché abbiamo dimostrato che sono continue.

— o — o —

Back to calcolo delle variazioni

$$F(u) = \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 \arctan(u(x)) dx + \int_0^1 u^2(x) dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \}.$$

Di sicuro esiste $\inf F(u)$ e lo chiamo m . Quindi esiste una successione u_n tale che $F(u_n) \rightarrow m$.

Definitivamente

$$F(u_n) \leq m + 4$$

quindi

$$\int_0^1 |\dot{u}_m(x)|^2 dx \leq u + 4 + \frac{F}{2}$$

$$\int_0^1 |u_m(x)|^2 dx \leq u + 4 + \frac{F}{2}$$

Ma allora a meno di s.succ.

$$u_m \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2((0,1))$$

$$\dot{u}_m \rightarrow v_\infty \quad \text{in } L^2((0,1))$$

Per quanto detto prima $u_m \rightarrow u_\infty$ uniformemente, quindi

$$\int u_m^2 \rightarrow \int u_\infty^2$$

$$\int \arctan(u_m) \rightarrow \int \arctan(u_\infty)$$

$$\int \dot{u}_m^2 = \|\dot{u}_m\|^2 \quad \text{quindi a liminf è } \geq \|v_\infty\|^2$$

Moralmente: u_∞ è il minimo di F . Il problema è che sta solo in H^1 e non in C^1 .

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 17

Titolo nota

04/04/2014

METODO DIRETTO DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

= come dimostrare che il minimo esiste $\min \{F(x) : x \in X\}$
dove $F: X \rightarrow \mathbb{R}$

Speranza: usare un W. generalizzato. Servono 2 cose

- ① Dato una succ. x_n con $F(x_n) \leq M$, allora $\exists$ s.succ. $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$
- ② s.c.i.

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \geq F(x_\infty)$$

[Prendo $m = \inf \{F(x) : x \in X\}$. Allora $\exists x_n$ t.c. $F(x_n) \rightarrow m$.

Allora $F(x_n) \leq m+1$ definitivamente. Allora a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_\infty$. Ma allora

$$m \leq F(x_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = m$$

$\uparrow$ def. out. $\uparrow$ ② $\uparrow$ $F(x_n) \rightarrow m$

quindi $F(x_\infty) = m$]

Così non funziona mai, per via della COPERTA CORTA:

- se ho tante succ. convergenti, è facile avere ① una diff. avere ②
- se ne ho poche, vale il viceversa.

— o — o —

APPROCCIO DEBOLE Voglio fare $\min \{F(x) : x \in X\}$

Trovo un ambiente $\hat{X} \supseteq X$ e trovo $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Richiediamo almeno che ① $\hat{F}(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

Spero che

- ① $\min \{ \hat{F}(x) : x \in \hat{X} \}$ esista
- ② Almeno un p.to di min x_0 di $\hat{F}$ stia in X
- ③ $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$

Se queste 3 cose riescono, allora x_0 è un p.to di minimo per il problema iniziale

Dim.: Prendo un qualunque altro $x \in X$ e ho che

$$F(x) \underset{\textcircled{0}}{\geq} \hat{F}(x) \underset{\textcircled{1}}{\geq} \hat{F}(x_0) \underset{\textcircled{2}}{=} F(x_0)$$

Terminologia : $\rightarrow$ trovare $\hat{F}$ e $\hat{X}$ è la formulazione debole

$\rightarrow$ fare $\textcircled{1}$ è usare W .

$\rightarrow$ fare $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ è REGOLARITÀ

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 \{ [\dot{u}(x)]^2 + \arctan u(x) \} dx$$

$$X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 3, u(2) = 7 \}$$

FORMULAZIONE DEBOLE

Prendo $X = H^1((0,2))$

= funzioni L^2 con derivata debole in L^2

Data $u \in L^2$, sia $\dot{u}$ la sua derivata debole e pongo

$$\hat{F}(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + \arctan u) dx$$

Il punto $\textcircled{0}$ è gratis, cioè $\hat{F}(u) = F(u)$ se $u \in X$

Punto $\textcircled{1}$ Esistenza del minimo in $\hat{X}$. Sostare semicontinuità e compattezza

Compattezza Se $F(u_n) \leq M$, allora u_n ha una s.succ. conv.

Fatto generale Sia u_n una successione in $H^1(a,b)$.
Supponiamo che

$$(i) \quad \|u_n\| \leq M \quad \int_a^b [u_n(x)]^2 \leq M^2 \quad (\text{controllo sulle derivate})$$

(ii) qualcosa che controlli u_n (controllo sulle funzioni)

Allora esiste una sottosuccessione che converge nel senso che

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u_\infty && \text{uniformemente} \\ \dot{u}_{n_k} &\rightarrow \dot{u}_\infty && \text{conv. debole} \end{aligned}$$

Dim. L'altra volta abbiamo visto che

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq \int_s^t |\dot{u}_n(x)| dx \leq |t-s|^{1/2} \|\dot{u}_n\|^{1/2} \leq M |t-s|^{1/2}$$

Quindi l'ipotesi (i) garantisce che le u_n sono equi-Hölder.

Ni servirebbe che

$$|u_n(x)| \leq K \quad \text{per ogni } x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$$

Questo è automatico se per esempio ho una condizione di Dirichlet in un estremo.

Questo per A-A basta per trovare una s.succ. tale che $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ uniformemente.

Vorrei anche che, a meno di ulteriori s.succ., $\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$.

Dal fatto che $\|\dot{u}_n\| \leq M$ segue che $\dot{u}_n \rightharpoonup v$
Resta da vedere che v è la derivata
di u_∞ .
 $\uparrow$
a meno di s.succ.

$$\int \dot{u}_n(x) \phi(x) dx = - \int u_n(x) \dot{\phi}(x) dx \quad \forall \phi \in \dots$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\int v(x) \phi(x) dx = - \int u_\infty(x) \dot{\phi}(x) dx$$

e questo dice che $v(x)$ è la derivata debole di u_∞ .

Nell'esempio, dall'essere $F(u_n) \leq M_1$, voglio dedurre che $\|u_n\| \leq M_2$

$$\int_0^2 u^2 dx = F(u) - \int_0^2 \arctan u dx \leq F(u) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \leq M_1 + \pi$$

Semicontinuità Mi serve che se $u_n \rightarrow u_\infty$ come scritto sopra, allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$$

ci sono due termini

$$\int_0^2 \arctan u_n(x) dx \rightarrow \int_0^2 \arctan u_\infty(x) dx \quad (\text{cielo dopo})$$

$$\int_0^2 [u_n(x)]^2 = \|u_n\|^2 \quad \text{Ma so che } u_n \rightarrow u_\infty$$

e visto che la norma è semicontinua per convergenza debbe

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \geq \|u_\infty\|^2$$

— o — o —

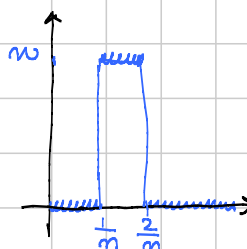
Fatto generale $f_n \rightarrow f_\infty$. Quando posso dire che

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$$

Questo è ① vero e facile se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente

$f_\infty(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_\infty(x) + \varepsilon \quad \forall x \text{ se } n \text{ è grande}$
 integrato ed è finita

② falso in generale se ho solo conv. puntuale, vedi esempio $\rightarrow$



③ vero se ho convergenza puntuale DOMINATA

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \forall x \in \text{zona di integrazione}$$

ed esiste $g(x)$ t.c. $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \text{zona di integr.}$

$$\int g(x) dx \text{ converge}$$

Nell' esempio $|\arctan u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, quindi basta la puntuale essendo dominata

Se ci fosse stato $e^{u_n(x)}$ era uguale perché sappiamo già che $|u_n(x)|$ sono limitate

SSSUP 2014

-

LEZIONE 18

Titolo nota

04/04/2014

Domanda generale

Supponiamo di sapere che $V_n \rightarrow V_\infty$.
Volei dedurre che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(V_n) dx \geq \int_a^b \varphi(V_\infty) dx$$

Risposta: In generale NO, ma SI se φ è convessa

Dim.

Nel caso in cui φ è C^2 avremmo dim. che

$$\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi'(a)b \quad \text{per ogni } a \text{ e } b$$

Ma allora

$$\varphi(V_n(x)) = \varphi \left(\underbrace{V_\infty(x)}_a + \underbrace{V_n(x) - V_\infty(x)}_b \right)$$

$$\geq \varphi(V_\infty(x)) + \varphi'(V_\infty(x)) \cdot (V_n(x) - V_\infty(x))$$

quindi

$$\int \varphi(V_n(x)) dx \geq \int \varphi(V_\infty(x)) dx + \int \varphi'(V_\infty(x)) (V_n(x) - V_\infty(x)) dx$$

e da questo segue il liminf.

$$< \varphi'(V_\infty), V_n - V_\infty >$$

↓ perché basta
0 la debbe

— o — o —

$$\hat{F}(u) = \int_0^2 (u^2 + \arctan u) dx$$

Ora sappiamo che $\hat{F}$ ammette minimo in H^1 . Sia $u_0 \in \hat{X} = H^1$
un p.to di min. Volei dire che $u_0 \in C^1$ e così avrei finito.

Faccio l'analogo dell'Eq. di EULERO

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (\hat{F}(u_0 + tv) - \hat{F}(u_0)) &= \text{ora } u_0 \in H^1 \text{ e } v \in H^1 \\ &= \frac{1}{t} \int_0^2 [(\dot{u}_0 + t \dot{v})^2 + \arctan(u_0 + tv) - \cancel{\dot{u}_0^2} - \arctan u_0] dx \\ &\quad \color{blue}{\dot{u}_0^2 + 2t \dot{u}_0 \dot{v} + t^2 \dot{v}^2} \\ &= 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx + t \int_0^2 \dot{v}^2 dx + \int_0^2 \frac{\arctan(u_0 + tv) - \arctan u_0}{t} dx \end{aligned}$$

$\downarrow$
0

Ponentesi: $\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(u+tv) - f(u)}{t} dx = \int_a^b f'(u) v dx$

$$f(u+tv) - f(u) = \cancel{f(u)} + tv f'(u) + \frac{1}{2} t^2 v^2 f''(\text{qualche parte}) - \cancel{f(u)}$$

Se divido per t resta $v f'(u) + \frac{1}{2} t v^2 f''(\text{qualche parte})$

$\downarrow$
0 $\nearrow$ qui posso usare i passaggi al limite negli integrali

Dato per buona la ponentesi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\hat{F}(u_0 + tv) - \hat{F}(u_0)}{t} = 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx + \int_0^2 \frac{1}{1+u_0^2} v dx$$

Se u_0 è un p.to di minimo, allora il limite deve fare 0, cioè

$$\int_0^2 \left(2 \dot{u}_0 \dot{v} + \frac{1}{1+u_0^2} v \right) dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

Risrivo come

$$\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} dx = - \int_0^2 \frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} v dx$$

$$\int_0^2 w \dot{\phi} dx = - \int_0^2 z \phi dx \quad \begin{array}{l} \text{Dice che } z \text{ è} \\ \text{la derivata} \\ \text{debole di } \dot{u}_0 \end{array}$$

Abbiamo così dimostrato che u_0 ammette derivata debole, la quale è

$$\frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} \quad \text{che sta in } L^2 \quad (\text{sta pure sotto } \frac{1}{2})$$

Quindi $u_0 \in H^1$, quindi è $\frac{1}{2}$ Hölder, quindi continua.

Quindi $u_0 \in C^1$, anzi H^2 e inoltre

$$u_0'' = \frac{1}{2} \frac{1}{1+u_0^2} \quad \text{Uguaglianza tra funzioni in } L^2$$

A questo punto interviene il BOOTSTRAP:

→ u_0 è continua, quindi u_0'' è continua, quindi $u_0 \in C^2$,
quindi $u_0'' \in C^2$, quindi $u_0 \in C^4$ e così via a C^∞ .

Esempio $F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 - u^4) dx \quad u(0) = u(2) = 0$

Formulazione in H^1 , no problem.

È meno immediato da $F(u) \leq M_1$ dedurre $\int_0^2 \dot{u}^2 \leq M_2$

Dico che $\mathcal{D}^1_{\text{suf.}}$ è $-\infty$. Come ci arrivo? Prendo una funzione qualunque, ad esempio $\sin x$ e poi prendo $u(x) = \lambda \sin x$

$$F(u) = \lambda^2 \int_0^2 \cos^2 x dx - \lambda^4 \underbrace{\int_0^2 \sin^4 x dx}_{>0} \rightarrow -\infty \quad \text{per } \lambda \text{ grande}$$

Esempio $F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 dx + \int_0^2 \sin u dx \quad u(0) = u(2)$

Prendo $u(x) \equiv \frac{3\pi}{2}$

Esempio

$$F(u) = \int_0^2 u^2 dx + \int_0^2 e^{-u} dx \quad u(0) = u(2)$$

$\inf = 0$, min. N.E. approx. da u costante altissima

MANCA QUALCOSA CHE LIMITI LE FUNZIONI

Oss. Una condizione di D. basta per limitare le funzioni.
Una condizione del tipo

$$\int_0^2 u^{28}(x) dx \leq M$$

basta per limitare le funzioni?

In generale NO, ma se già sappiamo che $\int_0^2 [u'(x)]^2 dx \leq k$, allora SI.

[Per il teorema della media integrale. Essendo u continua, esiste un punto c in $[0, 2]$ t.c.

$$M \geq \int_0^2 u^{28}(x) dx = 2 \cdot u^{28}(c)$$

Ma allora $u^{28}(c) \leq \frac{M}{2}$.

Questo va bene per limitare u su tutto l'intervallo, indip. da c .

— o — o —

SSSUP 2014 - LEZIONE 19

Titolo nota

11/04/2014

TEOREMA SPETTRALE in $\mathbb{R}^n$ (in generale in dim. FINITA) $V = \text{sp. vett. di dim. finita}$ $\langle v, w \rangle = \text{prodotto scalare in } V \text{ definito positivo } (\langle v, v \rangle > 0 \ \forall v \neq 0)$

Def. Un'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ si dice simmetrica risp. al prodotto scalare se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v \in V, \forall w \in V$$

Se prendo una base ortonormale (esiste per G.S.), allora la matrice A che rappresenta f è simmetrica.

Infatti, detti x e y i vettori delle componenti di v e w deve essere

$$\langle v, w \rangle = x^t y$$

quindi

$$(Ax)^t y = \langle f(w), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = x^t Ay$$

da cui

$$\boxed{x^t A^t y = x^t Ay} \Rightarrow A = A^t \quad \begin{array}{l} \text{(perch\u00e9 prendendo} \\ x = e_i \text{ e } y = e_j \\ \text{abbiamo l'uguaglianza} \\ \text{elemento per elemento)} \end{array}$$

Teorema spettrale Se f \u00e8 un'applicazione simmetrica, allora esiste una base ortonormale $u_1, \dots, u_n$ di autovettori.

In questa base il prodotto scalare \u00e8 rappr. dalla matrice identica e l'applicazione f dalla matrice diagonale A con i λ_i autov. sulla diagonale. \u00c8 una diagonalizzazione simultanea del prod. scalare e della matrice che rappresenta f . Gli autovalori sono REALI.

PASSI DELLA DIMOSTRAZIONE

Fatto 1 Un'applicazione simmetrica ammette almeno un autovettore reale.

Fatto 2 Se $W \subseteq V$ è un s.spazio vettoriale invariante, cioè $f(w) \in W$ per ogni $w \in W$, allora $W^\perp$ è a sua volta invariante, e la restrizione di f a $W^\perp$ è a sua volta simmetrica.

Dati il fatto 1 ed il fatto 2 si procede per induzione sulla dim. di V .

Per il fatto 1, esiste un autovettore λ_1 con corrispondente autovettore v_1 , che posso supporre con $|v_1| = 1$.

Prendo $W = \text{Span}(v_1)$, allora $W^\perp$ è invariante, ha dim. $n-1$ e f su W è simmetrica. Quindi f si diagonalizza su W mediante una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ che aggiunta al precedente completa il discorso.

Dim. fatto 2 Prendo $v \in W^\perp$ e voglio dim. che $f(v) \in W^\perp$, cioè che $\langle f(v), w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$. Ma

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, \underbrace{f(w)}_W \rangle = 0 \quad \text{perché } v \in W^\perp.$$

$\uparrow$
 W perché è invariante

Oss. Qui non abbiamo usato la dimensione finita e la positività.

Dim. fatto 1 Per il teo. fond. dell'algebra esiste almeno un autovettore $\lambda \in \mathbb{C}$ a cui corrisponde un autovettore $v \neq 0$ pure lui complesso. Devo dim. che $\lambda = \bar{\lambda}$.

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, \bar{v} \rangle &= \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle f(v), \bar{v} \rangle = \langle v, f(\bar{v}) \rangle = \langle v, \overline{f(v)} \rangle \\ &= \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

$\uparrow$
coniugato
dell'autovettore

Ora $\langle v, \bar{v} \rangle \neq 0$, quindi semplifico.

Oss. In dim. infinita non c'è immediatamente il polinomio caratteristico.

— o — o —

CARATTERIZZAZIONE VARIAZIONALE DI AUTOVALORI/AUTOVETTORI

Def. Si dice QUOZIENTE DI RAYLEIGH il quoziente

$$Q(v) = \frac{\langle f(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

definito per ogni $v \neq 0$, perché il prod. scalare è def. pos.

Oss. 1 $Q(v)$ è 0-omogeneo, cioè $Q(\lambda v) = Q(v) \quad \forall \lambda \neq 0 \quad \forall v \neq 0$
[banale], quindi è costante sulle rette uscenti dall'origine.

Oss. 2 In dimensione finita $Q(v)$ è continuo

Oss. 3 Sup e inf di $Q(v)$ su $V \setminus \{0\}$ coincidono con sup/inf di $Q(v)$ sulla sfera $S = \{v \in V : |v| = 1\}$

[Facile perché la sfera intercetta tutte le semirette uscenti dall'origine]

Oss. 4 Sup e inf sono in realtà Max / min, perché coincidono Max / min sulla sfera, che esistono per Weierstrass.

Oss. 5 Max e min di $Q(v)$ su $V \setminus \{0\}$ coincidono con Max e min di $Q(v)$ su S , che a sua volta coincidono con Max e min di $\langle f(v), v \rangle$ su S , che posso provare a calcolare con i moltiplicatori di Lagrange

Potrei $G(v) = \langle f(v), v \rangle$ e $\Phi(v) = \langle v, v \rangle$
devo cercare i pti v in cui

$$\nabla G(v) = \lambda \nabla \Phi(v)$$

Ora $\nabla \phi(u) = 2u$ (*)

$\nabla G(u) = 2f(u)$ (**)

Per cui la relazione dei moltiplicatori diventa $\lambda f(u) = \lambda \lambda u$,
cioè $f(u) = \lambda u$, quindi i candidati p.ti di max/min sono
gli autovettori e $G(u) = \lambda \langle u, u \rangle = \lambda$, quindi

Max/min di $G(u) = \text{Max/min di } Q(u) = \text{Max/min autovalore}$
di f

Quindi almeno un autovalore (anzi quasi 2) esiste.

(*) $\phi(u+R) = \phi(u) + \langle \nabla \phi(u), R \rangle + o(|R|)$

$\phi(u+R) = |u+R|^2 = |u|^2 + 2\langle u, R \rangle + |R|^2$

(**) $G(u+R) = \langle f(u+R), u+R \rangle = \langle f(u) + f(R), u+R \rangle$

$= \langle f(u), u \rangle + \langle f(u), R \rangle + \langle f(R), u \rangle + \langle f(R), R \rangle$

$= \langle f(u), u \rangle + 2\langle f(u), R \rangle + \langle f(R), R \rangle$

$= G(u) + \langle \nabla G(u), R \rangle + o(|R|)$

Teorema

- Max e min di $Q(u)$ in $V \setminus \{0\}$ esistono
- coincidono con il max/min autovalore
- i p.ti di max/min sono i corrispondenti autovettori.

— o — o —

SSSUP 2014

-

LEZIONE 20

Titolo nota

11/04/2014

Quoziente di Rayleigh $Q(u) = \frac{\langle f(u), u \rangle}{\langle u, u \rangle}$

Oss. 1 Una volta che max/min esistono su $V \setminus \{0\}$, posso cercare i p.ti stazionari imponendo $\nabla Q(u) = 0$. Ora

$$\nabla Q(u) = \frac{2f(u)\langle u, u \rangle - 2u\langle f(u), u \rangle}{\langle u, u \rangle^2}$$

Questo è uguale a 0 se e solo se $f(u)\langle u, u \rangle = u\langle f(u), u \rangle$
cioè se e solo se

$$f(u) = \frac{\langle f(u), u \rangle}{\langle u, u \rangle} u \quad f(u) = \lambda u$$

Numero

Oss. 2 Se prendo $|\langle f(u), u \rangle|$, allora esistono max/min di lui su

$$B = \{u \in V : |u| \leq 1\}$$

↑ tutta la palla

e min = 0 e max viene realizzato sul bordo (essendo una funzione 2-omogenea, cioè $|\langle f(\lambda u), \lambda u \rangle| = \lambda^2 |\langle f(u), u \rangle|$)
e quindi coincide con il max di $|Q(u)|$ sulla sfera,
e questo è max $|\lambda|$ con λ autovalore.

— 0 — 0 —

IN DIMENSIONE INFINITA L'ambiente è uno sp. di Hilbert H .

Sia data $f: H \rightarrow H$ lineare e simmetrica

$$\langle f(u), w \rangle = \langle u, f(w) \rangle \quad \forall u \in H, \forall w \in H$$

Def. Una funzione $f: H \rightarrow H$ (anche non lineare e non simm.) si dice COMPATTA se per ogni successione $\{v_n\} \subseteq H$ LIMITATA esiste una sottosuccessione v_{n_k} b.c. $v_{n_k} \xrightarrow{\text{DEBOLE}} v_\infty$ e $f(v_{n_k}) \xrightarrow{\text{FORTE}} f(v_\infty)$

Teorema spettrale in dim. infinita

Sia H un Hilbert separabile, e sia $f: H \rightarrow H$ lineare, simmetrica e compatta. Allora H ammette una base Hilbertiana $\{v_n\}$ costituita da autovettori di f , cioè $f(v_n) = \lambda_n v_n$.

Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Dim. Il problema iniziale è trovare almeno un autovettore

Fatto 1 Esiste almeno un autovettore.

Considero la funzione $R(v) = |\langle f(v), v \rangle|$ e dico che esiste il max di R in B .

Prendiamo una successione $\{v_n\} \subseteq B$ tale che $R(v_n) \rightarrow M$. Allora v_n ha una s.succ. v_{n_k} conv. debolmente, che continuo a chiamare v_n . Quindi $v_n \xrightarrow{\text{sup}} v_\infty$

$$\begin{array}{ccccccc} R(v_n) = |\langle f(v_n), v_n \rangle| & \longrightarrow & |\langle f(v_\infty), v_\infty \rangle| = R(v_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \uparrow & \text{sono una forte +} & \\ M & & f(v_\infty) & v_\infty & & \text{una debole} & \end{array}$$

Quindi $R(v_\infty) = M$, quindi esiste il max.

Ora ci sono 2 casi

Se Max $\neq 0$, allora non è raggiunto nell'origine, ma allora è il max di $|Q(v)|$, il quale è preso in un autovettore, perché posso fare come nell'Oss. 1 senza Lagrange

Se $\text{Max} = 0$, allora $\langle f(v), v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$ e questo non basta per concludere che $f(v) \equiv 0$ (rotazione di 90°), però è vero se è simmetrica. Per dimostrarlo si usa l'identità

$$\langle f(v), w \rangle = \frac{1}{4} (\langle f(v+w), v+w \rangle - \langle f(v-w), v-w \rangle)$$

$\uparrow$ si usa la simmetria $\parallel$ $\parallel$

Ma allora $\langle f(v), w \rangle = 0$ per ogni $w \in H$ e ponendo $w = f(v)$ ho garantito che $f(v) = 0$.

In questo caso f è l'applicazione nulla e si diagonalizza facilmente.

Fatto 2 Procediamo come in dim. finita induttivamente.

- v_1 = autovettore trovato dal fatto 1
- $W = \text{Span}(v_1)$, f è simm. su $W^\perp$ che è invariante, quindi trovo v_2
- $W = \text{Span}(v_1, v_2)$ e in $W^\perp$ trovo $v_3 \dots$ e così via.

Se finisco in un numero finito di passaggi vuol dire che sono in dim. finita.

Altrimenti ottengo una succ. infinita di autovettori ortonormali $v_1, \dots, v_n, \dots$ tali che

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

Fatto 3 $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$ e così via

Banale perché sono ottenuti come max su palle dello stesso raggio ma in sottospazi sempre più piccoli.

Fatto 4 $|\lambda_n| \rightarrow 0$. Se non lo facessero, sarebbero maggiori di un certo $\epsilon > 0$.

Considero $\{v_n\}$ succ. limitata. Per l'ipotesi di compattezza le immagini $f(v_n)$ dovrebbero avere una succ. convergente fortemente. Ma $f(v_n) = \lambda_n v_n$ ed essendo ortogonali la distanza tra 2

qualunque di questi è $\geq 2\sqrt{2}$ (dimostrazione per bene con Pitagora)

Fatto 5 Prendo $W = \{v \in H : \langle v, e_n \rangle = 0 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$

Se $W = \{0\}$ allora ho finito.

Supponiamo che $W \neq \{0\}$. Se ora calcolo

$$\max \{ |\langle f(w), v \rangle| : \|v\| \leq 1 \text{ e } v \in W \}$$

ottergo per forza 0, dovendo essere minore di tutti i λ_i precedenti che tendono a 0.

Ma allora $W = \ker f$

Fatto 6 Quindi non mi resta che aggiungere ai $\{v_n\}$ una base Hilbertiana di $\ker f$ (saranno quindi autovettori) e ho concluso.

— o — o —

SSSUP 2014 — LEZIONE 21

Titolo nota

09/05/2014

SERIE DI FOURIER

Teorema spettrale Sia H sp. di Hilbert separabile. Sia $A: H \rightarrow H$ un'applicazione lineare simmetrica ($\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ per ogni x, y in H) e compatta (se $x_n \rightarrow x_\infty$ debole, allora $Ax_n \rightarrow Ax_\infty$ forte, eventualmente a meno di sottosuccessioni).

Allora esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$ di H fatta da autovettori di A , cioè

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Nelle applicazioni $H = L^2((a, b))$ con $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Esempio classico di appl. lineare compatta: primitiva

$$(Af)(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall f \in L^2((a, b))$$

Ad ogni $f \in L^2$, l'applicazione associa la primitiva che fa 0 in a . Ovviamente Af è una funzione di $L^2((a, b))$, anzi una funzione continua.

È ovvio che A è lineare.

È facile vedere che A è compatto. Sia infatti $\{f_n\}$ una succ. di funzioni che converge debolmente, cioè $f_n \rightarrow f_\infty$.

Siano F_n e F_∞ le primitive con $F_n(a) = F_\infty(a) = 0$. Dico che $F_n \rightarrow F_\infty$. Vediamo intanto che $F_n(x) \rightarrow F_\infty(x)$ per ogni x . Infatti

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^b f_n(t) \cdot g(t) dt = \langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f_\infty, g \rangle = F_\infty(x)$$

dove



D'altra parte, si può rendere più quantitativo il discorso

$$F_\infty(x) - F_n(x) = \int_a^x (f_\infty(t) - f_n(t)) dt = \int_a^b (f_\infty(t) - f_n(t)) g(t) dt$$

e quindi

$$= \langle f_\infty - f_n, g \rangle$$

$$|F_\infty(x) - F_n(x)| = |\langle f_\infty - f_n, g \rangle| \leq \|f_\infty - f_n\| \cdot \|g\|$$

c.s.

non so che questo
tende a 0.

$$|F_n(x)| = \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| = |\langle f_n, g \rangle| \leq \|f_n\| \cdot \|g\|$$

c.s.

$$\leq K \cdot |b-a|^{1/2}$$

perché $\|f_n\|$ sono
equilimitate

Quindi le funzioni $F_n(x)$ sono equicontinue ed equilimitate, dunque per il solito A.A. convergono, a meno di sottosuccessioni, a qualcosa. La convergenza data da A.A. è uniforme, quindi il limite è per forza F_∞ , al quale sappiamo che c'è cov. puntuale.

— o — o —

Oss. La primitiva è lineare, compatta, ma non simmetrica...
Infatti mi servirebbe

$$\int_a^b F(x) g(x) dx = \langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle = \int_a^b f(x) G(x) dx$$

e questa è una integrazione per parti con segno sbagliato e senza termine di bordo, quindi è facile trovare un controesempio.

— o — o —

Esempio vero $Af =$ fare 2 volte la primitiva di f con due condizioni al bordo

$$f(x) \rightsquigarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) \rightsquigarrow \int_a^x F(t) dt = \hat{F}(x)$$

↑
la "doppia primitiva"

Tutte le altre "doppie primitive" sono del tipo $\hat{F}(x) + C_1 x + C_2$.
La $\hat{F}(x)$ ha condizioni

$$\hat{F}(a) = 0 \text{ e } \hat{F}'(a) = 0$$

A questo punto possiamo scegliere tra varie condizioni

- | | |
|------------|--|
| (1) D-D | $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$ |
| (2) Cauchy | $\hat{F}(a) = \hat{F}'(a) = 0$ (stessa cosa in b) |
| (3) N-N | $\hat{F}'(a) = \hat{F}(b) = 0$ |
| (4) D-N | $\hat{F}(a) = 0$ $\hat{F}'(b) = 0$ (stessa se scambio a, b) |
| (5) P | $\hat{F}(a) = \hat{F}(b)$ e $\hat{F}'(a) = \hat{F}'(b)$ |

Occhio: le condizioni omogenee ($=0$) garantiscono che si tratta di una applic. lineare.

Si tratta di applicazioni simmetriche?

$$\langle Af, g \rangle \stackrel{?}{=} \langle f, Ag \rangle$$

$$\begin{aligned} \int_a^b \hat{F}(x) g(x) dx &= - \int_a^b F(x) G(x) dx + [\hat{F}(x) G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x) \hat{G}(x) dx \oplus [F(x) \hat{G}(x)]_a^b + \\ &= \langle f, Ag \rangle \oplus \hat{F}(b) G(b) \ominus \hat{F}(a) G(a) + \\ &\quad + F(b) \hat{G}(b) - F(a) \hat{G}(a) \end{aligned}$$

seguì conetti dopo video

Quando si annullano i termini di bordo?

SI : D-D, N-N, D-N, P

NO : Cauchy,

Quindi nei 4 casi si abbiamo un'appl. lin. simm. e compatta.

Perché compatta? Se $f_n \rightarrow f_\infty$, allora $F_n \rightarrow F_\infty$ unif. (a meno di sottosucc.), quindi $\hat{F}_n \rightarrow \hat{F}_\infty$ unif. (dunque in L^2 forte).

Vediamo se si riesce a realizzare la "doppia primitiva" con le condizioni imposte. Sia $\hat{F}$ quella Cauchy (prodotta dagli integrali)

$$\begin{aligned} \text{(D-D)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + c_2 &= 0 \\ \hat{F}(b) + c_1 b + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a c_1 + c_2 &= 0 \\ b c_1 + c_2 &= -\hat{F}(b) \end{aligned}$$

$b \neq a$, quindi insolubile

$$\begin{aligned} \text{(D-N)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + c_2 &= 0 \\ \hat{F}'(b) + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\leadsto$ trovo c_1 $\nearrow$ trovo c_2

$$\begin{aligned} \text{(N-N)} \quad \hat{F}'(a) + c_1 &= 0 \\ \hat{F}'(b) + c_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\leadsto c_1 = 0 \leadsto$ risolubile se e solo se

$$0 = \hat{F}'(b) = F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

Conseguenza: (N-N) risolubile se e solo se f ha media nulla.

$$\text{(Periodico)} \quad \hat{F}(a) + c_1 a + c_2 = \hat{F}(b) + c_1 b + c_2 \leadsto c_1 \text{ si trova}$$

$$\hat{F}'(a) + c_1 = \hat{F}'(b) + c_1$$

0

0

— 0 — 0 —

quindi f deve essere a media nulla

Riassumendo:

- (D-D) e (D-N) vanno sempre bene
- Cauchy non dà applicazione simmetrica
- (P) e (N-N) richiedono che f sia a media nulla

e richiedono una ulteriore condizione per dare un'applicazione ben definita. Questa condizione è che il risultato abbia media nulla

Conclusione

- ① Nei casi (D-D) e (D-N) o (N-D) la doppia primitiva definisce una appl. lin. e simmetrica e compatta

$$A: L^2(a,b) \rightarrow L^2(a,b)$$

- ② Nei casi (N-N) e (P) ho la stessa cosa, ma

$$A: L^2_{m=0}(a,b) \rightarrow L^2_{m=0}(a,b)$$

↑
funzioni L^2 a media nulla

Senza imporre la media nulla in anticipo per determinare c_2 .

— o — o —

SSSUP 2014

-

LEZIONE 22

Titolo nota

10/05/2014

(D-D) $Af =$ doppia primitiva con $\hat{F}(a) = \hat{F}(b) = 0$

Dal teorema spettrale sappiamo che esiste una base Hilbertiana formata da funzioni con $\hat{F} = \lambda f$, cioè autovettori.

Mi piacerebbe avere della regolarità in modo da fare 2 derivate a dx e sx. Però f è solo L^2 . Guadagno regolarità con bootstrap.

$f \in L^2 \rightsquigarrow F \in C^0$ (anzi $\frac{1}{2}$ -Hölder) $\rightsquigarrow \hat{F} \in C^1 \rightsquigarrow f = \frac{1}{\lambda} \hat{F} \in C^1$
 $\rightsquigarrow F \in C^2 \rightsquigarrow \hat{F} \in C^3$ e così via. Quindi è tutto C^∞ .

Allora derivo 2 volte e ottengo $(\hat{F})'' = \lambda f''$, cioè

$f = \lambda f''$, cioè $f'' = \frac{1}{\lambda} f$. Chi sono le possibili f ?

Per semplicità supponiamo $(a,b) = (0, M)$

• Se $\lambda > 0$ le soluzioni sono del tipo $f(x) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x}$

Impongo (D-D) e ottengo $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} M} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} M} = 0$

Questo sistema ha solo la sol. banale $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$ niente autovettori.

• Se $\lambda < 0$ le sol. sono del tipo $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right)$

Impongo (D-D) e ottengo $c_1 = 0$, $c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M\right) = 0$

Quindi esiste una soluz. $\neq 0$ se e solo se $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M\right) = 0$,

cioè se e solo se $\frac{M}{\sqrt{-\lambda}} = n\pi$, cioè se e solo se

$$\frac{M}{n\pi} = \sqrt{-\lambda}, \text{ cioè } \boxed{\lambda = -\frac{M^2}{n^2\pi^2}}$$

Quindi gli autovettori di A sono del tipo $-\frac{M^2}{n^2\pi^2}$ (e infatti tendono a 0), e i corrispondenti autovettori, cioè la base, sono del tipo

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{M} x\right)$$

Oss. Nel caso $M=\pi$ gli autovettori sono del tipo $\sin(mx)$
 $\quad \quad \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$

(D-N) Come prima mi riduco a $f'' = \frac{1}{x} f$ ora con (D-N)

• se $\lambda > 0$ $f(x) = c_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x} + c_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x}$

$$(D) \quad c_1 + c_2 = 0 \quad (N) \quad \frac{c_1}{\sqrt{\lambda}} e^{\dots} - \frac{c_2}{\sqrt{\lambda}} e^{\dots} = 0$$

e non ha soluzione

• se $\lambda < 0$ $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x\right)$

$$(D) \quad c_1 = 0 \quad (N) \quad c_1 \cdot \text{roba} + c_2 \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} M\right) = 0$$

$\quad \quad \quad \text{0}$

Quindi per avere soluzioni non nulla serve e basta

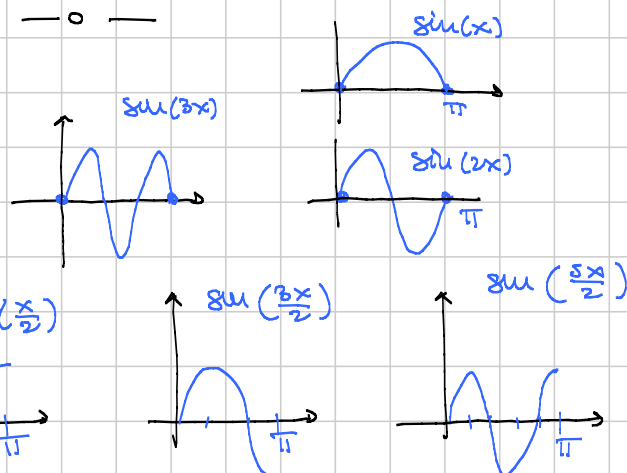
$$\cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{M}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2} (2m+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2M}{\pi} \frac{1}{(2m+1)} = \sqrt{-\lambda} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4M^2}{\pi^2} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

e gli autovettori sono $\sin\left(\frac{\pi}{2M} (2m+1) x\right)$

Nel caso $M = \pi$ resta $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$

Disegno Nel caso (D-D)



Nel caso (D-N)

Ossipio Quelli scritti sono ortogonali, ma non ortonormali, quindi serve normalizzarli
Perché sono ortogonali?

- Motivo colto: sono autovettori di autovalori distinti
- Motivo terra-terra: analisi 1, ad esempio

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0 \quad \text{se } m \neq n$$

↓
si calcola con formule product to sum $\frac{1}{2}(\cos(\dots) \pm \cos(\dots))$

Il fatto che siano basi Hilbertiane ci dice, per esempio, che ogni $f \in L^2((0, \pi))$ si scrive in modo unico come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \quad (\text{Uso base di tipo D-D})$$

oppure come

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

Come trovo i coefficienti? Facendo i prodotti scalari!
Nel 1° caso:

$$\begin{aligned}\langle f(x), \sin(mx) \rangle &= a_n \langle \sin(mx), \sin(mx) \rangle \\ &= a_n \int_0^\pi \sin^2(mx) dx \quad mx=y \quad m dx=dy \\ &= a_n \int_0^{m\pi} \sin^2(y) \frac{1}{m} dy = a_n \frac{1}{m} \frac{m\pi}{2}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(mx) dx$$

(P) Ancora una volta devo risolvere $f'' = \frac{1}{\lambda} f$
con condizioni al bordo periodiche

• $\lambda > 0$ nessuna soluzione: verificare

• $\lambda < 0$ $f(x) = c_1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{-\lambda}}\right)$

$$f(0) = f(M) : c_1 = c_1 \cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

$$f'(0) = f'(M) : \frac{c_2}{\sqrt{-\lambda}} = -\frac{c_1}{\sqrt{-\lambda}} \sin\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right) + \frac{c_2}{\sqrt{-\lambda}} \cos\left(\frac{M}{\sqrt{-\lambda}}\right)$$

Se impongo che il determinante sia = 0, trovo le soluzioni del tipo

$$\cos\left(\frac{2\pi}{M} mx\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{M} mx\right) \quad \text{con autovalori} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{4\pi^2}{M^2} m^2$$

Nel caso $M = 2\pi$ ottengo $\cos(mx)$ e $\sin(mx)$
(nota che questi hanno media nulla su $(0, M)$)

Conseguenza: ogni funzione in $L^2((0, 2\pi))$ si scrive in modo unico come

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

a_0 è la media della funzione

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$\langle f(x), \cos(nx) \rangle = a_n \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle$$

$$= a_n \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = a_n \int_0^{2n\pi} \cos^2(y) \frac{1}{n} dy$$

$$= a_n \cdot \frac{1}{n} \cdot n\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

— 0 — 0 —

Per ogni funzione $f \in L^2((a, b))$ abbiamo 4 possibili sviluppi in Serie di Fourier, a seconda del set di condizioni al bordo prescelto (D-D, D-N, N-N, P).

Le serie convergono (ad oggi) solo in L^2 .

SSSUP 2014 - LEZIONE 23

Titolo nota

16/05/2014

Serie di Fourier di 4 tipi

- ① (D-D) $\sin(mx)$ $[0, \pi]$ $\sin\left(\frac{\pi}{M}mx\right)$ $[0, M]$
- ② (N-N) $\cos(mx)$ $[0, \pi]$ $\cos\left(\frac{\pi}{M}mx\right)$ $[0, M]$
- ③ (D-N) $\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)$ $[0, \pi]$ $\sin\left(\frac{\pi}{M}\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right)$ $[0, M]$
- ④ (P) $\sin(mx)$ e $\cos(mx)$ $[0, 2\pi]$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{M}mx\right) \text{ e } \cos\left(\frac{2\pi}{M}mx\right) \quad [0, M]$$

Tutte queste 4 sono basi ORTOGONALI di L^2 (intervallo) e anche basi Hilbertiane (autovettori della "doppia primitiva" con le cond. al bordo)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \underbrace{f_k(x)}_{\text{autofunzioni}}$$

dove i coeff. sono dati da

$$a_k := \int_{\text{Int.}} f(x) \cdot f_k(x) dx \cdot \frac{1}{\int_{\text{Int.}} f_k(x)^2 dx}$$

Domanda: in che senso converge la serie? Dette $S_m(x)$ le somme parziali, in che senso $S_m(x) \rightarrow f(x)$.

Prima risposta: nel senso L^2 del termine, cioè

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{\text{Int.}} |f(x) - S_m(x)|^2 dx}_{|f_m - f|^2} = 0$$

Vediamo qualcosa di più puntuale.

Brutta notizia: può succedere che $f(x)$ è continua, ma in qualche punto $S_n(x) \not\rightarrow f(x)$.

Quindi la continuità non assicura la conv. puntuale

Bella notizia: sia $f(x)$ di classe C^1 a tratti, cioè l'intervallo è suddiviso in sotto int. in cui $f(x)$ è C^1 . In particolare c'è al più un # finito di punti di discontinuità, e in ciascuno di essi $f(x)$ e $f'(x)$ hanno il limite da dx e da sx (magari diversi).

Estendo $f(x)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità (così si conserva il C^1 a tratti).

Allora valgono 2 teoremi.



Teorema 1 (convergenza puntuale) Per ogni f come sopra si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$$

$\uparrow$ limite destro $\uparrow$ limite sinistro

In particolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = f(x)$ in tutti i pts x in cui f è continua

Teorema 2 (convergenza uniforme) Per ogni f come sopra e continua la convergenza è uniforme.

Es. $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$, ripetuta poi con periodicità, è una funzione per cui vale il teorema 2.

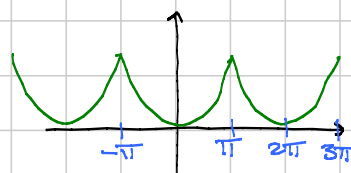
Esercizio Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$,
ripetuta con periodicità. La sviluppiamo
come serie di Fourier di tipo (P)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)}$$

Questi non ci sono perché
 f è pari: vedi formula per i
coefficienti



$$a_0 = \frac{\langle f(x), 1 \rangle}{|1|^2} =$$

$$\langle f(x), 1 \rangle = a_0 \langle 1, 1 \rangle + \text{tutti } 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{\langle f(x), \cos(kx) \rangle}{|\cos(kx)|^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx =$$

$$\left[\frac{2}{k} x^2 \sin(kx) + \frac{4}{k^2} x \cos(kx) - \frac{4}{k^3} \sin(kx) \right]_0^{\pi} = \frac{4}{k^2} \pi (-1)^k$$

$$F(x) = a x^2 \sin(kx) + b x \cos(kx) + c \sin(kx)$$

$$F'(x) = \underline{2a x \sin(kx)} + \underline{ka x^2 \cos(kx)} + b \cos(kx) - \underline{kb x \sin(kx)} + kc \cos(kx)$$

$$ka = 2$$

$$2a = kb$$

$$b = -kc$$

$$a = \frac{2}{k}$$

$$b = \frac{2}{k} a = \frac{4}{k^2}$$

$$c = -\frac{b}{k} = -\frac{4}{k^3}$$

$$\begin{aligned}
 |\cos(kx)|^2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kx)^2 dx & y=kx & \quad dy=k dx \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(kx)^2 dx = 2 \int_0^{k\pi/2} \cos(y)^2 \frac{1}{k} dy \\
 &= 2 \frac{1}{k} \int_0^{k\pi/2} \cos(y)^2 dy = \frac{2}{k} \cdot \frac{k\pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

Da questi conti, se sono giusti, si ottiene

$$a_k = \frac{4}{k^2} \pi (-1)^k \cdot \frac{1}{\pi} = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

Di conseguenza

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pongo $x = \pi$ e ottengo

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

da cui

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

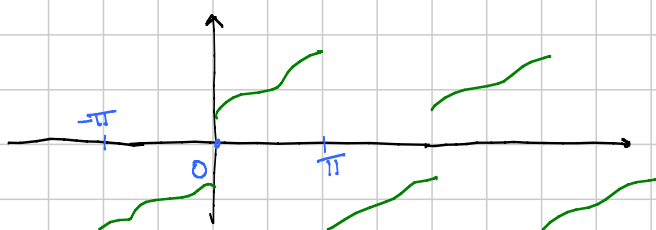
Osservazione Allo stesso modo si ottengono formule per $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ dove a è intero pari.

Esercizio Dimostrare che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{91}$ ↑ se non sbaglio

Rapporti tra serie di tipo ①, ②, ③, ④

① vs ④
 $\uparrow$
 $D \rightarrow D$ $\uparrow$
 P

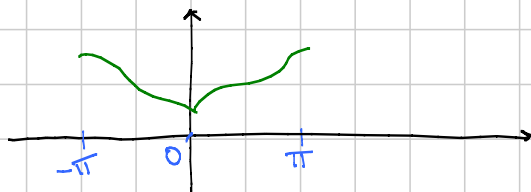
Sia $f(x)$ su $[0, \pi]$ $\rightsquigarrow$ posso sviluppare di tipo ①
 $\rightsquigarrow$ posso estendere a $[-\pi, \pi]$
 per disparità e sviluppare di
 tipo ④



lo sviluppo di tipo ④ sarà
 di soli seni perché è
 dispari e i coeff. sono gli
 stessi (vedere la formula
 e semplificare un 2)

Quindi: serie di tipo ① = serie di tipo ④ per l'estensione dispari

Analogamente: serie di tipo ② = serie di tipo ④ per l'estensione pari



e ripeto per periodicità

Per il tipo ③ faccio

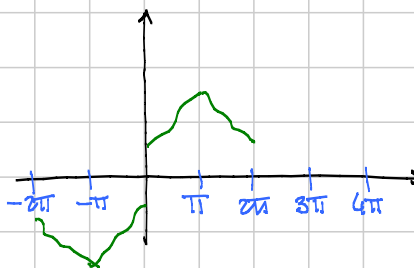
→ prima estensione su $[\pi, 2\pi]$

per "parità",

→ poi estensione per disparità

a $[-2\pi, 2\pi]$

→ infine sviluppo come funzione 4π periodica che quindi avrà
 su $(n \frac{\pi}{2})$. Si vede poi che restano solo i termini con
 n dispari (fare il conto)



Conseguenza: posso applicare Teo 1 e Teo 2 anche ai tipi ①, ②, ③,
 tenendo conto delle discontinuità create dall'estensione

SSSUP 2014 - LEZIONE 24

Titolo nota

16/05/2014

Domanda: se conosco la serie di Fourier di $f(x)$, come è fatta la s.d.F. di $f'(x)$.

Prendiamo il tipo ④ in $[0, 2\pi]$, quindi

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Brutalmente $f'(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(kx)$

Sotto opportune ipotesi, questa è vera

$$a_k = \frac{1}{\underbrace{|\cos(kx)|^2}_{\text{norma}}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{2\pi} f'(x) \frac{1}{k} \sin(kx) dx + \underbrace{\left[f(x) \frac{1}{k} \sin(kx) \right]_0^{2\pi}}_{=0} \\ &= - \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^{2\pi} f'(x) \sin(kx) dx}_{\text{coeff. di } \sin(kx) \text{ nello sviluppo di } f'(x)} \end{aligned}$$

Questo giustifica quanto ottenuto sopra.

OSSERVAZIONE Per fare il passaggio di sopra basta sapere che $f \in H^1(0, 2\pi)$

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx = (\text{circa}) \sum (a_k^2 + b_k^2)$$

↑
la base è solo ortogonale, quindi c'è una costante di differenza

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \text{circa } \sum (k^2 a_k^2 + k^2 b_k^2)$$

MORALE Data una base Hilbertiana costituita da una delle 4 serie di F. si ha

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^1 \Leftrightarrow \sum k^2 a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^{27} \Leftrightarrow \sum k^{54} a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^\pi \Leftrightarrow \sum k^{2\pi} a_k^2 < +\infty$$

Calcolo delle variazioni in 2 variabili $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$)

$$\min \left\{ \underbrace{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + (u(x) - \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \text{Data}}})^2 dx}_{F(u)} \right\}$$

Solite cose

$$\frac{1}{t} (F(u+tv) - F(u)) = \frac{1}{t} \int_{\Omega} |\nabla u + t \nabla v|^2 + ((u+tv) - f)^2 - F(u)$$

$$= \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{|\nabla u|^2} + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \cancel{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}$$

$$+ \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{u^2 + t^2 v^2 + f^2 - 2uf} - 2tvf + 2tuv \, dx$$

$$- \frac{1}{t} \int_{\Omega} \cancel{u^2 + f^2 - 2uf}$$

$$= 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx - 2 \int_{\Omega} f v + 2 \int_{\Omega} u v + \underbrace{t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + v^2}_{\downarrow 0}$$

La prima forma dell'eq. di Eulero è

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_{\Omega} (u - f) v dx$$

1^a forma dell'eq. di Eulero

Come integro $\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx$ per ponti?

Gauss-Green !!!

$$(G-G-1) \quad \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx$$

↑
normale esterna
a Ω

(G-G-2: teorema della divergenza) Dato vettore $\vec{G}$ si ha

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{G} dx = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{G}, \vec{n} \rangle ds$$



(G-G-1) $\Rightarrow$ (G-G-2) basta prendere $f \equiv 1$

(G-G-2) $\Rightarrow$ (G-G-1) basta prendere $\vec{G} = f \vec{E}$. Allora

$$\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div} (f \vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

—o—o—

Usando (G-G-1)

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle = \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle ds - \int_{\Omega} v \operatorname{div} (\nabla u)$$

$\langle \vec{E}, \nabla f \rangle$ $f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle$

Ora $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, quindi

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = - \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\partial\Omega} v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle ds$$

Questo si annulla, per esempio,
se $v \equiv 0$ su $\partial\Omega$

Quindi nel caso Dirichlet, il termine di bordo se ne va e resta

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v dx$$

2^a forma dell'eq.
di Eulero

Lemma DBR $\Rightarrow -\Delta u + u - f = 0$, cioè

$$\Delta u = u - f$$

eq. di Eulero in forma
diff.

Dove una volta c'erano le derivate seconde, ora c'è il Laplaciano.

Non è più un'eq. diff. ordinaria (derivata parziale risp. ad una variabile), ma è un'eq. diff. alle DERIVATE PARZIALI (PDE)

$$u_{xx} + u_{yy} = u - f \quad \text{con eventualmente } D : u(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) \in \partial\Omega$$

Se all'inizio non avessi messo cond. al bordo, usavo comunque le v nulle al bordo per mandare via il termine di bordo e ottenere

$$\Delta u = u - f.$$

Poi tornando in Eulero ottengo

$$\int_{\Omega} \underbrace{(-\Delta u + u - f)}_0 v dx = \pm \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\langle \nabla u, \vec{n} \rangle}_{\text{deve essere 0}} ds$$

per l'Eq. di Eulero ricavata
con v nulle al bordo

$$\Rightarrow \langle \nabla u, \vec{n} \rangle = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

↑
deriv. dir.

Conclusione: la condizione di Neumann in più variabili diventa

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Condizioni miste: se impongo D solo su un pezzo di $\partial\Omega$,
trovo N sul resto del bordo di Ω .

— o — o —

SSSUP 2014 — LEZIONE 25

Titolo nota

20/05/2014

Serie di Fourier in più dimensioni

Insieme un rettangolo (quadrato) in $\mathbb{R}^2$: $[0, \pi] \times [0, \pi]$
 $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

Cerco autovalori ed autovettori (autofunzioni) del Laplaciano, o meglio dell'operatore che inverte il Laplaciano

Data $f \rightsquigarrow \Delta u = f$ + condizioni al bordo (D, N, P, mixed)

Dico che autofunzioni sul quadrato sono prodotti di autofunzioni su un intervallo, quindi robe del tipo

$$u_{n,m}(x) = \sin(nx) \sin(my) \quad (\text{caso D})$$

$$\Delta u_{n,m}(x) = (u_{n,m})_{xx} + (u_{n,m})_{yy}$$

$$= -n^2 u_{n,m} - m^2 u_{n,m} = -(n^2 + m^2) u_{n,m}(x, y)$$

quindi l'autore è corrispondente è $-(n^2 + m^2)$ se pensato come autor. del Laplaciano, o meglio $-\frac{1}{n^2 + m^2}$ come autor. dell'inverso.

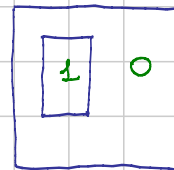
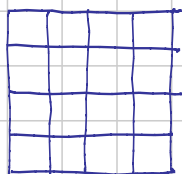
Questo non esclude che ce ne siano altri (in realtà non ci sono). Dimostro che ogni funzione $u \in L^2$ (quadrato) si scrive nella forma

$$\sum_{n,m} a_{n,m} u_{n,m}(x, y)$$

o meglio dimostro che quelle somme sono dense, cioè ogni funzione in L^2 (quadrato) si approssima in norma L^2 con una somma finita di quelle.

Dim. Idea fondamentale: basta saper approssimare le funzioni del tipo.

Infatti, se so bene quelle, so bene tutte le funzioni costanti a scacchiera
(valori diversi in caselle diverse)
e con queste a sua volta approssimo tutto



Secondo passo: ogni funzione 0/1 come sopra è prodotto di una funzione della sola x per una funzione della sola y , le quali sono del tipo 0/1.

Ora le prime e le seconde si approx con comb. lineari di $\sin(mx)$ e $\sin(my)$ le seconde (serie di F. in una variabile).

Moltiplicando ottengo la tesi (e così nascos i termini misti).

— o — o —

ALGORITHM JPEG → vedi WIKI in inglese

Immagine: $n \times m$ pixel. In ogni pixel ci sono 3 numeri (RGB)

→ 3 matrici $n \times m$ (ogni el. è intero da 0 a 255)

Facciamo finta che sia 1 sola matrice $n \times m$ ($B-N$)

1° passo: si divide la matrice in sottomatrici 8×8 .

Problema → comprimere matrici 8×8 .

Strategie di compressione:

- trasmettere 1 casella su 4
- passare da scala 0-255 a scala 0-15
- cercare di meglio

Matrici $8 \times 8 =$ sp. vett. di dim 64.

La base canonica è data dalle 64 matrici con un 1 e gli altri 0.

Idea: cercare una base migliore

Si cercano matrici i cui elementi sono del tipo

$$\cos\left(\frac{\pi}{16} m (2k+1)\right) \cos\left(\frac{\pi}{16} n (2l+1)\right) = a_{n,k}$$

$a_{n,k}$ è l'elemento di posizione (n,k) in una delle matrici della nuova base. Gli indici m ed n descrivono la base, come gli $u_{m,n}$ di prima.

È un po' come sul quadrato considerare le funzioni del tipo

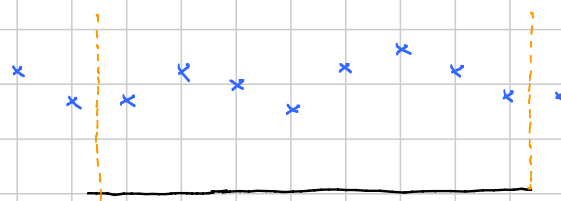
$$\cos(nx) \cos(my)$$

Sul quadrato x e y variano da 0 a lato quadrato.

Nella matrice (quadrato discreto) n e k variano da 0 a 7,
 — 0 — 0 —

Questi coseni sono gli autovettori dell'analogo discreto della derivata seconda

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)$$



Derivata 1ª $\leadsto u_{n+1} - u_n$

Derivata 2ª $\leadsto u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$ $\leftarrow$ problemi negli estremi

Brutalmente $\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor}}}{=} f''(x)$

si risolvono
estendendo il vettore
"riflettendo" agli
estremi

Scoperta: i vettori del tipo $\cos\left(\frac{\pi}{16} m (2k+1)\right)$ sono autovettori della
derivata 2ª discreta $k=0, \dots, 7$

Questo arriva dalle formule trigonometriche

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k &= \cos(\alpha(2k+3)) + \cos(\alpha(2k-1)) - 2\cos(\alpha(2k+1)) \\
 &= 2\cos(\alpha(2k+1))\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha(2k+1)) \\
 &= \underbrace{(2\cos\alpha - 2)}_{\text{autovalore}} u_k
 \end{aligned}$$

Esercizio Dimostrare direttamente che sono una base ortogonale.

Laplaciano discreto definito sulle matrici

$$\begin{array}{c}
 \bullet \\
 \bullet \quad u_{k,q} \quad \bullet \\
 \bullet
 \end{array}$$

$$u_{k,q} \rightarrow u_{k+1,q} + u_{k-1,q} + u_{k,q+1} + u_{k,q-1} - 4u_{k,q}$$

SSSUP 2014

-

LEZIONE 26

Titolo nota

20/05/2014

PROBLEMI DI EVOLUZIONE

↪ Equazioni alle derivate parziali

- Equazione del calore
- Equazione delle onde

EQUAZIONE DEL CALORE

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad t \geq 0$$

$$x \in [0,1]$$

$[0,1]$ è una sbarretta, ad esempio metallica

$u(x,t)$ = temperatura nel p.to x della sbarra al tempo t
 (stessa cosa con $u(x,y,z,t)$ e $(x,y,z) \in \text{insieme di } \mathbb{R}^3$)

$$u_t = u_{xx}$$

Equazione

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

Condizione iniziale: dare il valore
 di u per $t=0$ ↑
tutti i valori

$$u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0 \quad \leftarrow$$

Condizioni al bordo (qui di tipo D,
 ma potrebbero essere N o P o miste)

- Problema :
- ① Equazione
 - ② Condizioni al bordo
 - ③ Condizioni iniziali

In più dimensioni spaziali

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(x,t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

temperatura del cocconero Ω tenuto in
 frigo a 0° .

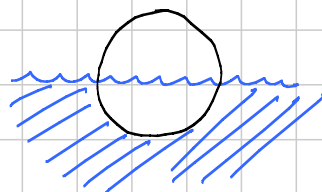
Cocomero semi-immerso in acqua

$$u_t = \Delta u$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \leftarrow \text{temp. iniziale}$$

$$u(x, t) = \text{temp. acqua} \quad t \geq 0, x \in \text{bordo sommerso}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0 \quad \text{sul bordo emerso (dove non impongo cond., nasce N')}$$



EQUAZIONE DELLE ONDE

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{posizione iniziale}$$

$$u_t(0, x) = u_1(x) \quad \text{velocità iniziale}$$

$$u(0, t) = u(1, t) \quad \text{condiz. D al bordo}$$

Trattazione matematica

L'incognita SAREBBE una funzione $u(x, t)$ di 2 variabili.

Invece conviene vederla come una funzione della sola t che ad ogni $t \geq 0$ associa una funzione della variabile x

$$u: \underbrace{[0, +\infty)}_{\text{tempi}} \longrightarrow \underbrace{X}_{\substack{\uparrow \text{spazio di funzioni della} \\ \text{variabile } x \text{ (su un intervallo, un cubo, ...)}}}$$

EQUAZIONE DEL CALORE

Cerco la soluzione come $u: [0, +\infty) \rightarrow L^2(0, 1)$

Per ogni $t \geq 0$, scrivo la serie di Fourier di $u(t)$, scegliendo quella con le condizioni al bordo che ho.

Esempio

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Dirichlet $\leadsto$ serie con $\sin(mx)$

coeff. al tempo t

Posso scrivere
$$u(t, x) = [u(t)](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{u_k(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. al tempo } t}} \sin(kx)$$

Si spera che accada che

$$u_t(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t) \sin(kx)$$

$$u_{xx}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2) u_k(t) \sin(kx)$$

Le due serie devono essere uguali, ma allora i coeff. devono essere uguali, da cui

$$u_k'(t) = -k^2 u_k(t) \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

MORALE: una PDE (eq. deriv. parziali) è diventata una successione di ODE (eq. diff. ordinarie)

Qual è la condizione iniziale delle ODE? Deve succedere che

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin(kx) = u_0(x)$$

Quindi $u_k(0)$ = coeff. dello sviluppo in serie di Fourier di $u_0(x)$.
Se scriviamo

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin(kx)$$

allora $u_k(0) = u_{0k} \quad \text{per ogni } k \geq 1$

da cui $u_k(t) = u_{0k} e^{-k^2 t}$ e quindi

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Formula per la soluzione della PDE

coeff. della cond. iniz.

Le cond. al bordo hanno det. il tipo di serie di F. utilizzata.

Esempio
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \leftarrow \text{in frigo a } 0 \text{ gradi} \\ u(x,0) = 1 \quad \leftarrow \text{temp. } 1 \text{ all'inizio} \end{cases}$$

Come risolvo? ① Scrivo 1 in serie di soli seni

② Uso la formula

①
$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin(kx)$$

$$u_{0k} = \frac{\langle 1, \sin(kx) \rangle}{\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle}$$

$$\langle 1, \sin(kx) \rangle = \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{1}{k} \int_0^{k\pi} \sin(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{2}{k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\langle \sin(kx), \sin(kx) \rangle = \frac{\pi}{2}$$

Quindi
$$u_{0k} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

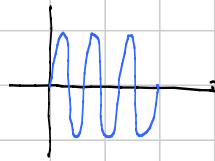
$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

Quindi la sol. dell'eq. del calore è

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(e^{-t} \sin x + \frac{1}{3} e^{-9t} \sin(3x) + \frac{1}{5} e^{-25t} \sin(5x) + \dots \right) \end{aligned}$$

Dal p.to di vista pratico: le componenti più alte vengono abbattute molto più in fretta, quindi una somma parziale è una buona approx della sol.

Brutale: le componenti più elevate, corrispondono ad autofunzioni molto oscillanti



← caldo e freddo a
contatto ravvicinato
⇒ si annullano a
vicenda in fretta.

SSSUP 2014

—

LEZIONE 27

Titolo nota

23/05/2014

Eq. del calore

$$u_t = u_{xx} \quad x \in [0,1], t \geq 0 \quad \text{PDE}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{Dato iniziale}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{Dato al bordo (D in questo caso)}$$

Prendo $e_k(x)$ la serie di Fourier con le cond. al bordo date.

Cerco una soluzione del tipo

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) e_k(x) \quad u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k0} e_k(x)$$

$$u_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \underbrace{(-\lambda_k)}_{\text{numeri negativi}} e_k(x)$$

Uguagliando i coeff. otteniamo

$$u'_k(t) = -\lambda_k u_k(t) \quad u_k(0) = u_{k0}$$

da cui $u_k(t) = u_{k0} e^{-\lambda_k t}$ e quindi

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k0} e^{-\lambda_k t} e_k(x)$$

REGOLARITÀ

A priori le somme di serie di F. è nota in L^2 , ma qui vorremmo di meglio, cioè l'esistenza di u_t e u_{xx} , o per lo meno la continuità per dare un senso alle condizioni al bordo.

Per l'eq. del calore c'è l'effetto regolarizzante: anche se $u_0(x)$ è solo L^2 , per tutti i tempi $t > 0$ la funzione $x \rightarrow u(x,t)$ è molto regolare, addirittura C^∞ nell'intervallo

Prendiamo l'esempio Dirichlet nell'intervallo $[0, \pi]$ in modo che $e_k(x) = \sin(kx)$ e quindi $\lambda_k = -k^2$. Allora

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Cosa posso dire di u_{0k} ? $\|u_0(x)\|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$ se il dato iniziale $u_0(x) \in L^2(0, \pi)$

Ma allora $u_{0k} \rightarrow 0$ perché la serie converge, quindi u_{0k} è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$|u_{0k}| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esaminiamo la convergenza totale della serie a t fissato

[Fatto generale: sia $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni definite in $[a, b]$

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} \sup \{|f_k(x)| : x \in [a, b]\} < +\infty$. Allora la serie di numeri

serie iniziale converge uniformemente. In particolare, se tutte le $f_k(x)$ sono continue, anche la somma della serie è continua.]

$$\begin{aligned} \text{Calcolo } \sup_{x \in [0, \pi]} |u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kt)| &\leq \sup |u_{0k}| \cdot e^{-k^2 t} \cdot 1 \\ &\leq M e^{-k^2 t} \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{x \in [0, \pi]} \dots \leq M \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} < +\infty \text{ alla grande}$$

Quindi a t fissato la serie converge unif., dunque il limite è continuo
 ↑
 somma della serie

Per conquistare la derivabilità, faccio la stessa cosa con la serie delle derivate.

[Fatto generale: sia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ una serie di funzioni in $[a,b]$

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$ converga uniformemente ad una certa $g(x)$.

Allora $f(x)$ è derivabile e $f'(x) = g(x)$]

Per dimostrare che $\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kt)$, fissato $t > 0$, è una

funzione C^1 nella variabile x , basta dim. la convergenza unif. della serie delle derivate, quindi di

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e^{-k^2 t} k \cos(kx)$$

Per dim. la convergenza uniforme, dim. la conv. totale, cioè faccio

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |u_{0k} e^{-k^2 t} k \cos(kx)| \leq |u_{0k}| \cdot k e^{-k^2 t} \leq M k e^{-k^2 t}$$

$$\text{Quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \sup \dots \leq M \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-k^2 t} < +\infty$$

quindi c'è conv. unif. e quindi la somma è C^1 in $[0, \pi]$.

Procedendo per induzione si dimostra che la somma è C^∞ in $[0, \pi]$, non appena $t > 0$.

Per ottenere regolarità rispetto al tempo bisogna fare conti analoghi, ma rispetto alla variabile t .

Nota bene: il $(-k^2)$ che scende derivando una volta rispetto a t è lo stesso che scende derivando 2 volte rispetto ad x ($u_t = u_{xx}$)

IRREVERSIBILITÀ L'equazione del calore si risolve benissimo in AVANTI ($t \geq 0$), ma malissimo INDIETRO ($t \leq 0$).

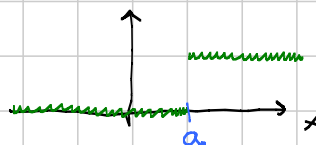
Infatti la formula è la stessa $\sum u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kt)$
 ↑ per tempi $t < 0$ rende la convergenza molto problematica

Morale: posso risolvere per $t < 0$ solo se i coeff. u_{0k} del dato per $t=0$ sono molto decadenti, del tipo $u_{0k} \sim e^{-k^3}$, cioè solo se il dato iniziale è estremamente regolare.

BORDER LINE Posso risolvere l'eq. del calore per $t \geq 0$ anche con dati iniziali pessimi, stile Deltte di Dirac,

Folklore: $\delta_a(x) =$ "funzione" che vale 0 ovunque tranne in a dove vale $+\infty$ ed il suo integrale vale 1.

La sua primitiva si capisce



Quindi la δ è la derivata di una funzione che non è derivabile in senso classico, MA la primitiva ha una serie di Fourier normale

$$\sum u_{0k} \sin(kx)$$

Allora la sua derivata, cioè la δ , avrà serie

$$\sum k u_{0k} \cos(kx)$$

Il "problema" è che la serie non converge, ma se la uso come dato iniziale per il calore ottengo

$$\sum_k u_0 e^{-k^2 t} \cos(kx)$$

e questa per $t > 0$ converge senza problemi per via di $e^{-k^2 t}$.

MORALE Consideriamo serie del tipo

$$f = \sum a_k e_k(x)$$

$$f \in L^2 \Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^1 \Leftrightarrow \sum k^2 a_k^2 < +\infty$$

$$f \in H^{28} \Leftrightarrow \sum k^{56} a_k^2 < +\infty$$

$\vdots$

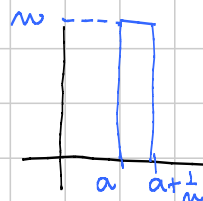
$$f \in H^{-1} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^2} a_k^2 < +\infty \quad \leftarrow \delta \text{ sta in questo spazio}$$

$$f \in H^{-2} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{k^4} a_k^2 < +\infty$$

Questi spazi $H^{-\infty}$ sono gli spazi delle distribuzioni di ordine n ,
cioè moralmente derivate n -esime di funzioni L^2 .

Tutti questi "oggetti" vanno bene come dati iniziali per l'eq.
del calore.

La delta si può vedere come limite di
cose del tipo



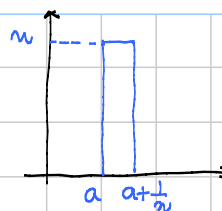
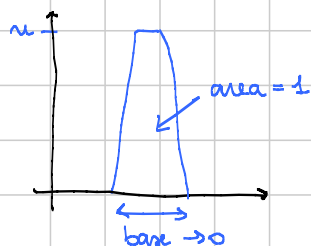
SSSUP 2014 — LEZIONE 28

Titolo nota

23/05/2014

Delta di Dirac Limite di

ma anche limite di "trapezi"



La sua derivata è limite di oggetti

"Due dette opposte
enormi nello stesso
punto"Cosa fa (supponiamo $a \in (0,1)$)

$$\int_0^1 f(x) \delta_a(x) dx = f(a) \quad \text{se } f \text{ è continua}$$

$$= \int_a^{a+1/n} n f(x) dx = f(a)$$

$\sim f(a)$

$$\int_0^1 f(x) \delta'_a(x) dx \stackrel{\text{per parti}}{=} - \int_0^1 f'(x) \delta_a(x) dx = -f'(a)$$

$\uparrow$ derivata di $\delta_a(x)$

GRADIENT FLOWPrendo una soluzione di $u_t = u_{xx}$ con D
al bordo

$$E(t) = \text{energia} = \int_0^\pi u^2(x,t) dx = \text{quadrato della norma } L^2 \text{ della soluzione al tempo } t$$

Calcolo $E'(t)$

$$\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^\pi u^2(x,t) dx \\
&= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t} u^2(x,t) dx \\
&= 2 \int_0^\pi u(x,t) u_t(x,t) dx \\
&= 2 \int_0^\pi u(x,t) u_{xx}(x,t) dx \quad \text{integrazione per parti} \\
&= -2 \int_0^\pi u_x^2(x,t) dx + 2 \underbrace{[u(x,t) u_x(x,t)]_0^\pi}_{=0 \text{ per motivi diversi nei casi D, N, P}} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Questo ci dice che l'energia decresce lungo le soluzioni, cioè al crescere di t .

— o — o —

$$F(t) = \int_0^\pi u(x,t) dx = \text{calore totale della sbarretta}$$

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \int_0^\pi u_t(x,t) dx = \int_0^\pi u_{xx}(x,t) dx \\
&= [u_x(x,t)]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= u_x(\pi, t) - u_x(0, t)
\end{aligned}$$

Nel caso Neumann o nel caso periodico si ottiene $F'(t) = 0$, cioè $F(t) = \text{costante}$.

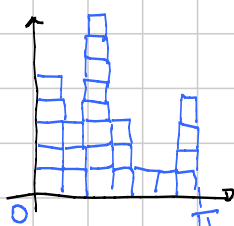
Fisicamente

- condizioni N = non esce calore dal bordo
- condizioni P = quello che esce da un estremo rientra dall'altro

Nel caso Dirichlet non si può dire nulla su $F'(t)$. In questo caso il calore può entrare o uscire dal bordo
 — o — o —

Interpretazione statistica dell'eq. del calore.

Pensiamo al dato iniziale $u_0(x)$ come una distribuzione di casse uguali. Ogni funzione si appross in questo modo per di usare



dati piccoli.

- Ad ogni passo temporale, per ogni cassa tiro a sorte se spostarla di una posit a dx o sx
- continuo in questo modo e ottengo nuove funzioni ai tempi $t_1, 2t_1, 3t_1, 4t_1, 5t_1$

Se gioco bene il passo spaziale e quello temporale, quello che ottengo è la soluzione dell'eq. del calore

Le condizioni al bordo intervengono per le casse al bordo

- Neumann: le casse al bordo non posso uscire, quindi il numero di casse resta costante
- Dirichlet: le casse al bordo possono uscire, una una volta fuori vengono eliminate.
 — o — o —

Domanda: come risolvo l'eq. del calore se al bordo ho condizioni di D. non nulle?

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in [0, \pi] \text{ e } t \geq 0 \\ u(0, t) = 3, \quad u(\pi, t) = 5 \\ \text{dato iniziale} \end{cases}$$

Tutti i discorsi fatti con le serie di Fourier richiedono operatore lineare, simmetrico, compatto... che richiede dati nulli.

- Oss. ① le funzioni $u(x,t) \equiv \text{costante}$ risolvono l'eq. del calore
 ② le funzioni $u(x,t) = ax+b$ risolvono pure

Nell'esempio mi basta trovare una retta che vale 3 in 0 e 5 in π

$$3 + \frac{2}{\pi} x \quad \text{e pone} \quad v(x,t) = u(x,t) - 3 - \frac{2}{\pi} x$$

Allora $v_t = u_t = u_{xx} = v_{xx}$

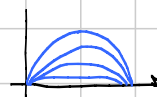
Quindi mi basta risolvere $v_t = v_{xx}$ con $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$
 e la corrispondente cond. iniziale

$$v(x,0) = u(x,0) - 3 - \frac{2}{\pi} x = u_0(x) - 3 - \frac{2}{\pi} x.$$

In generale: se ho condizioni di D. o di N. non omogenee
 (tranne nel caso di due Neumann diverse) posso
 sempre aggiustare con una retta opportuna,
 — o —

Altre soluzioni speciali Su un intervallo solo quelle del tipo

$$u(x,t) = \sin(kx) e^{-k^2 t}$$



Come si dimostra che tutte le soluzioni tendono a 0?

Si sfruttano gli esponenziali $e^{-k^2 t}$

$$\left| \sum u_{0k} e^{-k^2 t} \sin(kx) \right| \leq \sum |u_{0k}| e^{-k^2 t} \leq M \sum e^{-k^2 t}$$

È vero che la somma di una serie di funzioni che tendono a 0
 tende a sua volta a 0? In generale no, ma sì se la convergenza
 è uniforme, e in questo caso lo è !!

Perché nel caso N. tendono ad una costante? Perché il primo termine
 della serie è $\cos(0x)$ e quello ha davanti e^{-0t}

SSSUP 2014 - LEZIONE 29

Titolo nota

26/05/2014

EQUAZIONE DELLE ONDE

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Dimensione $n=1$

$$u_{tt} = \Delta u$$

Dimensione $n \geq 2$

Due approcci ↗ Equazione su tutto $\mathbb{R}$ ($x \in \mathbb{R}$)
 ↘ Equazione in un intervallo ($x \in [a, b]$)
 In questo caso ci sono le condizioni al bordo

Ci sono sempre 2 condizioni iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$ *posizione*
 $u_t(x, 0) = u_1(x)$ *velocità*

Più in generale l'eq. si scrive nella forma $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
 $u_{tt} = c^2 \Delta u$

dove $c > 0$ è un parametro.

Eq. su tutto $\mathbb{R}$ Dato trovare una sol. del tipo $u(x, t)$.

Cerco invece una soluzione del tipo

$$u(x, t) = v(\underbrace{x+ct}_{\xi}, \underbrace{x-ct}_{\eta})$$

per una opportuna funzione $v(\xi, \eta)$. Vediamo cosa deve succedere.

$$u_x(x, t) = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{\xi}(x+ct, x-ct) + v_{\eta}(\dots, \dots)$$

$$u_{xx}(x, t) = v_{\xi\xi} \xi_x + v_{\xi\eta} \eta_x + v_{\eta\xi} \xi_x + v_{\eta\eta} \eta_x = \boxed{v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2v_{\xi\eta} = u_{xx}}$$

$$u_t = v_{\xi} \xi_t + v_{\eta} \eta_t = c v_{\xi} - c v_{\eta} = c(v_{\xi} - v_{\eta})$$

$$u_{tt} = c(v_{\xi\xi} \xi_t + v_{\xi\eta} \eta_t - v_{\eta\xi} \xi_t - v_{\eta\eta} \eta_t)$$

$$= c^2 v_{\xi\xi} - 2c^2 v_{\xi\eta} + c^2 v_{\eta\eta}$$

$$\boxed{u_{tt} = c^2(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - 2v_{\xi\eta})}$$

Se impongo che $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ trovo $\boxed{v_{\xi\eta} = 0}$

Riassumendo: se $v(\xi, \eta)$ risolve $v_{\xi\eta} = 0$, allora
 $u(x, t) = u(x+ct, x-ct)$ risolve $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

Ora le soluzioni di $v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$\boxed{v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)}$$

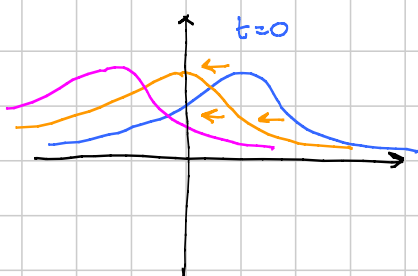
Dim. Se $(v_{\xi})_{\eta} = 0 \Rightarrow v_{\xi}(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \Rightarrow v = \underbrace{f(\xi)}_{\text{primitiva di } \varphi} + g(\eta)$

Conclusione Le soluzioni dell'eq. delle onde su tutto $\mathbb{R}$ sono del tipo

$$\boxed{u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct)}$$

per una opportuna scelta di f e g .

Come è fatta $f(x+ct)$?



È una TRAVELING WAVE: il profilo è sempre lo stesso, e trasla a sx man mano che il tempo cresce con velocità c .

Analogamente: $g(x-ct)$ è una traveling wave che va verso dx con velocità c .

Quindi su tutto $\mathbb{R}$ ogni soluzione dell'eq. delle onde è la sovrapposizione di 2 traveling waves.

Per determinare f e g , uso le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) : f(x) + g(x) = u_0(x)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) : c f'(x) - c g'(x) = u_1(x)$$

piccolo dubbio: una
quale primitiva?

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{c} u_1(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} u_1(x) \right) \quad g(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} u_1(x) \right)$$

quindi la soluzione, in funzione dei dati iniziali, è

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x+ct) + \frac{1}{c} u_1(x+ct)) + \frac{1}{2} (u_0(x-ct) - \frac{1}{c} u_1(x-ct))$$

$$= \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} [u_1(x+ct) - u_1(x-ct)]$$

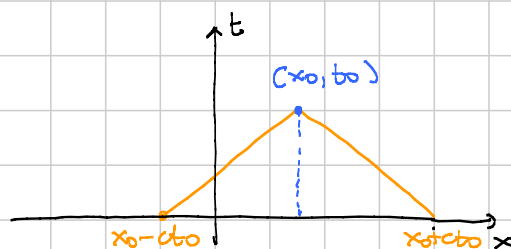
$$= \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

Formula finale per la soluzione

Questo ci dice che il
costo non dipendeva
dalla scelta della
primitiva.

DOMINIO DI DIPENDENZA

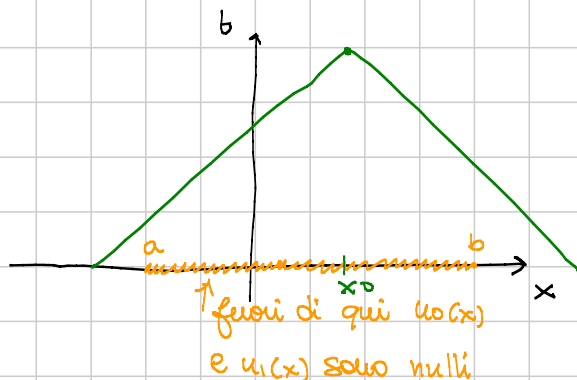
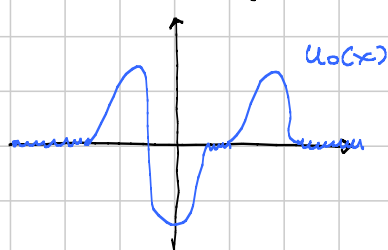
Da cosa dipende il valore di u
nel punto (x_0, t_0) ?



- ① Di $u_0(x)$ contiamo solo i valori che aveva in $x_0 + ct_0$ e $x_0 - ct_0$
- ② Di $u_1(x)$ contiamo i valori nell'intero intervallo $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$

Tutto il resto di $u_0(x)$ ed $u_1(x)$ non conta nulla, perché "non fa tempo" ad arrivare in x_0 al tempo t_0 .

Supponiamo che i dati iniziali abbiano supporto compatto, cioè che siano nulli al di fuori di un intervallo



Fissato un qualunque punto x_0 , pur di prendere t abbastanza grande, si ha che

$$\frac{1}{2} [u_0(x_0+ct) + u_0(x_0-ct)] = 0 + 0 = 0$$

L'altro termine dà come contributo

$$\frac{1}{2c} \int_{x_0-ct}^{x_0+ct} u_1(s) ds = \frac{1}{2c} \int_a^b u_1(s) ds \quad \text{perché } [x_0-ct, x_0+ct] \text{ copre tutto } [a, b]$$

In particolare, se fosse $u_1(x) \equiv 0$, allora dopo un po' $u(x_0, t) = 0$, cioè l'onda è passata e x_0 torna in quiete.

In dimensione $n > 1$ ci sono formule analoghe, ma più complicate. Comunque, il valore di $u(x_0, t_0)$ dipende solo dai valori

di $u_0(x)$ e $u_1(x)$ nella palla con centro in x_0 e raggio ct_0 . C'è una differenza tra dim. PARI e DISPARI:

→ in dim. PARI la dipendenza è da tutta la palla

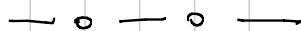
→ in dim. DISPARI la dipendenza è solo dalla superficie della palla

Praticamente, in 3 variabili, se in Q ci sono le casse, lui sta in P sente quello che è stato prodotto di Q ad un tempo precedente t.c.

$$c \Delta t = PQ$$



In dimensione 2, se lancio un sasso in Q , la perturbazione prima o poi arriva in P e non se ne va più, cioè resta sempre una traccia.



SSSUP 2014 — LEZIONE 30

Titolo nota

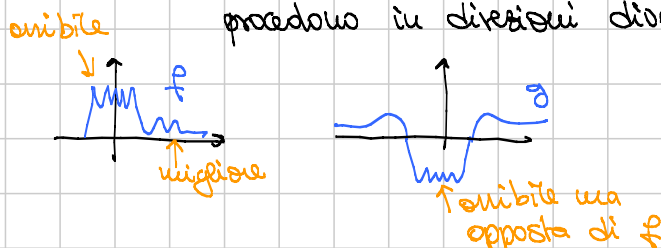
26/05/2014

Osservazioni sulla formula risolutiva per l'eq. delle onde in $\mathbb{R}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

- ① Peggiorito: è vero che per $t > 0$ la soluzione è molto più regolare di $u_0(x)$ ed $u_1(x)$? NO: basta pensare ad una traveling wave, che non migliora risp. al dato iniziale. Rispetto ad u_1 c'è un po' di miglioramento: se $u_0 \in C^{27}$ e $u_1 \in C^{26}$, la soluzione risulta C^{27} (u_0 non migliora, u_1 migliora di 1 livello)

- ② Peggioramento: per $t > 0$ la soluzione può peggiorare rispetto ad u_0 . Basta pensare a 2 traveling waves con 2 tratti onibili opposti che si compensano per $t=0$ e poi procedono in direzioni diverse



- ③ Soluzioni in un senso molto border line

$$u_{tt} = u_{xx}$$

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

Anche se f e g sono per esempio solo continue posso comunque dire che è una soluzione, anche se non in senso classico

Esercizio L'equazione del calore in $\mathbb{R}$ ammette delle traveling waves?

$u_t = u_{xx}$ Una traveling wave sarebbe una soluzione del tipo
 $u(x,t) = f(x+ct)$

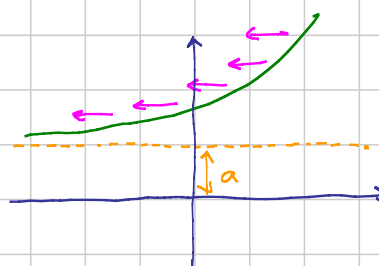
$$u_t(x,t) = c f'(x+ct) \quad u_x(x,t) = f'(x+ct) \quad u_{xx}(x,t) = f''(x+ct)$$

Quindi otteniamo $c f'(x+ct) = f''(x+ct)$, cioè $f'' = c f'$.
 le soluzioni di questa sono

$$f(y) = a + b e^{cy}$$

da cui

$$u(x,t) = a + b e^{c(x+ct)}$$



Eq. delle onde su un intervallo

$$u_{tt} = u_{xx}$$

PDE

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u_t(x,0) = u_1(x)$$

} cond.
iniziali

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

Dirichlet
(oppure N, P,
D-N)

Queste si trattano con le serie di Fourier relative
 a quelle condizioni al bordo

$\{e_n(x)\}$ base Hilbertiana

$$[e_n(x)]_{xx} = -\lambda_n^2 e_n(x)$$

↑ autovalori

Cerco $u(t,x)$ del tipo

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) e_k(x)$$

$$u_{tt}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k''(t) e_k(x)$$

$$u_{xx}(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) (-\lambda_k)^2 e_k(x)$$

Uguagliando i coeff. trovo

$$u_k''(t) = -\lambda_k^2 u_k(t)$$

Questa ha come sol. $u_k(t) = a_k \cos(\lambda_k t) + b_k \sin(\lambda_k t)$

dove a_k e b_k dipendono dalle condizioni iniziali

$$u_k(0) = u_{0k}$$

$$u'_k(0) = u_{1k}$$

dove $u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} e_k(x)$

↑
comp. di F
di $u_0(x)$

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k} e_k(x)$$

↑
comp. di F
di $u_1(x)$

Ricaviamo a_k e b_k

$$a_k = u_{0k}$$

$$\leftarrow u_k(0) = u_{0k}$$

$$\lambda_k b_k = u_{1k}$$

$$\leftarrow u'_k(0) = u_{1k}$$

$$a_k = u_{0k}$$

$$b_k = \frac{u_{1k}}{\lambda_k}$$

In conclusione

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_{0k} \cos(\lambda_k t) + \frac{u_{1k}}{\lambda_k} \sin(\lambda_k t) \right) e_k(x)$$

↑
a loro volta
 $\sin(kx) / \cos(kx)$

Domanda principale: ma la serie converge? e in quale senso converge?

A) sono 2 pezzi

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k} \cos(\lambda_k t) \cdot e_k(x)$$

Fatto gen. $\sum a_k e_k$ conv.
 $\Leftrightarrow \sum a_k^2 < +\infty$

In questo caso la serie converge in H , che poi è L^2 se e solo se

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$$

Ora sappiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}^2 < +\infty$ (sono i coeff. di $u_0(x)$), quindi no problem per ogni $t \geq 0$ e anche per ogni $t \in \mathbb{R}$

Per l'altro termine, mi serve la convergenza di

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_{1k}^2}{\lambda_k^2} \sin^2(\lambda_k t)$$

Ora $\sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}^2 < +\infty$ (sono i coeff. di $u_1(x)$), quindi no problem per ogni $t \geq 0$ e ogni $t \in \mathbb{R}$ (i λ_k aiutano)

REVERSIBILITÀ L'eq. delle onde si può risolvere indifferente per $t \geq 0$ e per $t \leq 0$. Non solo:

→ risolvere per tempi $t \leq 0$ con dati iniziali $u_0(x)$ e $u_1(x)$ è come risolvere per $t \geq 0$ con dati iniziali $u_0(x)$ e $-u_1(x)$.

Osservazione Se voglio che la serie nell'espressione di $u(x,t)$ converga, basta che

$$\rightarrow \sum u_{0k}^2 < +\infty \quad \text{cioè} \quad u_0 \in L^2((a,b))$$

$$\rightarrow \sum \frac{u_{1k}^2}{\lambda_k^2} < +\infty \quad \text{cioè} \quad u_1 \in H^1((a,b)) \quad \left(\text{se } u_1(x) \text{ basta chiedere un livello di regolarità in meno risp. ad } u_0(x) \right)$$

Di solito le scelte classiche sono $u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$. Queste garantiscono che la serie di $u(x,t)$ converge e anche la serie di $u_t(x,t)$ converge.

$$u_t(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{-\lambda_k u_{0k} \sin(\lambda_k t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{converge se } \sum \lambda_k^2 u_{0k}^2 < +\infty \\ \text{cioè } u_0 \in H^1}} + \underbrace{\lambda_k \frac{u_{1k}}{\lambda_k} \cos(\lambda_k t)}_{\substack{\downarrow \\ \text{converge se } \sum u_{1k}^2 < +\infty \\ \text{cioè se } u_1 \in L^2}} \right) e_k(x)$$

IDENTITÀ DELL'ENERGIA

Per una sol. dell'eq. delle onde
con dato $u_0 \in H^1$ e $u_1 \in L^2$ si ha

$$\int_a^b [u_t(x,t)]^2 dx + \int_a^b [u_x(x,t)]^2 dx = \text{costante}$$

↑ ↑
 energia cinetica energia elastica

Chiamiamo $E(t)$ la somma dei 2 termini. Allora

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \int_a^b 2u_t u_{tt} + \int_a^b 2u_x u_{xt} \\
 &= 2 \int_a^b u_t \underbrace{u_{tt}}_{\text{derivata}} dx + 2 \left[u_x u_t \right]_a^b - 2 \int_a^b \underbrace{u_{xx}}_{\text{integrando}} u_t dx \\
 &\quad \text{uguali} \\
 &= 2 [u_x(b,t) u_t(b,t) - u_x(a,t) u_t(a,t)]
 \end{aligned}$$

Se al bordo ho Neumann, le due u_x sono 0 e viene 0.
Negli estremi in cui ho Dirichlet, anche non omogeneo, cioè
del tipo $u(a,t) = \text{costante}$, si annullano i termini con u_t .
Analogo nel periodico.

In ogni caso $E'(t) = 0$.

Questo è l'analogo di $\dot{u}^2 + u^2 = \text{costante}$ per eq. del tipo
 $\ddot{u} = -u$

