

Strumento 2: teoremi di confronto, sopra soluzioni, sottosoluzioni

Supponiamo di avere 2 problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v' = g(t, v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Teorema (di confronto) Supponiamo che

- $f(t, u) > g(t, u)$ dove è definita
- $u_0 > v_0$

Allora $u(t) > v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per cui le 2 soluzioni sono definite.

Dim. Occhio a non dire che $u'(t) - v'(t) = f(t, u(t)) - g(t, v(t)) > 0$ perché f e g non sono calcolate nello stesso punto.

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$. Se $w(t) > 0$ per t per cui è definita, allora ok. Altrimenti esiste almeno un $t > 0$ per cui $w(t) \leq 0$.

Considero allora

$$S := \inf \{ t > 0 : w(t) \leq 0 \}.$$

S è l'inf. di un insieme non vuoto.

Per continuità si vede bene che $w(S) = 0$ e

$w(t) > 0$ per ogni $t \in [0, S)$.

Calcolo in 2 modi $w'(S)$.

1° modo. Usando le equazioni differenziali ottengo che

$$w'(S) = u'(S) - v'(S) = f(t, u(S)) - g(t, v(S)) > 0$$

$u(S)$ perché $w(S) = 0$

essendo f e g calcolate nello stesso punto, posso usare l'ipotesi $f > g$.



2° modo. Utilizzando i rapporti incrementali da sx:

$$w'(s) = \lim_{R \rightarrow 0^-} \frac{w(s+R) - w(s)}{R}$$

La frazione è sempre < 0 ,
quindi il limite è ≤ 0

In un modo viene $w'(s) > 0$, in un modo viene $w'(s) \leq 0$, il che è assurdo.

— 〇 — 〇 —

SOPRA SOLUZIONI E SOTTO SOLUZIONI Consideriamo un'eq. $y' = f(t, y)$

Def. Una soprasoluzione (stretta) è una funzione $v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$v'(t) > f(t, v(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Una sottosoluzione (stretta) ---

$$v'(t) < p(t, v(t)).$$

Teorema (confronto tra soprasoluzioni e sottosoluzioni della stessa equazione)

Siano u e v una sopra ed una sottosoluzione, cioè

$$u'(t) > f(t, u(t)) \quad v'(t) < f(t, v(t))$$

per ogni t per cui sono definite.

Se $u(0) > v(0)$, allora $u(t) > v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per cui sono entrambe definite.

Dim. Stessa di sopra ponendo $w(t) := u(t) - v(t)$. Si prende il solito S e funziona come sopra.

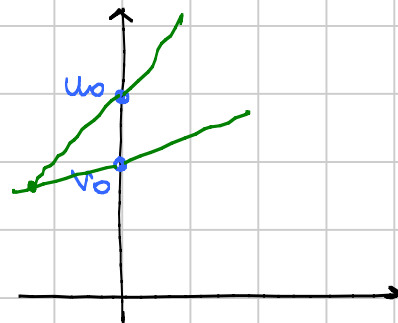
Osservazione Nel teorema appena citato, basta che ci sia una delle due disuguaglianze strette, cioè potrebbe essere

$$u'(t) > f(t, u(t)) \quad v'(t) \leq f(t, v(t)).$$

Osservazione In tutti i teoremi di confronto possiamo mettere $\geq$ e $\leq$ nelle ipotesi e nelle tesi PURCHÉ f e g verificano le ipotesi del teorema di unicità.

Se così non è ci sono facili controesempi giocati sull'esempio di non unicità.

Osservazione Per tempi negativi non vale nulla di quanto enunciato. Valgono risultati analoghi ma cambiando i versi in opportune disuguaglianze



Confronti standard Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u' = au^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{con } a > 0 \text{ parametro reale.}$$

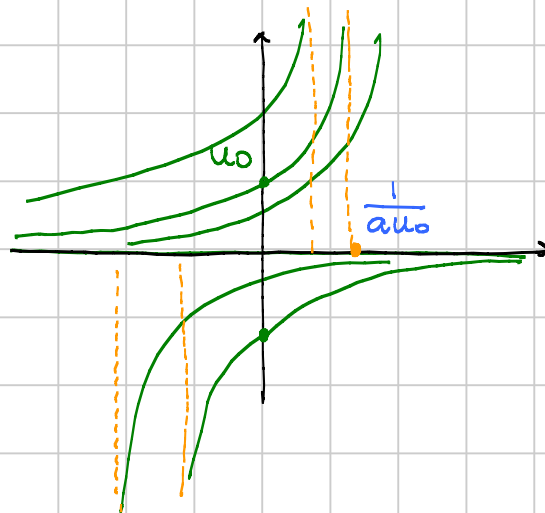
La soluzione generale è $\frac{du}{u^2} = a \quad - \frac{1}{u} = at + c \quad u = \frac{-1}{c + at}$

con $c = -\frac{1}{u_0}$, quindi $u(t) = \frac{-1}{-\frac{1}{u_0} + at} = \frac{u_0}{1 - au_0 t}$ (verifica)

Come sono fatte le soluzioni? Per $t \leq 0$ non hanno problemi e tendono a 0 per $t \rightarrow -\infty$. Per $t \geq 0$ hanno blow-up per $t = \frac{1}{au_0}$

In particolare

- ① tutte le soluzioni hanno blow-up per $t \rightarrow +\infty$
- ② Il tempo di vita tende a 0 quando $u_0 \rightarrow +\infty$



Osservazione Non è difficile vedere che si ha la situazione opposta per $u_0 \leq 0$.

Oss. La simmetria tra le soluzioni con partenza $u_0 > 0$ e quelle con partenza $u_0 < 0$ si può rendere rigorosa.

Consideriamo una soluzione $u(t)$ con $u(0) = u_0 > 0$.

Considero $v(t) := -u(-t)$. Cosa risolve $v(t)$?

$$v(0) = -u(0) = -u_0$$

$$\begin{aligned} v'(t) &= -u'(-t) \cdot (-1) = u'(-t) = a[u(-t)]^2 \\ &= a[-u(-t)]^2 = a[v(t)]^2 \end{aligned}$$

Quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione con dato iniziale cambiato di segno.

Più in generale: si ha lo stesso fenomeno per equazioni del tipo

$$\begin{cases} u' = a|u|^p & \text{con } p > 1 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

- blow-up per $t > 0$ per ogni $u_0 > 0$
- tempo di vita che tende a 0 quando $u_0 \rightarrow +\infty$.

Dam.: basta risolvere esplicitamente

Se avere $p=1$, allora le soluzioni sono tutte esponenziali con esistenza globale.

Ancora meglio, tutte le soluzioni del problema

$$u' = a(t)u + b(t)$$

con $a(t)$ e $b(t)$ funzioni continue definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ sono definite globalmente (teoria generale delle equazioni lineari).

C'è anche una formula per trovarle.

TEOREMA (Caso della f sublineare)

Consideriamo un'equazione diff. $u' = f(t, u)$ con

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua (definita ovunque)
- esistono 2 funzioni continue $a(t)$ e $b(t)$ tali che

$$|f(t, u)| \leq a(t) |u| + b(t)$$

(f cresce meno che
linearmente nella
variabile u)

Allora il problema di Cauchy ha soluz.
globale per ogni valore iniziale $u(0) = u_0$.

Dim.: Non può esserci break-down perché $f(t, u)$ è per ipotesi
definita ovunque.

Non può esserci blow-up per tempi positivi poiché
sapendo che

$$f(t, u) \leq a(t) u + b(t) < a(t) u + b(t) + 32$$

quindi la soluzione è < di una soluzione di

$$v' = a(t) v + b(t) + 32$$

che, per le parti sopra, una queste non scoppiano, quindi $u(t)$
non può tendere a $+\infty$ in tempo finito.

Analogamente

$$f(t, u) \geq -a(t) u - b(t) > -a(t) u - b(t) - 5$$

e questo le impedisce di andare a $-\infty$.

Analogamente si ragiona per tempi $t \leq 0$.

Oss. f sublineare $\Rightarrow$ la soluzione cresce meno che
esponenzialmente.

— o — o —