

SSSUP 2013
Corso di Complementi di
Analisi Matematica I
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01 – Liminf e limsup di successioni.	5
Lezione 02 – Liminf/limsup come minlim/maxlim. Criteri della radice, rapporto e rapporto→radice enunciati con liminf e limsup.	9
Lezione 03 – Richiami di topologia: definizione di parte interna, chiusura, frontiera, punti isolati, punti di accumulazione. Liminf e limsup di funzioni: definizioni. .	14
Lezione 04 – Liminf e limsup di funzioni: interpretazione in termini di successioni. Teorema di De L'Hopital enunciato con liminf e limsup.	18
Lezione 05 – Equivalenza tra continuità e continuità per successioni. Compattezza. Teorema di Weierstrass e di Bolzano-Weierstrass.	22
Lezione 06 – Funzioni semicontinue. Teorema di Weierstrass per funzioni semicontinue. Varianti del teorema di Weierstrass.	27
Lezione 07 – Uniforme continuità e moduli di continuità. Teorema di Heine-Cantor. Applicazione alla integrabilità delle funzioni continue e approssimazione di un integrale mediante somme di Riemann.	32
Lezione 08 – Funzioni Lipschitziane ed Holderiane. Legami tra Lipschitzianità e derivata prima. Legami tra Lipschitzianità, Holderianità, uniforme continuità, continuità.	36
Lezione 09 – Successioni di Cauchy. Completezza della retta reale. Criterio dell'assoluta convergenza per serie dimostrato usando l'ordinamento o la completezza. Dimostrazione di Bolzano-Weierstrass via completezza.	40
Lezione 10 – Teorema di estensione di una funzione uniformemente continua alla chiusura. Teoremi in stile De L'Hopital per successioni.	44
Lezione 11 – Successioni per ricorrenza lineari – Prima parte	48
Lezione 12 – Successioni per ricorrenza lineari – Seconda parte	52
Lezione 13 – Successioni per ricorrenza autonome monotone	56
Lezione 14 – Successioni per ricorrenza autonome spiraleggianti	61
Lezione 15 – Successioni per ricorrenza autonome: esempi di teoremi generali e studio della velocità di convergenza	66
Lezione 16 – Esempi di studio di successioni per ricorrenza non autonome	71
Lezione 17 – Successioni per ricorrenza non autonome con valori soglia	75
Lezione 18 – Successioni per ricorrenza autonome che non hanno limite. Studio dell'equazione logistica al variare del parametro.	79
Lezione 19 – Funzioni convesse. Monotonia del rapporto incrementale. Derivata destra e sinistra e loro monotonia.	83
Lezione 20 – Relazioni tra convessità, derivata prima e derivata seconda. Massimi e minimi di funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen e applicazioni.	88

Lezione 21 – Introduzione alle equazioni differenziali. Enunciato dei teoremi di esistenza, esistenza ed unicità, alternativa. Esempio di non unicità (pennello di Peano). Esempi di blow-up e break-down.	92
Lezione 22 – Teorema dell'asintoto. Primi esempi di studio qualitativo per equazioni differenziali autonome.	96
Lezione 23 – Teoremi di confronto, soprasoluzioni e sottosoluzioni per equazioni differenziali. Confronti standard con secondo membro di tipo potenza. Teorema di esistenza globale con secondo membro sublineare.	100
Lezione 24 – Ulteriori esempi di studio qualitativo per equazioni differenziali autonome: esistenza globale vs blow-up	105
Lezione 25 – Primi esempi di studio qualitativo per equazioni differenziali non autonome	109
Lezione 26 – Valori soglia per equazioni differenziali non autonome	113
Lezione 27 – Sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee. Riduzione di (sistemi di) equazioni di ordine qualunque a sistemi di ordine 1. Risoluzione nel caso di matrice diagonalizzabile. Esponenziale di una matrice.	117
Lezione 28 – Rappresentazione delle traiettorie di un sistema nello spazio delle fasi. Problema della stabilità dell'origine. Studio della stabilità dell'origine per sistemi 2×2	122
Lezione 29 – Metodi energetici per lo studio della stabilità di sistemi lineari e nonlineari. Teorema di linearizzazione.	126
Lezione 30 – Modelli preda-predatore. Metodi energetici per equazioni di ordine 2. Calcolo del periodo delle soluzioni mediante integrali impropri.	131

SSSUP 2013 - LEZIONE 01

Titolo nota

28/01/2013

- 1 LIMINF e LIMSUP
- 2 COMPLETEZZA, COMPATTEZZA E TEO. WEIERSTRASS
- 3 UNIFORME CONTINUITÀ E MODULI DI CONTINUITÀ
- 4 CONVESSITÀ

Due temi principali : → SUCCESSIONI PER RICORRENZA
 → EQUAZIONI DIFFERENZIALI
 — o — o — o —

LIMINF E LIMSUP DI SUCCESSIONI

Ripassio veloce Una proprietà P_m dei numeri naturali vale

→ definitivamente se vale da un certo intero in poi, cioè

$\exists m_0$ t.c. P_m è vera $\forall m \geq m_0$

→ frequentemente se vale per infiniti valori di $m \in \mathbb{N}$.

Sia a_n una successione. Si dice

- $a_n \rightarrow +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definit.
- $a_n \rightarrow -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ " " " $a_n \leq M$ "
- $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0$ " " " $|a_n - l| \leq \varepsilon$ "

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

Se nessuna di queste accade, si dice che a_n non ha limite.

Esempi classici

$$a_n = (-1)^n \quad \text{cometto dopo video}$$

$$b_n = (-1)^n \cdot n^{\frac{1}{2}} = (-n)^{\frac{1}{2}}$$

$$c_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

$$d_n = 2^{(-n)^{\frac{1}{2}}}$$

Idea: liminf e limsup catturano le oscillazioni di una successione.

Def. Sia a_n una successione

- Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

- Se a_n è limitata superiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si definisce

$$S_k := \sup \{ a_n : n \geq k \} \quad (\text{essendo la successione limitata,} \\ \text{avremo che } S_k \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \mathbb{N})$$

si osserva che $S_{k+1} \leq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (faccio il sup su meno
nodi), cioè S_k è debolmente decrescente, quindi per forza esiste

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Si pone quindi $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$

Osservazione Il $\limsup$ di una successione esiste sempre in
 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Def. Sia a_n una successione.

- Se a_n non è limitata inferiormente si pone $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

- Se a_n è limitata inferiormente si pone

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\inf \{ a_n : n \geq k \}}$$

I_k è una succ. deb. cresc. di reali

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$

$$S_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$I_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$S_k \rightarrow 1 = \limsup$$

$$I_k \rightarrow -1 = \liminf$$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$

$$S_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0 = \limsup$$

$$I_k = 0 \quad \forall k, \text{ quindi } I_k \rightarrow 0 = \liminf$$

Caratterizzazione con gli ε

① Si ha che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ se e solo se

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente

② Si ha che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ se e solo se

(i) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

[Dim. Infatti $S_k \rightarrow L$, quindi $S_k \leq L + \varepsilon$ definitivamente, quindi tutti gli a_n con $n \geq k$ sono più piccoli di $L + \varepsilon$.

Inoltre $S_k \geq L - \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$ perché è deb. dec. e tende ad L , quindi trovo degli a_n con indice grande a piacere che sono $\geq L - \varepsilon$.]

③ Si ha che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ se e solo se

$\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente, cioè $a_n \rightarrow -\infty$

[Infatti fissato M abbiamo che $\exists k_0$ t.c. $S_k \leq M \quad \forall k \geq k_0$,
ma allora $a_k \leq S_k \leq M \quad \forall k \geq k_0$.]

Analogamente: ① $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \quad a_n \leq M$ frequentemente

② $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (i) $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \geq l - \varepsilon$ definitiv.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \leq l + \varepsilon$ frequent.

③ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Teorema Sia a_n una successione. Allora $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

[Dim: esercizio mettendo insieme i due definitivamente nella caratterizzazione con gli ε]

Teorema $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$

[Dim: per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $I_k \leq S_k$. Passando al lim...]

Teorema Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

[Dim. per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $S_k^a \leq S_k^b$ e $I_k^a \leq I_k^b$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\sup \{a_n : n \geq k\}$ $\sup \{b_n : n \geq k\}$]

Teorema Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una sua sottosucc.
 Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

[Dim: basta dimostrare l'ultima, da quale segue ancora una volta dalle proprietà dei sup e dalle caratterizzazioni con gli ε]

Corollario Se a_n ha limite in $\overline{\mathbb{R}}$, allora i 2 laterali sono =, ma allora anche i 2 centrali sono =, ma allora la sottosucc. ha lo stesso limite.

SSSUP 2013

-

LEZIONE 02

Titolo nota

28/01/2013

Liminf e limsup della somma

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

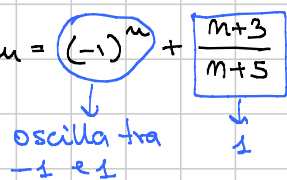
Osservazione le disuguaglianze possono essere strette

$$a_n = +1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$$

$$b_n = -1, +1, -1, +1, -1, \dots$$

Esercizio Trovare un esempio in cui i termini a dx e sx delle due formule sono 4 numeri distinti.Esercizio Enunciare e dim. teo. per liminf / limsup di $(-a_n)$.
Provare a vedere che succede per $a_n \cdot b_n$ Dim. teo. sommaSegue o dalla caratterizzazione con gli ε o dalla definizione dopo aver osservato che

$$S_k^{a+b} \leq S_k^a + S_k^b$$

La quale è una proprietà del sup.
— 0 — 0 —Esempio Calcolare liminf e limsup di $a_n = (-1)^n + \frac{n+3}{n+5}$
Quindi $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.
— 0 — 0 —

LIM SUP E MAX LIM (Caratterizzazione del limsup mediante sottosuccessioni)

Sia $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora

- ① esiste sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow L$
- ② già sappiamo che se una sottosucc. ha limite, questo è $\leq L$.

Quindi L è il MAX LIM, cioè il massimo limite possibile per una sottosucc. di a_n che ha limite.

Dm. di ①. **Caso 1** $L = +\infty$. Uso caratterizzazione con gli M

- prendo $M=1$ e trovo $n_1 \in \mathbb{N}$ b.c. $a_{n_1} \geq 1$ (esiste)
- prendo $M=2$ e trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ b.c. $a_{n_2} \geq 2$ e $n_2 > n_1$
 $\uparrow$ è vera ∞ volte, quindi n_2 esiste
- prendo $M=3$ e trovo $n_3 \in \mathbb{N}$ b.c. $a_{n_3} \geq 3$ e $n_3 > n_2$

In generale, supposto di aver definito $n_1, \dots, n_k$, cerco n_{k+1} in modo tale che $n_{k+1} > n_k$ e $a_{n_{k+1}} \geq k+1$.

È ovvio ora che $a_{n_k} \geq k$, quindi $a_{n_k} \rightarrow +\infty$.

Caso 2: $L \in \mathbb{R}$ Uso caratt. con gli ε

- prendo $\varepsilon=1$ e trovo $n_1 \in \mathbb{N}$ b.c. $L-1 \leq a_{n_1} \leq L+1$
 $\uparrow$ vera ∞ volte $\uparrow$ vera defn.

occluso: n_1 esiste

- prendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $n_2 \in \mathbb{N}$ b.c. $n_2 > n_1$ e $L - \frac{1}{2} \leq a_{n_2} \leq L + \frac{1}{2}$

In generale, definiti $n_1, \dots, n_k$, basta scegliere n_{k+1} in maniera tale che $n_{k+1} > n_k$ e

$$L - \frac{1}{k+1} \leq a_{n_{k+1}} \leq L + \frac{1}{k+1}$$

È ovvio che $a_{n_k} \rightarrow L$ per i carabinieri.

Nel caso 3, cioè $L = -\infty$, è immediato che tutta la successione tende a $-\infty$.

— 0 — 0 —

Esercizio Enunciare e dim. l'analogo in versione $\text{LIMINF} = \text{MIN LIM}$

— 0 — 0 —

Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente.

- Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$
- Se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim. (del secondo caso)



Definitivamente abbiamo che $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$, ma allora

$$\boxed{0} \leq a_n \leq \boxed{\left(\frac{L+1}{2}\right)^n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

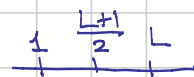
elevo formula di sopra alla n (e posso perché...)

Esercizio Dimostrare il 1° caso.

Criterio del rapporto. Sia $a_n > 0$ definitivamente.

- Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$
- Se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim. (Caso 1) Analogamente a prima abbiamo che



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \text{ definitivamente.}$$

(se $L \in \mathbb{R}$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 2013 \text{ se } L = +\infty$$

Quindi esiste $m_0 \in \mathbb{N}$ b.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{L+1}{2} \quad \forall n \geq m_0$

Ma allora $a_{m_0+1} \geq \frac{L+1}{2} a_{m_0}$, $a_{m_0+2} \geq \frac{L+1}{2} a_{m_0+1} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^2 a_{m_0}$

da cui per induzione posso dimostrare facilmente che

$$a_{m_0+k} \geq \left(\frac{L+1}{2}\right)^k a_{m_0} \quad (\text{dim. formalmente})$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$
 $+\infty$ $+\infty$ positivo e fisso

Esercizio Fare l'altro caso.

Criterio rapporto $\rightarrow$ radice Sia $a_n > 0$ definitivamente. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In particolare, se il rapporto ha limite, allora ce l'ha anche la radice e coincide con il precedente.

Dim. Poniamo $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Se $L = +\infty$, è banale.

Sia quindi $L \in \mathbb{R}$ (è sempre ≥ 0). Fisso $\varepsilon > 0$. Allora

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

Come prima dimostro per induzione che $a_{m_0+k} \leq (L+\varepsilon)^k a_{m_0}$ che posso riscrivere come

$$a_n \leq (L+\varepsilon)^{n-m_0} \cdot a_{m_0}$$

Ma allora $\sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{(L+\varepsilon)^{\frac{n-m_0}{n}}}_{\downarrow L+\varepsilon} \underbrace{\sqrt[n]{a_{m_0}}}_{\downarrow 1}$

← va dimostrato prima a parte (con disug. di BERNOULLI)

Da questa ottengo che $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$

Essendo vero per ogni $\varepsilon > 0$ ho che il $\limsup$ è in realtà $\leq L$.

Esercizi [1] Dimostrare la 1ª disuguaglianza

[2] Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono tutti diversi

[3] Per chi conosce le serie di potenze, trovare una formula per il raggio di convergenza valida sempre.

SSSUP 2013 - LEZIONE 03

Titolo nota

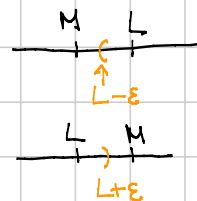
29/01/2013

Liminf e Limsup di successioni Sia a_n una successione

[1] Sono fatti equivalenti

(1.1) a_n non è limitata superiormente(1.2) $\limsup a_n = +\infty$ (1.3) $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente(1.4) esiste sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow +\infty$ (possiamo anche supporre che a_{n_k} sia strett. crescente, basta fare in modo che $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} + k$)

[2] Sono fatti equivalenti

(2.1) $\limsup a_n = -\infty$ (2.2) $\lim a_n = -\infty$ (2.3) $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente[3] Sono equivalenti dato $L \in \mathbb{R}$ (3.1) $\limsup a_n = L$ (3.2) $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente
 $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente(3.3) esiste sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow L$ e ogni altra s.succ., se ha limite, ha limite $\leq L$ ($L = \max \lim a_n$)(3.4) $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{a_n : n \geq k\}$ (3.5) $L = \inf \{M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \text{ definitivamente}\}$ (3.6) $L = \sup \{M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \text{ frequentemente}\}$ Esercizio Enunciare e dimostrare lo stesso quadro per il LIMINF.

— o — o —

RICHIAMI DI TOPOLOGIA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$

Def. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice

- interno ad A se $\exists \varepsilon > 0$ b.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$,
- aderente ad A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,
- che sta sul bordo di A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$,
(ogni intorno di x_0 tocca A ed il complement.) $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$,
- isolato in A se $\exists \varepsilon > 0$ b.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\}$,
- di accumulazione per A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $[(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$
(ogni intorno di x_0 interseca A in un pto $\neq x_0$)

Def. Sia A come sopra. Si pone

- $\overset{\circ}{A} = \text{Int}(A) =$ parte interna di A = insieme dei pti interni ad A ,
- $\bar{A} = \text{Clos}(A) =$ chiusura di A = insieme dei pti aderenti ad A ,
- $\partial A =$ frontiera di A = insieme dei punti del bordo di A ,
- $\text{Isol}(A) =$ insieme dei punti isolati di A ,
- $D(A) =$ derivato di A = insieme dei punti di accumulazione

Semplici proprietà di queste nozioni

- ① $\text{Int}(A) \subseteq A \subseteq \text{Clos}(A)$ [trovare esempio in cui sono distinti]
- ② $\partial A = \text{Clos}(A) \setminus \text{Int}(A)$
- ③ $D(A) = \text{Clos}(A) \setminus \text{Isol}(A)$
- ④ $D(A) \cap \text{Isol}(A) = \emptyset$

Esercizio Scrivere e dimostrare le relazioni tra

$\text{Int}(A), \text{Int}(B), \text{Int}(A \cup B), \text{Int}(A \cap B)$

$\text{Clos}(A), \text{Clos}(B), \text{Clos}(A \cup B), \text{Clos}(A \cap B)$

Vedere cosa si salva se invece di 2 insiemi ce ne sono infiniti.

Esercizio ① Trovare A t.c. $A, \overset{\circ}{A}, \bar{\bar{A}}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \bar{A}, \overset{\circ}{\bar{\bar{A}}}, \bar{\bar{\bar{A}}}$ sono $\neq$ diversi

② Dim. che non si generano ulteriori oggetti nuovi

Def. Il solito insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- aperto se $A = \text{Int}(A)$,
- chiuso se $A = \text{Clos}(A)$

Esercizio Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha che

A è aperto $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ è chiuso

A è chiuso $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus A$ è aperto

Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Esiste una successione a_n a valori in A ($a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$) t.c. $a_n \rightarrow x_0$ se e solo se $x_0 \in \bar{A}$.
Esiste una successione a_n a valori in A t.c. $a_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow x_0$ se e solo se x_0 è di accumulazione per A ($x_0 \in D(A)$).

[Dim. del 1°: supponiamo $x_0 \in \bar{A}$. Uso definizione di p.to aderente con $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Ottengo che $\exists a_k \in A \cap (x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k})$.

È ovvio che la succ. a_k è a valori in A e tende a x_0 .

Viceversa: supponiamo che esista $a_n \rightarrow x_0$ con $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Voglio dim. che $x_0 \in \bar{A}$. Fisso $\varepsilon > 0$ qualunque. L'intervallo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ contiene a_n definitivamente, quindi contiene almeno un elemento di A (non è detto che ne contenga infiniti perché gli a_n potrebbero anche essere tutti uguali).]

Esercizio Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, trovare per quali p.ti $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una successione a_n , fatta da elementi di A tutti distinti, tale che $a_n \rightarrow x_0$

Data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso fare il limite (e anche liminf / limsup) di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se

- ① $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A
- ② $x_0 = +\infty$ se A non è limitato superiormente
- ③ $x_0 = -\infty$ " " " " inferiormente

LIMINF e LIMSUP di funzioni Caso $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumul. per A

Def. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

- ① Se $\forall r > 0$ si ha che $\sup \{ f(x) : x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$
si dice che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

- ② Altrimenti si pone

$$S_r := \sup \{ f(x) : x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\} \}$$

è un numero,
almeno se r è piccolo

Si osserva che $r_1 < r_2 \Rightarrow S_{r_1} \leq S_{r_2}$
dunque esiste

$$L := \lim_{r \rightarrow 0^+} S_r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

e si pone $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

La definizione di liminf è del tutto analoga.

I casi in cui $x_0 \rightarrow +\infty$ e $x_0 \rightarrow -\infty$ sono pure analoghi, basta cambiare opportunamente (in modo ovvio) l'insieme su cui si fa il sup / inf.

— o — o —

SSSUP 2013 - LEZIONE 04

Titolo nota

29/01/2013

LIMSUP DI FUNZIONI E SUCCESSIONI

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A ,

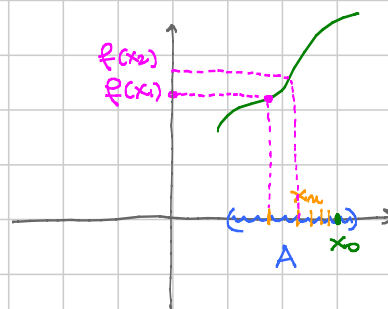
$x_n \rightarrow x_0$ una successione con $x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Posso considerare la successione $f(x_n)$.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $f(x_n) \rightarrow l$
(stesso l)

Brutalmente: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
 $\uparrow$
 punto $x = x_n$.

Quando $n \rightarrow \infty$, ho che $x \rightarrow x_0$



Achtung! Tutto questo vale solo se il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste, altrimenti in generale non è vero.

Teorema 1 Nelle stesse ipotesi di sopra si ha che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$\uparrow$
Banale

Teorema 2 Dati $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A , allora esiste una successione $x_n \rightarrow x_0$ t.c.

(i) $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $x_n \neq x_0$ " " "

(iii) $f(x_n) \rightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Teorema 1 + Teorema 2 dicono che il $\limsup$ è maxlim, cioè il massimo limite possibile di $f(x_n)$ quando $x_n \rightarrow x_0$

Dim. teorema 2 Devo trovare una succ. $x_n \rightarrow x_0$ che verifica (i), (ii), (iii).

Caso 1 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ uso la definizione di $\limsup$ con $r = \frac{1}{n}$. Ottengo che

$$\sup \{ f(x) : x \in [A \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})] \setminus \{x_0\} \} = +\infty$$

Questo in particolare implica che esiste $x_n \in [A \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})] \setminus \{x_0\}$ tale che $f(x_n) \geq n$.

È evidente che la successione x_n verifica (i), (ii), (iii) e $x_n \rightarrow x_0$.

Caso 2 $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Questo vuol dire che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in [A \cap (x_0 - r, x_0 + r)] \setminus \{x_0\}$

$\forall r > 0$ si ha $f(x) \geq L - \varepsilon$ per almeno un $x \in \uparrow$

Gioco questa definizione con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e $r = \frac{1}{n}$.

Trovo quindi un punto

$$x_n \in [A \cap (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})] \setminus \{x_0\}$$

tale che

$$f(x_n) \geq L - \frac{1}{n}$$

Questa successione x_n verifica $x_n \rightarrow x_0$, (i), (ii), (iii).

Infatti si ha subito che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} L - \frac{1}{n} = L$$

e vale la disuguaglianza opposta per il teorema 1. Questo si dimostra in una riga:

se x_n è abbastanza vicino ad x_0 , allora $f(x_n) \leq L + \varepsilon$

Esercizio Fare il caso 3 in cui $L = -\infty$

Fare il tutto per il liminf.

Hôpital con liminf e limsup "Enunciato molto poco preciso"

Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sia una forma del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Allora:

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Corollario Hôpital classico quando i 2 laterali sono uguali.

[Dim. Basta dimostrare il $\leq$ a destra. Pongo

$L = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Per la caratterizzazione so che esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che

$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$. Adesso procedo come nella dim. classica (nel caso $\frac{0}{0}$)

Applico Cauchy in $[x_0, x_n]$ e ottengo che

$$\begin{array}{c} x_0 \quad z_n \quad x_n \\ | \quad | \quad | \end{array}$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\overset{0}{f(x_n)} - \underset{0}{f(x_0)}}{\overset{0}{g(x_n)} - \underset{0}{g(x_0)}} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}$$

È evidente che $z_n \rightarrow x_0$ e inoltre

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

↑
uso che il limsup è maxlim.

— o — o —

Osservazione Per avere il teo. dell' Hôpital serve che f sia definita in tutto un intervallo che ha x_0 come estremo.

NON BASTA che x_0 sia un pto di accumulazione.

— o — o —

Esercizio $\limsup_{x \rightarrow 0^+} (3+x^2) \cos \frac{1}{x}$ e $\liminf$ stessa cosa

Operativamente si fanno 2 cose:

→ stima dall'alto

→ successione dal basso

Stima dall'alto $(3+x^2) \cos \frac{1}{x} \leq 3+x^2$ da cui

$$\limsup_{x \rightarrow 0^+} (3+x^2) \cos \frac{1}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0^+} (3+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3+x^2) = 3$$

Successione dal basso Per dimostrare che $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq 3$

basta trovare una successione $x_n \rightarrow 0^+$ tale che $f(x_n) \rightarrow 3$.

[La scelgo in modo tale che $\cos \frac{1}{x_n} = 1$, cioè $x_n = \frac{1}{2\pi n}$]

Pongo $x_n = \frac{1}{2\pi n}$. Osservo che $x_n \rightarrow 0^+$ e

$$f(x_n) = \left(3 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right) \cos(2\pi n) = \left(3 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right) \rightarrow 3$$

Per il $\liminf$ la strategia è simmetrica:

→ stima dal basso

→ successione dall'alto

$$(3+x^2) \cos \frac{1}{x} \geq -(3+x^2) \quad \text{stima dal basso}$$

$$x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi} \quad \text{in modo che } \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = -1 \quad (\text{succ.})$$

SSSUP 2013 - LEZIONE 05

Titolo nota

05/02/2013

Compattezza, completezza e teo. di Weierstrass

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $A \neq \emptyset$.

Si dice che A è **COMPATTO** (per successioni) se per ogni successione a_n tale che $a_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione a_{n_k} ed esiste $a_\infty \in A$ tale che $a_{n_k} \rightarrow a_\infty$.

Detto altrimenti: ogni succ. a valori in A ammette almeno una sottosuccessione convergente ad un elemento di A .

Esempi • $A = [0, +\infty)$ non è compatto perché $a_n = n$ non ha sottosucc. convergenti ad elementi di A .

• $A = (0, 1)$ non è compatto perché $a_n = \frac{1}{n}$ non ha sottosucc. conv. ad elementi di A .

Teorema 1 (BOLZANO-WEIERSTRASS) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto è compatto se e solo se A è limitato e chiuso.

Teorema 2 (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme $A \neq \emptyset$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in A ,

(ii) A è compatto.

Allora esistono

$$\max \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

} massima e minima quota
raggiunta da $f(x)$ quando
 x varia in A .

Notazioni Non confondere massimo e pti di massimo
minimo e pti di minimo

Lemma Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Allora esiste una successione b_n di elementi di B t.c. $b_n \rightarrow \inf B$
ed " " " " " " " " " $b_n \rightarrow \sup B$.

Dim. (nel caso dell'inf.)

Caso 1: $\inf B = -\infty$ Questo equivale a dire che

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists b \in B \text{ t.c. } b \leq M.$$

Uso questa con $M = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) e ottengo $b_n \in B$ t.c. $b_n \leq -n$.

È evidente che $b_n \rightarrow -\infty$

Caso 2: $\inf B = L \in \mathbb{R}$ Questo equivale a dire che

$$(i) \quad b \geq L \quad \forall b \in B$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists b \leq L + \varepsilon$$



Uso questa con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) e ottengo $b_n \in B$ tale che

$$L \leq b_n \leq L + \frac{1}{n}.$$

È evidente che $b_n \rightarrow L$.

— o — o —

Proposizione Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A,$$

(iii) per ogni successione x_n tale che $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \rightarrow x_0$ si ha che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

(continuità per successioni)

Def. La funzione f si dice continua in x_0 se verifica uno qualunque dei 3 fatti equivalenti.

La funzione f si dice continua in A se è continua in ogni pto $x_0 \in A$.

Dim. proposizione (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è la definizione di limite.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Prendo una qualunque successione x_n di el. di A t.c. $x_n \rightarrow x_0$. Voglio dim. che $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, cioè che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ definitivamente. Considero il $\delta > 0$ dato dall'ipotesi (ii). Poiché $x_n \rightarrow x_0$, definitivamente avremo che $|x_n - x_0| \leq \delta$, cioè $x_n \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A$. Per il p.to (ii) questo implica che $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Procediamo per assurdo, supponendo che (ii) sia falsa. Riscrivo (ii)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Se (ii) è falsa, allora è vero che

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A \quad |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon_0$$

La uso con $\delta = \frac{1}{n}$. Ottengo almeno un $x_n \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}] \cap A$ tale che $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0$.

Ho così ottenuto una successione x_n di elementi di A tali che $x_n \rightarrow x_0$ e $f(x_n)$ NON tende a $f(x_0)$ perché dista sempre più di ε_0 . L'esistenza di tale succ. x_n contraddice l'ipotesi (iii).

Dim. teorema 2 Dimostriamo che esiste il minimo (per il max è analogo). Considero l'insieme

$$B = \{f(x) : x \in A\} \quad (= f(A) = \text{immagine di } f)$$

Di sicuro esiste $I = \inf B$ ($\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$).

Grazie al lemma esiste una successione b_n di elementi di B tale che $b_n \rightarrow I$. Per definizione di B , questo vuol dire che esiste una successione x_n di elementi di A tale che $b_n = f(x_n)$.

Poiché A è compatto, esiste una sottosuccessione x_{n_k} tale che $x_{n_k} \rightarrow x_\infty \in A$.

Ora abbiamo che

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \quad (\text{limite s.suc.} = \text{lim. succ.}) \\
 &= f(x_\infty)
 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio ho usato che f è continua, quindi è continua per successioni.

Ora so che $I = f(\text{qualcosa})$, quindi $I \in B$, quindi $I = \min B$ (e x_∞ è uno dei pti di minimo per f in A).

Dim. Teorema 1 Parte facile: se A non è limitato o A non è chiuso, è facile vedere che non è compatto.

Supponiamo quindi che A sia chiuso e limitato, quindi in particolare esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq [-M, M]$.

Sia x_n una qualunque successione. Voglio trovare una s.suc. convergente

Definisco

$$C = \{c \in \mathbb{R} : x_n \geq c \text{ per infiniti valori di } n\}.$$

Fatti semplici:

- $C \neq \emptyset$ (contiene almeno $-M$),
- C non contiene nulla più grande di M ,
- C è una semiretta sinistra (se contiene un valore, contiene anche tutti i precedenti).

Sia $L = \sup C$. ^{$\in \mathbb{R}$} Dico che esiste $x_{n_k} \rightarrow L$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ ho che

- frequentemente $x_n \geq L - \varepsilon$
- definitivamente $x_n \leq L + \varepsilon$.



Da qui in poi è la solita storia:

- $\varepsilon = 1$ e trovo $L-1 \leq x_{n_1} \leq L+1$

- $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e trovo $n_2 > n_1$ b.c. $L - \frac{1}{2} \leq x_{n_2} \leq L + \frac{1}{2}$

!

- $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e trovo $n_k > n_{k-1}$ b.c. $L - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq L + \frac{1}{k}$

Ho così ottenuto la succ. x_{n_k} desiderata.

Poiché $x_{n_k} \rightarrow L$ e A è chiuso, chiaramente $L \in A$.

— o — o —

SSSUP 2013 — LEZIONE 06

Titolo nota

05/02/2013

Dim. B-W via limsup / liminf

Supponiamo che A sia limitato, quindi $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $A \subseteq [-M, M]$.

Sia x_n una successione a valori in A .

Sia $L = \limsup x_n$. Chiaramente $L \in [-M, M]$.

Poiché $\limsup = \max \lim$, di sicuro esiste una s.succ. $x_{n_k} \rightarrow L$.

Infine $L \in A$ perché A è chiuso.

Stessa cosa si poteva fare con il liminf.

Esercizio Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$. Allora sono fatti equivalenti

(i) $A = \bar{A}$ (cioè A è chiuso),

(ii) ogni successione a valori in A , se converge, converge ad un elemento di A .

Proposizione Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti

(i) $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$,

(ii) per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

Dim. Analoga al caso precedente

(i) $\Rightarrow$ (ii) Per la proprietà $\liminf = \min \lim$ si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

$\uparrow$ $\liminf = \lim$ di opportuna s.succ. $\uparrow$ $\liminf = \min \lim$ $\uparrow$ ipotesi (i)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Basta osservare che $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf$ di opportuna succ.

Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice SEMICONTINUA INFERIORMENTE in x_0 (S.C.I.) se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

o l'altro fatto equivalente.

Si dice che f è S.C.I. in A se è S.C.I. in ogni $x_0 \in A$.

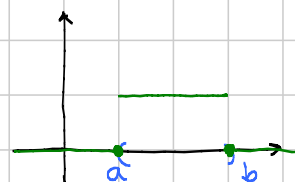
Detto brutalmente: al limite $f(x)$ può solo "crollare".

Esempi Sia $A = \mathbb{R}$.

① Tutte le funzioni continue sono S.C.I.

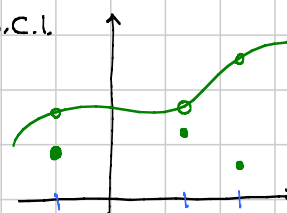
② La funzione caratteristica di un intervallo aperto (o aperto qualunque)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (a, b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a, b) \end{cases}$$



③ Prendendo una funzione continua, ed "abbassandola" in un numero finito di punti, si ottiene una funzione S.C.I.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -12 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



è S.C.I. (idem con -12 sostituito con qualunque $a \leq -1$).

Oss. In maniera analoga si definiscono le funzioni S.C.S. (semicontinue superiormente) richiedendo

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

Teorema (Weierstrass per funzioni semicontinue) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) A è compatto,
- (ii) f è S.C.I. in A .

Allora esiste per forza $\min \{f(x) : x \in A\}$.

Un enunciato analogo vale con $\max$ e S.C.S.

Dim. Sia $I = \inf \{f(x) : x \in A\}$. Come prima esiste $b_m \rightarrow I$
 $\uparrow$
 $f(A)$

quindi esiste x_n in A tale che $f(x_n) = b_m \rightarrow I$.

Per compattezza esiste una s.succ. convergente in A : $x_{m_k} \rightarrow x_\infty \in A$.

Ma allora

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}) \quad (\text{limite succ.} = \text{limite s.succ.})$$

$$= \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}) \quad (\text{se c'è il lim., pure il liminf è uguale})$$

$$\geq f(x_\infty) \quad (\text{uso che } f \text{ è S.C.I.})$$

$$\geq I \quad (\text{perché } I \text{ è l'inf di } f(x) \text{ al variare di } x \in A).$$

Essendo uguali il 1° e l'ultimo, sono tutte uguali.

In particolare

$$f(x_\infty) = I = \inf \{f(x) : x \in A\} = \min \{f(x) : x \in A\}.$$

Esercizio ① rifare il discorso per il $\max$

- ② mostrare che per funzioni S.C.I. il $\max$ non è obbligato ad esistere.

Teorema (Weierstrass generalizzato) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è s.c.l. in A ,

(ii) esiste un sottolivello compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

D'insieme

$$\{x \in A: f(x) \leq M\}$$

è compatto e non vuoto.

Allora esiste per forza $\min \{f(x): x \in A\}$.

Dim. Chiamo K il sottolivello. Pongo

$$m = \min \{f(x): x \in K\}.$$

Questo esiste per W. classico (occorre osservare che la restrizione di f a K è ancora s.c.l.). Dico che $m = \min \{f(x): x \in A\}$.

Infatti

→ se $x \in K$, allora $f(x) \geq m$

→ se $x \in A \setminus K$, allora $f(x) \geq M \geq m \dots$

Completare i dettagli.

— o — o —

Oss. Se f è s.c.l., allora i sottolivelli $\{x \in A: f(x) \leq M\}$ sono tutti chiusi. Quindi per avere la compattezza basta verificare la limitatezza.

Dim. Prendo una qualunque successione $a_n \rightarrow a_\infty$ con $a_n \in$ sottolivello per ogni $n \in \mathbb{N}$. Voglio dim. che $a_\infty \in$ sottolivello, cioè che $f(a_\infty) \leq M$. D'altra parte

$$f(a_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq M$$

↑
s.c.l.

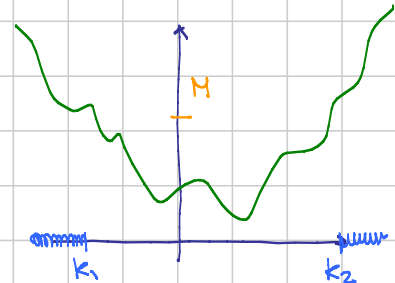
↑
perché $f(a_n) \leq M$ in quanto
 $a_n \in$ sottolivello.

— o — o —

Corollario Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è s.c.l. e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Dim. I sottolivelli sono TUTTI limitati
Sottolivello $\leq [k_1, k_2]$



Osservazione Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è s.c.l., basta molto poco per l'esistenza del minimo. Basta un solo sottolivello limitato, il che segue ad esempio se esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x_0) < \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f(x_0) < \liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

[Esercizio: visualizzare e dim. l'enunciato]

— o — o —

SSSUP 2013

-

LEZIONE 07

Titolo nota

07/02/2013

UNIFORME CONTINUITÀ

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \text{ si ha l'implicazione}$$

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Commento: cosa c'è di diverso rispetto alla continuità?

Continuità: $\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A \exists \delta > 0 \forall y \in A$ si ha l'implicazione

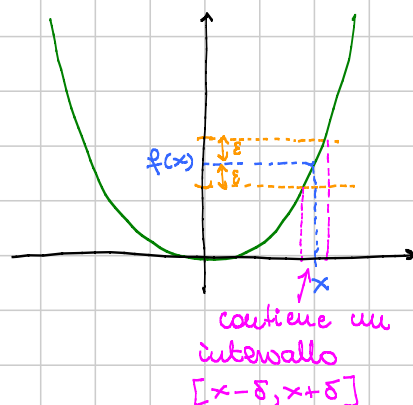
$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Nella continuità δ dipende da ε e da x . Nell'unif. cont. δ dipende solo da ε . Detto altrimenti: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ universale che va bene per tutti gli $x \in A$.

Esempio $A = \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. Ovviamente è continua.

È unif. continua?

Intuitivamente non esiste un δ universale: se prendo lo stesso $\varepsilon > 0$ e considero x sempre più grandi, il δ necessario è sempre più piccolo.



Formalmente: $\varepsilon = 1$, Fisso un certo x_0 e cerco dove succede che

$$|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$$

$$\uparrow$$

$$f(x) - f(x_0)$$

Risolvo e trovo un intervallo la cui ampiezza tende a 0 quando $x_0 \rightarrow +\infty$ o $x_0 \rightarrow -\infty$.

Esempio $f(x) = x^2$, $A = [-10, 10]$. Allora $f(x)$ è unif. cont. in A .

Motivo intuitivo: il δ che va bene agli estremi va bene ovunque.

Motivo formale: si tratta di risolvere la disequazione oppure esibire esplicitamente un δ , funzione di ε , che va bene.

$\delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Siano x e y in A t.c. $|x-y| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{20}$. Allora

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 20} \cdot \underbrace{|x-y|}_{\leq \frac{\varepsilon}{20}} \leq \varepsilon.$$

Esempio $A = (0, 1]$. Esiste $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ che sia continua ma non unif. cont.?

Sì, basta prendere $f(x) = \frac{1}{x}$



TEOREMA (HEINE - CANTOR) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f è anche unif. continua in A .

Dim. Per assurdo, supponiamo che f non sia unif. continua. Si tratta di negare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \forall y \in A \text{ si ha } |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

La negazione è

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in A \exists y \in A \text{ t.c. } |x-y| \leq \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$$

Dipendono da δ e ε_0

Gioco questa con $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Trovo x_n e y_n tali che

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$$

Poiché A è compatto, esiste s.succ. x_{n_k} che converge ad un certo $x_\infty \in A$, cioè $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$.

Dico che $y_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Basta infatti osservare che

$$\boxed{x_{n_k} - \frac{1}{n_k} \leq y_{m_k} \leq x_{n_k} + \frac{1}{n_k}} \quad \text{perché } |x_n - y_m| \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 x_{∞} x_{∞} x_{∞}
 per carabinieri

Ma allora $|f(x_{n_k}) - f(y_{m_k})| \geq \varepsilon_0$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\rightarrow$ uso che f è continua
 $0 = |f(x_{\infty}) - f(x_{\infty})| \geq \varepsilon_0$

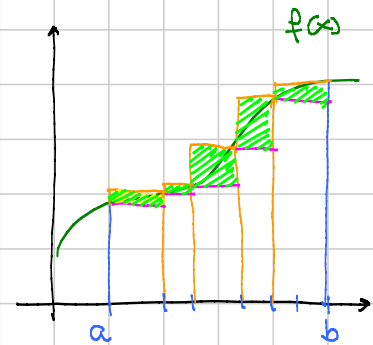
e questo è assurdo.

— 0 — 0 —

Esempio di utilizzo: integrabilità delle funzioni continue

Proposizione Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ con questa proprietà: se divido $[a, b]$ in sottointervalli tutti di ampiezza minore di δ e poi in ogni intervallo prendo i rettangoli che hanno come altezza il max ed il min della funzione, la differenza tra la somma delle aree è minore di ε .



Dim. Per il lemma di Heine - Cantor, $f(x)$ risulta unif. continua in A . Fissato ε , considero il corrispondente δ nella definizione di unif. continua. Sia $I_1, I_2, \dots, I_k$ i sottointervalli, e siano M_k e m_k il max ed il min di $f(x)$ in I_k (esistono per Weierstrass). Ora M_k e m_k sono valori assunti in pti di I_k , che quindi distano meno di δ , quindi $M_k - m_k \leq \varepsilon$.

Quindi

$$\begin{aligned}
 \text{Area rett. sopra} - \text{Area rett. sotto} &= \sum_{i=1}^k \underbrace{(M_k - m_k)}_{\leq \varepsilon} \text{lung}(I_k) \\
 &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^k \text{lung}(I_k) \\
 &= \varepsilon (b-a).
 \end{aligned}$$

Oss. Se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ b.c. ottengo $\text{Area} \leq \varepsilon(b-a)$, allora
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ b.c. ottengo $\text{Area} \leq \varepsilon$

Basta prendere $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$ e considerare il δ' corrispondente ad ε' .

Estensione della proposizione Ho in realtà dimostrato un enunciato più generale: se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua allora

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ b.c. se divido $[a, b]$ in sottointervalli tutti di ampiezza $\leq \delta$, e in ogni intervallo scelgo un pto a caso e faccio il rettangolo con quella altezza, ottengo una somma che differisce meno di ε da $\int_a^b f(x) dx$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^k f(x_i) \text{lunga}(I_i) \right| \leq \varepsilon$$

↑
p.to a caso in I_k

Conseguenza pratica: metodo per calcolare in maniera approssimata il valore di un integrale, sostituendolo con una somma finita.

Per avere una stima dell'errore, serve conoscere la relazione tra δ ed ε .

Def. (Modulo di continuità) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si definisce modulo di continuità della funzione, definita per $r > 0$

$$\omega(r) := \sup \{ |f(x) - f(y)| : x \in A, y \in A, |x - y| \leq r \}$$

Oss. Dalla definizione segue subito che $\lim_{r \rightarrow 0^+} \omega(r) = 0$ se f è unif. cont.

Inoltre

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A.$$

ω dice quanto sono vicini $f(x)$ ed $f(y)$ posto che x e y sono vicini.

SSSUP 2013 - LEZIONE 08

Titolo nota

07/02/2013

FUNZIONI LIPSCHITZIANE E HÖLDERIANE

Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana ^{in A} se esiste una costante L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Oss. Se un certo valore L va bene, allora vanno bene tutti i successivi. Il più piccolo valore di L che va bene è dato dalla formula

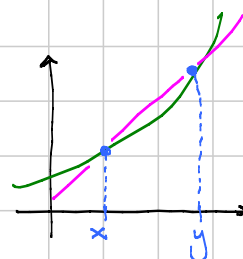
$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}$$

e si chiama COSTANTE DI LIPSCHITZ di $f(x)$ in A .

Significato geometrico $\frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ è il coeff.

angolare della retta passante per $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

La Lipschitzianità, ed in particolare la costante di lip., sono una misura della pendenza del grafico.



Esempi $f(x) = x^2$ è lip. in $[-10, 10]$ e non è lip. in $\mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt{x}$ non è lip. in $[0, 1]$ ma è lip. in $[1, +\infty)$
 — o — o —

Def. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice Hölderiana ^{in A} di esponente $\alpha \in (0, 1)$ se esiste una costante H t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x - y|^\alpha \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Come prima, si definisce costante di Hölder il più piccolo H che va bene, definito dalla formula

$$\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}$$

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità di esponente $\alpha = 1$.

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è Hölderiana con esponente $\frac{1}{2}$ in tutto $[0, +\infty)$, quindi in particolare anche in $[0, 1]$.

Si tratta di dimostrare che esiste H t.c.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq H \sqrt{|x - y|}$$

Proviamo con $H=1$. Possiamo assumere $x > y$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \stackrel{?}{\leq} \sqrt{x-y} \quad \cancel{x+y} - 2\sqrt{xy} \stackrel{?}{\leq} \cancel{x-y} \quad \cancel{xy} \leq 2\sqrt{xy}$$

$\uparrow$
vera perché $x > y$

È facile verificare che $H=1$ è la scelta migliore (prendere $y=0$).

Oss. Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{array}{l} \text{Lipschitziana} \Rightarrow \text{uniform. continua} \Rightarrow \text{continua} \\ \text{Hölderiana} \Rightarrow \end{array}$$

Se D insieme A è limitato, allora

Lipschitziana $\Rightarrow$ Hölderiana per ogni $\alpha \in (0, 1)$

Hölderiana con un certo $\alpha \in (0, 1) \Rightarrow$ Hölderiana con ogni $\beta \in (0, \alpha)$

Achtung! $f(x) = x$ non è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $\mathbb{R}$. Basta prendere $y=0$

$$\underbrace{|x - 0|}_{f(x) - f(y)} \leq H \sqrt{|x|} \quad \text{e questo è assurdo.}$$

Sui limiti invece funziona

Dim che Lip $\Rightarrow$ Höld

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &\leq L|x-y| = L|x-y|^{1-\alpha} |x-y|^\alpha \\
 &\leq \underbrace{L|A|^{1-\alpha}}_H \cdot |x-y|^\alpha
 \end{aligned}$$

— o — o —

Legami tra Lipschitzianità e derivata prima

- ① Le funzioni Lip. non sono obbligate ad avere la derivata prima.
(esempio classico: $f(x) = |x|$)
- ② Se f è Lip. in un certo insieme A , allora $f'(x)$, DOVE ESISTE, verifica

$$|f'(x)| \leq \text{costante di Lip.}$$

(Rapporto incrementale $\leq L$ sempre... passo al limite)

- ③ Se A è un insieme convesso (tutto $\mathbb{R}$, semiretta, intervallo) e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in A , allora f è Lip. in A se e solo se

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} < +\infty.$$

Inoltre il sup è proprio la costante di Lip.

Dim. Sia L il sup, che suppongo $\in \mathbb{R}$. Dimostro che L va bene

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} |f'(c) \cdot (x-y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \leq L \cdot |x-y|
 \end{aligned}$$

p.to misterioso tra x e y $\leq L$

Resta da dimostrare che nessun $L' < L$ va bene. Se andasse bene, per il p.to ② avremmo che $|f'(x)| \leq L'$ in tutto A , quindi il sup sarebbe $\leq L'$, mentre abbiamo assunto che sia L .

— o — o —

Oss. La faccenda del convesso serve per poter usare Lagrange (f deve essere definita tra x e y).

Oss. Le funzioni Hölderiane con esponente >1 sono solo le funzioni localmente costanti (se A è fatto da più pezzi, posso usare costanti diverse in pezzi diversi).

Dim. Se così fosse $|f(x) - f(y)| \leq H |x-y|^\alpha$ con $\alpha > 1$, allora

$$|f'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{H |x - x_0|^\alpha}{|x - x_0|} = \lim_{x \rightarrow x_0} H |x - x_0|^{\alpha-1} = 0$$

— o — o —

Oss. Lipschitzianità e Hölderianità forniscono esempi di moduli di continuità.

$$\omega(r) = Lr \quad \text{Dip: dipendenza lineare}$$

$$\omega(r) = Hr^\alpha \quad \text{Hölderianità}$$

— o — o —

Per dim. l'unif. continuità di una funzione si può usare Heine-Cantor oppure sperare nella Dip-Hölderianità

Esercizi $A = [0, 1]$

- ① Trovare $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua ma non Hölderiana con nessun α
- ② " " Hölderiana con ogni $\alpha \in (0, 1)$, ma non Dip.
- ③ " " Hölderiana solo per $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$
- ④ " " " solo per $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$
- ⑤ Dire cosa c'è di vero nel seguente enunciato:
 f è $\frac{1}{2}$ -Hölder $\Leftrightarrow f^2$ Lipschitz
- ⑥ Determinare per quali $\alpha \in (0, 1)$ si ha che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è Hölder (è una funzione continua, dunque unif. continua)
- ⑦ Dimostrare che ogni $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua è sublineare, cioè esistono A e B t.c. $f(x) \leq Ax + B$ per ogni $x \geq 0$.

SSSUP 2013 - LEZIONE 09

Titolo nota

12/02/2013

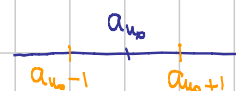
COMPLETEZZA**Def.** Una successione x_n si dice successione di CAUCHY se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |a_m - a_n| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_0 \quad \forall n \geq n_0$$

$\uparrow$
dipende da ε

(se n ed m sono grandi, i termini della suce. sono vicini)**Fatto 1** Ogni successione di Cauchy è limitata.**Dim.** Uso def. con $\varepsilon = 1$ e $n = n_0$. Ottengo che

$$|a_m - a_{n_0}| \leq 1 \quad \forall m \geq n_0$$

I termini con indice $\geq n_0$ sono intrappolati, i precedenti sono un numero finito.**Def.** Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice **COMPLETO** se tutte le succ. di Cauchy a valori in A convergono ad un elemento di A .**Fatto 2** $\mathbb{R}$ è completo, cioè tutte le succ. di Cauchy convergono in $\mathbb{R}$.
Conseguenza: $A \subseteq \mathbb{R}$ è completo se e solo se A è chiuso.**Dim. fatto 2** Sia a_n una succ. di Cauchy. Sappiamo già che è limitata. Quindi esistono e sono reali il liminf ed il linsup. Basta dimostrare che coincidono.

Supponiamo per assurdo che sia

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$M < N$$

$$M = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

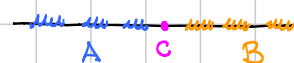
Pongo $\varepsilon = \frac{L-M}{3}$. Frequentemente abbiamo che $a_n \geq L - \varepsilon$ e

Frequentemente abbiamo che $a_m \leq M + \varepsilon$.

Quindi posso trovare valori di n e di m , grandi a piacere, tali che $a_m - a_n > \varepsilon$. Questo contraddice l'essere di Cauchy.

Filosofia Quale proprietà distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$? Ci sono due possibili alternative:

- ① ASSIOMA DI CONTINUITÀ: dati 2 sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e ogni $b \in B$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq c \quad \forall a \in A$ e $c \leq b \quad \forall b \in B$



Dall'assioma di continuità seguono l'esistenza di $\sup$ e $\inf$ e tutto quello che ne segue

BASATO FORTEMENTE SULL'ORDINAMENTO

- ② COMPLETEZZA: convergenza delle successioni di Cauchy

BASATO FORTEMENTE SULLA DISTANZA

Serie: somma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Somme parziali: $S_0 = a_0$, $S_1 = a_0 + a_1$, ..., $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

Si dice che una serie converge se S_n ha un limite reale.

Criterio di assoluta convergenza

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Dim. 1 $a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$, quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| - a_n)$$

↑
se convergono le 2 a dx, converge anche quella a sx.

La prima a_n converge per ipotesi. La seconda converge perché
 $0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$,

quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| - a_n) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{e quindi converge.}$$

Oss. Questa dim. è equivalente a considerare la serie dei positivi più la serie dei negativi.

Dim. 2 Sia $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ e sia
 $\Sigma_n = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$

Dati 2 interi $m > n$ abbiamo che

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| \\ &\leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| \\ &= \Sigma_m - \Sigma_n \\ &= |\Sigma_m - \Sigma_n| \end{aligned}$$

Sapendo per ipotesi che $\Sigma |a_n|$ converge, abbiamo che Σ_n converge, ma allora Σ_n è di Cauchy, ma allora anche S_n è di Cauchy, ma allora anche S_n converge, ma allora Σa_n converge.

Σ_n di Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $|\Sigma_m - \Sigma_n| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_0, \forall n \geq n_0$
 ma allora $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ t.c. $|S_m - S_n| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_0, \forall n \geq n_0$

↑
 stesso n_0
 — 0 — 0 —

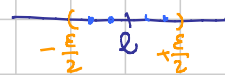
Fatto 3 Se a_n converge, allora a_n è di Cauchy

Dim. Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ si ha che

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } |a_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ma allora

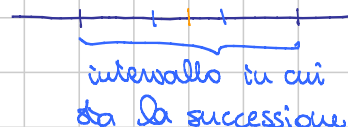
$$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0.$$



Fatto 4 Si può dimostrare B-W usando la completezza.
 ↓ cioè che ogni succ. limitata
 ammette una s.succ. convergente.

Dim.: Basta mostrare che ogni succ. limitata ammette una s.succ. di Cauchy.

Idea: costruisco una successione di sottoinsiemi



$$N = N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \dots$$

in questo modo

- * Divido l'intervallo in 1 parte. Per ogni indice il corrispondente termine sta in quella parte
- * Divido l'intervallo in 2 parti. Esiste un insieme di indici infinito N_2 per cui i termini stanno dalla stessa parte
- * Divido l'intervallo in 3 parti. Esiste un insieme di indici infinito N_3 per cui i termini stanno dalla stessa parte... e così via...

Procedimento diagonale Prendo $m_1 \in N_1$, poi prendo $m_2 \in N_2$ con $m_2 > m_1$, poi prendo $m_3 \in N_3$ con $m_3 > m_2$, e così via...

La corrispondente sottosucc. a_{m_k} è di Cauchy.

Perché?

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\exists k_0$ t.c. quando divido in k_0 parti queste sono tutte di ampiezza $\leq \varepsilon$. Da m_{k_0} in poi tutti gli indici stanno in N_{k_0} , quindi tutti gli elementi che ho preso stanno nella stessa parte, quindi distano meno di ε .

— o — o —

SSSUP 2013

-

LEZIONE 10

Titolo nota

12/02/2013

Teorema di estensione $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua.

Allora esiste un' unica funzione $g: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$ e tale che $g(x)$ sia continua (addirittura unif. cont.)

$\uparrow$
chiusura di A

Dim. Sia $x_0 \in \bar{A}$. Voglio definire $g(x_0)$ (N.B.: nessuno vieta che $x_0 \in A$). Poichè $x_0 \in \bar{A}$, allora esiste una successione x_n di elementi di A t.c. $x_n \rightarrow x_0$. Vonei porre

$$g(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Devo verificare che il limite esiste. Provo a dim. che $f(x_n)$ è una succ. di Cauchy. Fisso $\varepsilon > 0$. Poichè f è unif. continua abbiamo che $\exists \delta > 0$ t.c. se $|x - y| < \delta$, allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Ora $x_n \rightarrow x_0$, quindi x_n è di Cauchy, quindi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|x_n - x_m| < \delta$ per ogni $n \geq n_0$, per ogni $m \geq n_0$. Ma allora $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$, quindi $f(x_n)$ è di Cauchy. Dunque il limite esiste.

Restano da verificare 3 cose:

- ① Che il valore del limite non dipende dalla successione che ho scelto,
- ② Che $g(x)$ coincide con $f(x)$ per ogni $x \in A$,
- ③ Che $g(x)$ è a sua volta unif. continua.

Verifica di ① $x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow x_0$ 2 successioni. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$$

Supponiamo per assurdo che ci siano 2 limiti diversi l_1 ed l_2

Allora per n grande $f(x_n)$ è vicino ad l_1 e $f(y_n)$ è vicino ad l_2 .
Ma x_n ed y_n sono vicini tra di loro perché tendono ad x_0 , quindi
 $f(x_n)$ e $f(y_n)$ devono essere vicini tra di loro.

Verifica di ② Sia $x_0 \in A$. Allora posso scegliere come successione
 $x_n = x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (quella costante).
Allora $f(x_n) = f(x_0) \rightarrow f(x_0)$.

Verifica di ③ Devo dimostrare che g è unif. continua, cioè che
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Scelgo $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ in modo che $f(x_n) \rightarrow g(x)$
 $f(y_n) \rightarrow g(y)$

Allora $|x_n - y_n| \rightarrow |x - y| < \delta$, quindi definitivamente $|x_n - y_n| < \delta$
Quindi per l'uniforme continuità di f a meno che
 $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Passando al limite questa otteniamo che
 $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$, ma questo non rivela l'uniforme continuità
di g (che si può definire con $< 0 \leq$ indifferentemente).
— o — o —

Osservazione Abbiamo ottenuto che le coppie ε, δ che vanno bene
per l'uniforme continuità di f vanno bene anche
per g .
— o — o —

Applicazione Se $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ è uniformemente continua, anche
solo localmente (cioè solo sui sottoinsiemi limitati),
allora esiste un'unica funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua
tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

Questo permette, per esempio, di definire l'esponenziale
 $f(x) = a^x$ con base $a > 0$. Basta definirlo stile percorso
per $x \in \mathbb{Q}$, poi dim. che è unif. continuo, e usare il
teo. di estensione.
— o — o —

TEOREMI STILE HÔPITAL PER SUCCESIONI

Caso $\frac{0}{0}$

Siano a_n e b_n due successioni tali che

- (i) $a_n \rightarrow 0$,
- (ii) $b_n \rightarrow 0$,
- (iii) b_n strett. decrescente.

Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

Dim. Basta dim. la disuguaglianza di destra.

Lo facciamo nel caso in cui il $\limsup$ di $\frac{a_n}{b_n}$ è $L \in \mathbb{R}$
(il caso $L = +\infty$ è banale, il caso $L = -\infty$ è analogo).

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la caratterizzazione avremo che $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

Siano ora $k > n \geq m_0$. Allora

$$a_n - a_k = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{k-1} - a_k)$$

Ho usato che
i denomi.
erano positivi...

$$\begin{aligned} &\rightarrow \leq (L + \varepsilon) \{ (b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{k-1} - b_k) \} \\ &= (L + \varepsilon) (b_n - b_k). \end{aligned}$$

Ma allora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_k + a_k}{b_n - b_k + b_k} = \frac{\cancel{b_n - b_k} \cdot \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} + \frac{a_k}{b_n - b_k}}{\cancel{b_n - b_k} + \frac{b_k}{b_n - b_k}} \leq \frac{L + \varepsilon + \boxed{\frac{a_k}{b_n - b_k}}}{1 + \boxed{\frac{b_k}{b_n - b_k}}}$$

$\frac{0}{b_n} = 0$
 $\uparrow$ per $k \rightarrow +\infty$
 $\downarrow$ stesso motivo

Ho così dimostrato che $\frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$, quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon. \quad \text{Poichè } \varepsilon \text{ è arbitrario, } \limsup \leq L$$

Caso $\frac{\infty}{\infty}$

Supponiamo che

(i) $a_n \rightarrow +\infty$, $\leftarrow$ (poi uso serie)(ii) $b_n \rightarrow +\infty$,(iii) b_n strettamente crescente.

Allora come prima con

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \quad \text{e} \quad \frac{a_n}{b_n}$$

Dim. Come prima abbiamo che $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ Come prima, dati $k > n \geq n_0$ abbiamo che

$$\begin{aligned} a_k - a_n &= (a_k - a_{k-1}) + \dots + (a_{n+1} - a_n) \\ &\leq (L + \varepsilon) \{ (b_k - b_{k-1}) + \dots + (b_{n+1} - b_n) \} \\ &= (L + \varepsilon) (b_k - b_n). \end{aligned}$$

Come prima

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_k - a_n + a_n}{b_k - b_n + b_n} \leq \frac{(L + \varepsilon)(b_k - b_n) + a_n}{b_k - b_n + b_n} = \frac{L + \varepsilon + \frac{a_n}{b_k - b_n}}{1 + \frac{b_n}{b_k - b_n}}$$

Faccio a dx e sx il limsup per $k \rightarrow +\infty$. Ottengo

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{L + \varepsilon + \frac{a_n}{b_k - b_n}}{1 + \frac{b_n}{b_k - b_n}} = L + \varepsilon$$

$\uparrow$ perché $b_k \rightarrow +\infty$ e a_n e b_n sono fissi
 $\downarrow$ per lo stesso motivo

Finale come prima.

Oss. Non ho usato che $a_n \rightarrow +\infty$, ma solo che $b_n \rightarrow +\infty$

SSSUP 2013 - LEZIONE 11

Titolo nota

19/02/2013

SUCCESIONI PER RICORRENZA LINEARI

$$a_{n+1} = f(a_n, n) \quad a_0 \text{ dato}$$

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, n) \quad a_0 \text{ e } a_1 \text{ dati}$$

In generale: dipendenza da k termini precedenti

Dipendenza da un solo termine precedente

$$x_{n+1} = ax_n + b \quad x_0 = \alpha \text{ dato}$$

Obiettivo: trovare formula esplicita per x_n .

1° modo: bonino Calcolo i primi termini e cerco di capire

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = a\alpha + b, \quad x_2 = ax_1 + b = a^2\alpha + ab + b, \quad x_3 = a^3\alpha + a^2b + ab + b$$

$$\text{Congettura: } x_n = a^n \alpha + b \underbrace{(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})}_{\text{somma prog. geom.}} = a^n \alpha + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Abbiamo ottenuto che

$$x_n = a^n \alpha + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

se $a \neq 1$. Il caso $a = 1$ è davvero banale

↑ Dim. ufficiale: banale induzione

2° metodo: semi-astuto

Si trova una succ. costante $x_n \equiv l$ che risolve la ricorrenza (prescindendo dal dato iniz.)

$$\text{Deve essere } \underset{\substack{\uparrow \\ x_{n+1}}}{l} = a \underset{\substack{\uparrow \\ x_n}}{l} + b, \text{ cioè } l(1-a) = b, \text{ cioè } l = \frac{b}{1-a}$$

Pongo $y_n = x_n - l$ e vedo cosa risolve y_n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - l = a x_n + b - l = a(y_n + l) + b - l \\ &= ay_n + \underbrace{al + b - l}_{\substack{\uparrow \\ \text{uso ricor.} \\ \text{"0 per def. di } l}} \end{aligned}$$

Ho quindi ottenuto che $y_{m+1} = a y_m$, da cui con una banale induzione si ottiene $y_m = a^m y_0 = a^m (x_0 - l)$.
In conclusione:

$$\begin{aligned} x_m &= y_m + l = a^m (x_0 - l) + l = a^m \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \\ &= a^m x_0 + \frac{b}{1-a} (1 - a^m) \end{aligned}$$

che è la stessa formula di prima.

3° modo: vero uso della linearità $x_{m+1} = a x_m + f(m)$

Supponiamo di trovare "ad occhio" una successione che verifica la ricorrenza, ma magari non il dato iniziale. Sia z_n questa succ.

Come prima pongo

$y_m := x_m - z_m$. Ottengo

$$y_{m+1} = x_{m+1} - z_{m+1} = \underbrace{a x_m + f(m)}_{x_{m+1}} - \underbrace{a z_m + f(m)}_{z_{m+1}} = a(x_m - z_m) = a y_m$$

da cui $y_m = a^m y_0 = a^m (x_0 - z_0)$.

Si ha quindi che

$$x_m = y_m + z_m = a^m (x_0 - z_0) + z_m$$

Importanza della formula: se conosco una soluzione z_n qualunque della ricorrenza, allora le conosco tutte.

Interpretazione in termini di algebra lineare: consideriamo lo spazio vettoriale Succ delle successioni di numeri reali e consideriamo

l'operatore lineare $\Phi: \text{Succ} \rightarrow \text{Succ}$

$$\{x_n\} \mapsto \{x_{n+1} - a x_n\}$$

$\text{Ker } \Phi =$ tutte le successioni x_n tali che $x_{n+1} = a x_n$, cioè

tutte le successioni che verificano la ricorrenza in versione omogenea, cioè tutte le succ. del tipo $x_n = a^n \cdot \alpha$.

Risolvere la ricorrenza $x_{n+1} = a x_n + f(n)$ equivale a risolvere

$$\Phi(\{x_n\}) = \{f(n)\}$$

e quindi per fatti noti tutte le soluzioni si scrivono come

$$x_n = \underbrace{\text{soluzione qualunque}}_{z_n} + \underbrace{\text{elemento generico del ker}}_{y_n}$$

Esempio $x_{n+1} = 3x_n + n$

Elemento generico del ker = soluzione generica di $y_{n+1} = 3y_n$, cioè $y_n = 3^n \cdot c$

Per trovare una soluzione qualunque vado ad occhio, cercando del tipo $z_n = a n + b$, con a e b coeff. incogniti. Sostituisco e trovo

$$\underbrace{a(n+1)+b}_{z_{n+1}} = \underbrace{3an+3b}_{3z_n} + n \quad \begin{cases} a = 3a + 1 \\ a + b = 3b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{coeff. di } n \\ \text{termine noto} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2a = -1 & a = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} = 2b & b = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Quindi

$$x_n = \underbrace{3^n \cdot c}_{y_n} + \underbrace{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}}_{z_n}$$

Al variare di c , questa descrive tutte le soluzioni (se conosco il dato iniziale x_0 , trovo univocamente c).

[Volendo la formula finale si può verificare per induzione].

Teoria in generale: $\rightarrow$ come trovare elemento generico del ker
 $\rightarrow$ come trovare soluzione qualunque della
 ricorrenza non omogenea.
 — o — o —

Dipendenza da 2 termini precedenti

Caso omogeneo: $x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$

Il ker ha dimensione 2 (posso fissare come mi pare x_0 e x_1 e a quel p.to x_n è univocamente determinata).

Detto altrimenti:

$\rightarrow$ sia u_n la soluzione con $u_0 = 1$ e $u_1 = 0$

$\rightarrow$ sia v_n " " " " $v_0 = 0$ e $v_1 = 1$

Allora la soluzione x_n con dati $x_0 = \alpha$ e $x_1 = \beta$ sarà

$$x_n = \alpha u_n + \beta v_n$$

[Esercizio: verificare che x_n risolve la ricorrenza e prende i dati iniziali (è essenziale la linearità)]

Cerco soluzioni della ricorrenza omogenea della forma $x_n = R^n$.

Sostituisco:

$$\begin{array}{lcl} R^{n+1} & = & a R^n + b R^{n-1} \\ \textcolor{blue}{x_{n+1}} & & \textcolor{blue}{x_n} \quad \textcolor{blue}{x_{n-1}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leadsto R^2 = aR + b \\ \leadsto R^2 - aR - b = 0 \end{array}$$

Ho 3 casi:

$\rightarrow$ se $\Delta > 0$ ho 2 radici reali R_1 ed R_2 , quindi ho trovato 2 elementi della base R_1^n ed R_2^n

$\rightarrow$ se $\Delta < 0$ ho 2 radici complesse coniugate R_1 ed R_2 , quindi ho trovato due elementi della base z complessi R_1^n ed R_2^n

$\rightarrow$ se $\Delta = 0$ ho 1 radice reale di mult. 2, quindi avrei un solo elemento R^n della base.

SSSUP 2013 - LEZIONE 12

Titolo nota

19/02/2013

$$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}$$

$$R^2 = aR + b$$

→ Se $\Delta = 0$, allora l'equazione ha un'unica radice R ed $R^n = x_n$ è una soluzione della ricorrenza.

Un'altra soluzione è $x_n = n R^n$. Basta sostituire

$$\underbrace{(n+1)}_{x_{n+1}} R^{n+1} \stackrel{?}{=} a \underbrace{n}_{x_n} R^n + b \underbrace{(n-1)}_{x_{n-1}} R^{n-1}$$

$$n R^2 + R^2 \stackrel{?}{=} a n R + b n - b, \quad n(R^2 - aR - b) + (R^2 + b) \stackrel{?}{=} 0$$

" per def. di R " (vedi sotto)

Se R è radice doppia di $R^2 - aR - b$ vuol dire che $-b = \text{prod. rad.} = R^2$, quindi anche l'altro termine è 0.

In conclusione una base è $R^n, n R^n$.

→ Se $\Delta < 0$ posso trovare una base fatta di successioni reali.

Scrivo le radici R_1 ed R_2 in forma esponenziale

$$R_1 = A e^{iB}$$

$$R_2 = A e^{-iB}$$

quindi i 2 elementi della base su $\mathbb{C}$ sono

$$R_1^n = A^n e^{iBn} = A^n \cos(Bn) + i A^n \sin(Bn)$$

$$R_2^n = A^n e^{-iBn} = A^n \cos(Bn) - i A^n \sin(Bn)$$

Quindi UNA base reale è

$$x_n = A^n \cos(Bn)$$

$$y_n = A^n \sin(Bn)$$

Volendo uno potrebbe ignorare i numeri complessi e verificare per induzione che per opportuni valori di A e B le 2 succ. scritte sopra sono soluzioni.

— o — o —

Teoria generale : per una succ. per ricor. lineare omogenea con dipendenza dai k termini precedenti, la soluzione generale è combinazione lineare di k elementi di una base che si ottiene a partire dalle radici del polinomio associato alla ricorrenza nel seguente modo :

- 1 - ogni radice reale R di mult. 1 produce R^n
- 2 - " " " " " m produce $R^n, nR^n, n^2R^n, \dots, n^{m-1}R^n$
- 3 - ogni coppia di radici complesse coniugate $Ae^{\pm iB}$ di mult. 1 produce $A^n \cos(Bn), A^n \sin(Bn)$
- 4 - ogni coppia di radici complesse coniugate $Ae^{\pm iB}$ di mult. m produce gli stessi elementi di prima moltiplicati per n^i con $0 \leq i \leq m-1$ (in totale $2m$ elementi).

— o — o —

Esempio Successione di Fibonacci $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 0, x_1 = 1$

Polinomio associato $R^2 = R + 1$, $R^2 - R - 1 = 0$

$R = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La soluzione generale è

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Imponendo le condizioni iniziali trovo c_1 e c_2 :

$$x_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$c_2 = -c_1$$

$$x_1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

$$c_1 \sqrt{5} = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Formula per i numeri di Fibonacci

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

Volendo si dimostra
direttamente per
induzione.

Oss. 1 I numeri di Fibonacci sono interi (si dimostra per induzione a partire dalla ricorrenza). Quindi facendo il conto per un n specifico i $\sqrt{5}$ "si semplificano".

Oss. 2 Quando $n \rightarrow +\infty$ il secondo esponenziale $\rightarrow 0$ (la base ha valore assoluto < 1), quindi x_n cresce esponenzialmente come il 1° termine.

Oss. 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, quindi non intero.

Esempio $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ $x_0 = 2013$

Domanda: è possibile scegliere x_1 in modo che x_n sia limitata?

Idea: $x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ è limitata $\Leftrightarrow c_1 = 0$

Quindi ci può essere solo c_2 , e deve valere 2013 per avere $x_0 = 2013$.

Ma allora

$$x_1 = \underbrace{c_1}_0 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \underbrace{2013}_{c_2} \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2013 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Domanda 2 Come trovare una soluzione speciale nel caso non omogeneo?

Andando ad occhio !!!

$$x_{n+1} = 2x_n + 5x_{n-1} + n^2 + 3$$

In questo caso la cerco del tipo $z_n = an^2 + bn + c$. Sostituendo trovo 3 equazioni (coeff. di n^2 , n e termine noto) lineari in 3 incognite (a, b, c) . Di solito va bene.

Regola "generale" Se il termine non omogeneo è un polinomio di grado d , allora il tentativo ragionevole è un polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti.

$$x_{n+1} = 2x_n + 5x_{n-1} + 2^n. \text{ Cerco una sol. del tipo } z_n = a \cdot 2^n$$

$$\underbrace{a \cdot 2^{n+1}}_{2n+1} = \underbrace{2 \cdot a \cdot 2^n}_{2z_n} + \underbrace{5a \cdot 2^{n-1}}_{5z_{n-1}} + 2^n; \quad \cancel{4a} = \cancel{4a} + 5a + 2, \quad a = -\frac{2}{5}$$

Regola "generale" Esponenziale $\leadsto$ multiplo dello stesso esponenziale

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1} + 2^n \quad \text{Provo } z_n = a \cdot 2^n$$

$$a \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot a \cdot 2^n - 2a \cdot 2^{n-1} + 2^n; \quad \cancel{4a} = \cancel{6a} - \cancel{2a} + 2 \quad \text{😞}$$

È andata male perché doveva in quanto l'eq. omogenea associata $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ ha polinomio $R^2 = 3R - 2$ e $R = 2$ è radice, quindi $z_n = a \cdot 2^n$ è una sol. dell'omogenea.

In questo caso il tentativo giusto è $z_n = a n \cdot 2^n$

$$a(n+1)2^{n+1} = 3an2^n - 2a(n-1)2^{n-1} + 2^n; \quad \cancel{4an} + \cancel{4a} = \cancel{6an} - \cancel{2an} + 2a + 2$$

$n \cdot (\text{polinomio di cui } R=2 \text{ è radice})$

SSSUP 2013 - LEZIONE 13

Titolo nota

11/03/2013

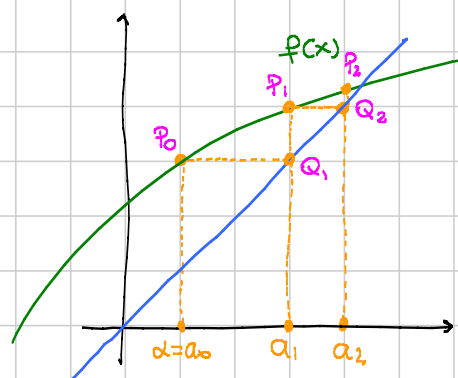
Succ. per ricorrenza con Operari 1° ordine autonome

$$a_0 = \alpha \text{ dato} \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \geq 0$$

Obiettivo: stabilire il comportamento della successione, ed in particolare il suo limite, senza disporre di una formula esplicita per a_n .

Interpretazione grafica

- Disegno $y = f(x)$,
- Disegno $y = x$,
- Segno α sull'asse x ,
- segno lo slogan
"verticale alla funzione, orizz. alla
bisettrice" (n.b. trovo sempre uno ed
un solo p.to)
- Così facendo le ascisse dei p.ti trovati sono $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$



$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$$Q_1 = (a_1, a_1)$$

$\uparrow$ stessa y di P_0
 $x=y$

$$P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$$

$\uparrow$ stessa x di Q_1 $\uparrow$ $y = f(x)$

$$Q_2 = (a_2, a_2), \text{ e così via...}$$

Nel disegno la successione a_n è crescente e tende all'incontro dei 2 grafici, cioè ad una soluzione dell'eq. $f(x) = x$.

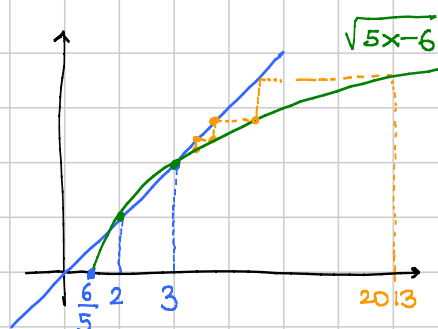
Per fare dimostrazioni formali vedremo 2 "tecniche":

- PIANO CON LA MONOTONIA,
- PIANO CON LA DISTANZA.

PIANO CON LA MONOTONIA

Esempio 1 $a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6}$
 $a_0 = 2013$

Disegno $f(x) = \sqrt{5x-6}$



Per sistemare correttamente i grafici, devo

- * risolvere $f(x) = x \rightsquigarrow x = 2$ e $x = 3$
- * risolvere $f(x) > x \rightsquigarrow x \in (2, 3)$

Dal grafico congetture che a_n è decrescente e $a_n \rightarrow 3$.

- Piano**
- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (zona di appartenenza)
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (monotonia)
 - (iii) $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ (esistenza del limite in $\mathbb{R}$ o $\bar{\mathbb{R}}$...)
 - (iv) $L = 3$ (chi è il limite)

Dim (i) 1° modo Induzione + disequazione

Passo base: banale

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \geq 3$ Tesi $a_{n+1} \geq 3$

$a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \stackrel{?}{\geq} 3$ Risolvo la diseq. ed ottengo $a_n \geq 3$
 che è quello che so per ipotesi.

Oppure:

$$a_n \geq 3 \Rightarrow 5a_n \geq 15 \Rightarrow 5a_n - 6 \geq 9 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{5a_n - 6} \geq \sqrt{9} = 3.$$

2° modo Induzione + applico $f(x)$

Nel passo induttivo prendo l'ipotesi $a_n \geq 3$ e applico $f(x)$ ottenendo

$$f(a_n) \geq f(3), \quad \text{cioè} \quad \underset{f(a_n)}{a_{n+1}} \geq \underset{f(3)}{3}$$

PIANO CON LA DISTANZA

Pongo $d_n = |a_n - 3|$
 = distanza di a_n dal
 presunto limite

Obiettivo: dimostrare che $d_n \rightarrow 0$, che implica $a_n \rightarrow 3$

Piano

(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (come prima)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (inclusione a partire da (ii))

(iv) $d_n \rightarrow 0$ (Carabinieri a partire da (iii))

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^n d_0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

È importante che al pto (ii) ci sia
 un coeff. fisso < 1 (ad. esempio $\frac{1}{6}$)

Dim. (ii)

uso ric.

$$\begin{aligned}
 d_{n+1} &= |a_{n+1} - 3| \stackrel{\downarrow}{=} |\sqrt{5a_n - 6} - 3| = |(\sqrt{\dots} - 3) \frac{\sqrt{\dots} + 3}{\sqrt{\dots} + 3}| \\
 &= \frac{|5a_n - 15|}{\sqrt{5a_n - 6} + 3} = \frac{5 d_n}{\sqrt{5a_n - 6} + 3} \leq \frac{5}{6} d_n
 \end{aligned}$$

$\uparrow$
 denum. + piccolo:
 molto $a_n = 3$

Non sono riuscito a dim. che $d_{n+1} \leq \frac{1}{6} d_n$, ma ho dimostrato
 che $d_{n+1} \leq \frac{5}{6} d_n$ e questo mi basta perché $\frac{5}{6} < 1$

Cosa ho in realtà fatto?

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 3| = |f(a_n) - f(3)| \leq L |a_n - 3| = L d_n$$

$\uparrow$
 uso ricom. +
 $f(3) = 3$

dove L è la costante di Lipschitz (limiti) di $f(x)$ nella zona
 interessata, nel nostro caso per $x \geq 3$.

Volendo L la posso calcolare con il sup della derivata, cioè

$$L = \sup \{ |f'(x)| : x \geq 3 \}$$

$$= \sup \left\{ \frac{5}{2\sqrt{5x-6}} : x \geq 3 \right\} = \frac{5}{6}$$

Piano con la monotonia:

- * $f(x) = x \rightarrow$ risolvere
- * $f(x) > x \rightarrow$ risolvere
- * $f(x)$ crescente nella zona interessata

Piano con la distanza:

- * $f(x) = x \rightarrow$ risolvere
- * $f(x)$ lip. nella zona con costante $L < 1$.

Oss. Il piano con la distanza fornisce una stima della velocità di convergenza. Nell'esempio

$$d_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n d_0.$$

SSSUP 2013

-

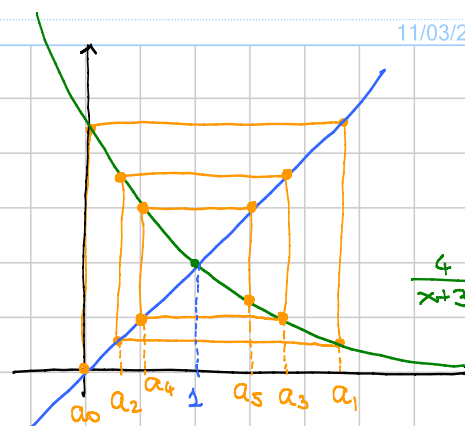
LEZIONE 14

Titolo nota

11/03/2013

Caso spiraleggiante

$$a_{n+1} = \frac{4}{a_n + 3} \quad a_0 = 0$$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando"

Due tipi di piano

* PIANO CON LA DISTANZA

* PIANO CON LE 2 SOTTOSECUSSIONI

Per il piano con la distanza, serve una cosa in cui $f(x)$ è Lip. con costante < 1 .

$$|f'(x)| = \frac{4}{(x+3)^2} \leq \frac{4}{9} \quad \forall x \geq 0$$

Piano Pongo $d_n := |a_n - 1|$

↑ presunto limite

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(banale induzione)

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{4}{9} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(banale induzione)

(iv) $d_n \rightarrow 0$

(Cauchyiani)

Dim. di (ii)

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| \leq \frac{4}{9} |a_n - 1| = \frac{4}{9} d_n$$

$\uparrow$ def. $\quad \uparrow$ ric. + $f(1)=1 \quad \uparrow$ Lip $\quad \uparrow$ def.

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{4}{3a_{n+1}} \quad a_0 = 0$

Il disegno è molto simile a prima.

$$|f'(x)| = \frac{12}{(3x+1)^2} \quad \sup \{ |f'(x)| : x \geq 0 \} = 12 \text{ e non va bene}$$

Oss. $|f'(1)| = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} < 1$. Quindi esiste un intorno di 1 in cui $|f'(x)| \leq \frac{7}{8}$
 ↑ più di $\frac{3}{4}$, meno di 1

Idea: ① cerco $\delta > 0$ tale che $|f'(x)| \leq \frac{7}{8}$ per ogni $x \in [1-\delta, 1+\delta]$

② itero a mano la successione fino a quando non trovo un n_0 tale che $|a_{n_0} - 1| \leq \delta$

③ Panto con il piano con la distanza a partire da n_0 .

Alternativa: piano con le 2 sottosuccessioni

Idea: a_{2n} è monotona crescente, a_{2n+1} è monotona decrescente

- PIANO**
- (i) $0 \leq a_n \leq 4 \quad (=a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{2m} \leq a_{2m+2} \leq 1 \leq a_{2m+3} \leq a_{2m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R}, a_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R} \quad (\text{banale})$
 - (iv) $l = m = 1$

Dim (i) Induzione + applico $f(x)$

Passo base: banale

Passo induttivo Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 4$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq 4$

Prendo l'ipotesi e applico $f(x)$: GIRO I VERSI perché $f(x)$ è decrescente

$$0 \leq a_n \leq 4 \Rightarrow f(0) \geq f(a_n) \geq f(4) \\ \frac{4}{3} \geq a_{n+1} \geq \frac{4}{13} \geq 0 \text{ che è la tesi}$$

Dim. (ii) Induzione + applico $f(x)$

Passo base: $a_0 \leq a_2 \leq 1 \leq a_3 \leq a_1$

Calcolo: $a_0 = 0$, $a_1 = 4$, $a_2 = f(4) = \frac{4}{13}$. Osservo che

$$a_0 \leq a_2 \leq 1 \leadsto \text{applico } f(x) \leadsto \begin{matrix} f(1) \leq f(a_0) \leq f(a_1) \\ 1 \leq a_3 \leq a_1 \end{matrix}$$

Passo induttivo Ipotesi: $a_{2m} \leq a_{2m+2} \leq 1 \leq a_{2m+3} \leq a_{2m+1}$

Applico $f(x)$: $f(a_{2m}) \geq f(a_{2m+2}) \geq f(1) \geq f(a_{2m+3}) \geq f(a_{2m+1})$
 $a_{2m+1} \geq a_{2m+3} \geq \boxed{1 \geq a_{2m+4} \geq a_{2m+2}}$

perzo della tesi

Applico $f(x)$ al perzo della tesi: $f(1) \leq f(a_{2m+4}) \leq f(a_{2m+2})$

$$\boxed{1 \leq a_{2m+5} \leq a_{2m+3}}$$

perzo restante della tesi

Dim. (iv)

$$a_{2m+1} = \frac{4}{3a_{2m} + 1}$$

$$\downarrow$$

$$m = \frac{4}{3l + 1}$$

$$a_{2m+2} = \frac{4}{3a_{2m+1} + 1}$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{4}{3m + 1}$$

Otengo un sistema in m ed l :
$$\begin{cases} 3ml + m = 4 \\ 3ml + l = 4 \end{cases}$$

Sottraendo ottengo $m = l$ e poi $3l^2 + l = 4 \leadsto l = 1$

$$l = -\frac{4}{3} \rightarrow \text{NO per (i)}$$

Lemma (delle 2 sottosuccessioni) Sia a_n una successione.

Se $a_{2m} \rightarrow l$ e $a_{2m+1} \rightarrow l$ (stesso $l \in \mathbb{R}$), allora $a_n \rightarrow l$

Alternativa: osservo che $a_{2m+2} = f(f(a_{2m}))$

$$a_{2m+3} = f(f(a_{2m+1}))$$

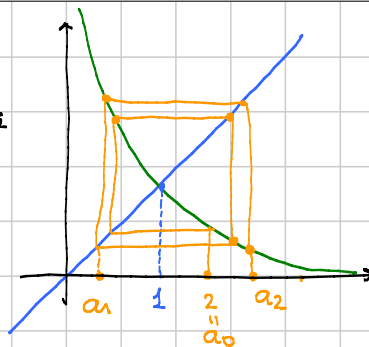
e $f(f(x))$ è crescente, quindi si ricasca nel caso monotono.

Esempio 3

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2a_n^2}$$

$$a_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x^2} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}$$



Vediamo se ci sono speranze di lip.:

$$|f'(x)| = \left| -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} \right| = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

In $x=1$ si ha $|f'(1)| = \frac{3}{2}$, quindi NON esiste un intorno di $x=1$ in cui $f(x)$ è Lip. con costante < 1 !!

L'idea è che ci sia spiraleggiamento USCENTE:

$$a_0 = 2 \quad a_1 = \frac{3}{8} \quad a_2 = \frac{\frac{3}{8} + 1}{2 \cdot \frac{9}{64}} = \frac{11}{8} \cdot \frac{32}{9} = \frac{44}{9} > 2$$

È successo che $1 \leq a_0 \leq a_2$

Applico $f(x)$: $f(1) \geq f(a_0) \geq f(a_2)$, cioè $1 \geq a_1 \geq a_3$

Applico $f(x)$: $f(1) \leq f(a_1) \leq f(a_3)$, cioè $1 \leq a_2 \leq a_4$

Quindi sui pari cresce, sui dispari decresce...

PIANO (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile: serve per applicare $f(x)$)

(ii) $a_{2m+3} \leq a_{2m+1} \leq 1 \leq a_{2m} \leq a_{2m+2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

(conclusione con doppio appello $f(x)$)

(iii) $a_{2m+1} \rightarrow l \in \mathbb{R} \quad , \quad a_{2m} \rightarrow m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(decresce + ≥ 0)

(cresce ...)

(iv) $l = 0 \quad m = +\infty$

Dam. (iv) Supponiamo per assurdo che sia $m \in \mathbb{R}$. Allora passo al limite nelle ricorrenze

$$a_{2m+1} = \frac{a_{2m} + 1}{2a_{2m}^2}$$

$$\downarrow$$

$$m = \frac{l+1}{2l^2}$$

$$a_{2m+2} = \frac{a_{2m+1} + 1}{2a_{2m+1}^2}$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{m+1}{2m^2} \quad [\text{Invertito } m \text{ ed } l \dots]$$

... come prima si ottiene $m = l = 1$, ma questi sono incompatibili con il pto (ii) in quanto ad esempio $a_{2m} \geq a_0 = 2$.

L'unica possibilità rimasta è che $m = +\infty$. A questo pto:

$$l = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{a_{2m} + 1}{2a_{2m}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x^2} = 0,$$

— 0 — 0 —

Conclusioni :

- * Lo spiraleggiamento dipende dalla decrescenza di $f(x)$
- * L'essere entrante od uscente dipende da f' nel pto d'incontro,
- * Volendo è tutto deciso da a_0, a_1, a_2

— 0 —

SSSUP 2013 - LEZIONE 15

Titolo nota

18/03/2013

Piano con la distanza Sia $f(x)$ una funzione e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f(x_0) = x_0$

(ii) $\exists \delta > 0$ tale che, nell'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ si ha che $f(x)$ è lip. con una certa costante $L < 1$

$\uparrow$ stretto

Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che la successione per ricorrenza

$$a_0 = \alpha \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tende ad x_0 .

Dim.: (i) $x_0 - \delta \leq a_n \leq x_0 + \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) posto $d_n := |a_n - x_0|$ si ha che $d_{n+1} \leq L d_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $d_n \leq L^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

(iv) $d_n \rightarrow 0$, dunque $a_n \rightarrow x_0$.

Dim. (ii): $d_{n+1} = |a_{n+1} - x_0| = |f(a_n) - f(x_0)| \leq L |a_n - x_0| = L d_n$

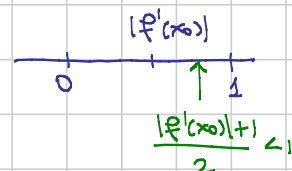
$\uparrow$ def. $\uparrow$ ric. + $x_0 = f(x_0)$ $\uparrow$ Lip $\uparrow$ def.

— 0 — 0 —

Corollario Se f è derivabile con f' continua e $f(x_0) = x_0$ e $|f'(x_0)| < 1$, allora $\exists \delta > 0$ per cui vale l'ipotesi del teorema.

Dim. Se $|f'(x_0)| < 1$, allora in un intorno di x_0 si ha che

$$|f'(x)| \leq \frac{|f'(x_0)| + 1}{2} = L < 1$$



quindi in quell'intorno $f(x)$ è lip. con costante $L < 1$.

— 0 — 0 —

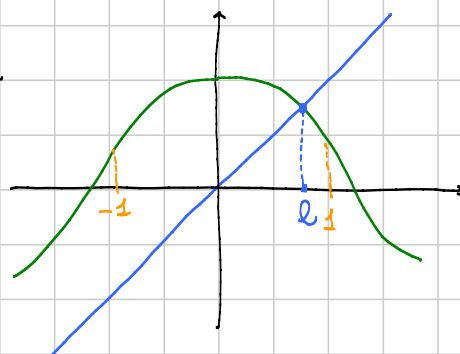
Detto altrimenti: partendo vicino a x_0 e continuando ad iterare $f(x)$ arrivo in x_0 .

Esempio 1 $a_0 = 2013$ $a_{n+1} = \cos(a_n)$

[cioè: scrivere 2013 sulla calcolatrice e continuare a premere cos]

Esercizio: $\cos x$ e x si incontrano in un unico punto ℓ

[Basta osservare che $g(x) = x - \cos x$ è strettamente crescente (perché?), quindi iniettiva, ed è anche surgettiva (perché?)].



Prima idea: $f(x) = \cos x$ è Lip. con costante $L = 1$, e questo non va bene.

Seconda idea: $a_n \in [-1, 1]$ per ogni $n \geq 1$ (banale induzione), quindi quello che conta è la costante di Lip. di $f(x) = \cos x$ in $[-1, 1]$.

In $[-1, 1]$ la costante di Lip. è

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in [-1, 1] \} = \sup \{ |\sin x| : x \in [-1, 1] \} = \sin 1 < 1$$

Quindi posso fare il piano con la distanza con $L = \sin 1$.

Piano: (i) $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) posto $d_n := |a_n - \ell|$ si ha che $d_{n+1} \leq \sin 1 \cdot d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq (\sin 1)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, quindi $a_n \rightarrow \ell$.

Volevo stimare la velocità di convergenza, basta usare il pto (iii), o meglio ancora

$$(iii)' \quad d_n \leq (\sin 1)^{n-1} d_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
 $0 \leq d_1 \leq 2$

$$d_n = |a_n - \ell| \leq |a_1| + |\ell| \leq 2$$

— 0 — 0 —

Piano con la monotonia Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = x_0$.

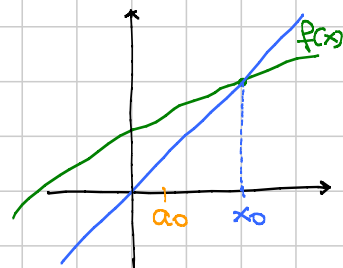
Supponiamo che

- (i) $a_0 < x_0$
- (ii) $f(x) > x$ per ogni $x \in [a_0, x_0]$
- (iii) $f(x)$ sia debolmente crescente in $[a_0, x_0]$.

Allora la successione per ricorrenza

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

tende ad x_0



- Dim.
- (i) $a_0 \leq a_n \leq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ricorrenza + ipotesi (ii))
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = x_0$ (passare ricorrenza al limite).
- o — o —

variante: Supponiamo che $f(x) > x$ per ogni $x \geq a_0$ e f continua.
Allora la successione $a_{n+1} = f(a_n)$ tende a $+\infty$

- Dim.
- (i) $a_n \geq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ricorrenza + ipotesi $f(x) > x$)
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (teo. succ. monotone)
 - (iv) $l = +\infty$

Dim. (iv): supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$

Allora posso passare al limite nella ricorrenza:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

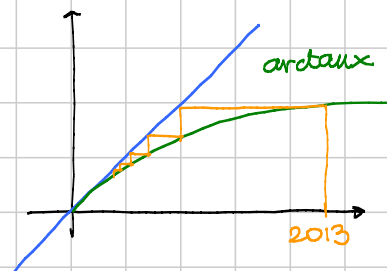
↓

$$l = f(l)$$

Questa equazione non ha soluzioni reali $\geq a_0$ (le uniche compatibili con il punto (i)) per via dell'ipotesi che $f(x) > x$ per ogni $x \geq a_0$.
L'unica possibilità rimasta è $l = +\infty$.

— o — o —

Esempio 2 $a_0 = 2013$
 $a_{n+1} = \arctan a_n$



Si vede facilmente con la monotonia che $a_n \rightarrow 0$. Per dimostrarlo serve sapere che

- $\arctan x = x$ se e solo se $x = 0$,
- $\arctan x \leq x$ per ogni $x \geq 0$,
- $\arctan x$ è crescente in $[0, +\infty)$.

Domanda: stimare la velocità di convergenza.

Purtroppo la distanza non funziona perché $f(x) = \arctan x$ è lip. con costante 1 in ogni intervallo che contiene $x=0$ ($f'(0) = 1$).

[N.B.: questo dice che non posso dimostrare la convergenza con la distanza, serve proprio la monotonia].

Ci aspettiamo una convergenza lenta, del tipo $a_n \sim \frac{a}{n^b}$

[Brutal mode: ricerca euristica di a e b . Impongo $a_{n+1} = \arctan a_n$

$$\frac{a}{(n+1)^b} = \arctan \frac{a}{n^b} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{a}{n^b} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{n^{3b}}$$

$$\uparrow \text{arctan } x = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{a}{(n+1)^b} \sim \frac{a}{n^b} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{n^{3b}} \quad \text{Moltiplico per } n^b$$

$$\frac{a n^b}{(n+1)^b} \sim a - \frac{1}{3} \frac{a^3}{n^{2b}}$$

$$a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-b} \sim a - \frac{1}{3} \frac{a^3}{n^{2b}} \quad (1+x)^a = 1 + ax + \dots$$

$$a \left(1 - \frac{b}{n}\right) = \cancel{a} - \frac{ab}{n} \sim \cancel{a} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{n^{2b}}$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$ab = \frac{1}{3} a^3 \Rightarrow b = \frac{1}{3} a^2$$

$$a^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Dal conto euristico pare ragionevole che sia

$$a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Per dimostrarlo rigorosamente devo verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot a_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Dim. Basta dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a_n^2 = \frac{3}{2}$, cioè che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{n} \rightarrow +\infty}{\boxed{\frac{1}{a_n^2}} \rightarrow +\infty} = \frac{3}{2}$$

Verificate le ipotesi, mi riduco all' "Hôpital per successioni" con n e $\frac{1}{a_n^2}$. Quindi il limite dato è uguale al

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{(\arctan a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{(\arctan x)^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \arctan^2 x}{x^2 - \arctan^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - (x - \frac{1}{3}x^3 + \dots)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

— 0 — 0 —

Esercizio Capire come va a 0 la successione

$$a_{n+1} = a_n - 2a_n^4 \quad a_0 = \frac{1}{2}.$$

SSSUP 2013

-

LEZIONE 16

Titolo nota

18/03/2013

Succ. per ricorrenza non autonoma

$$a_{n+1} = f(a_n, n)$$

↑
la legge di passaggio
cambia di volta in volta

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \quad a_1 = \frac{1}{2}$

Calcolando un po' di termini: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{32}$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $n=1$ $n=2$

Idea: $a_n \rightarrow 0$.

- Piano
- (i) $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (induzione)
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile)
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (solito)
 - (iv) $l = 0$

Dim (iv) Passo al limite nella ricorrenza

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $l = 0$

$\uparrow \rightarrow \mathbb{Q}^2 \in \mathbb{R}$
 $\uparrow \rightarrow +\infty$

[evitare $\frac{a_n^2}{n} \rightarrow \frac{0^2}{n} \rightarrow 0$]

- Piano B
- (i) $0 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim (ii) Grazie ad (i) abbiamo che

$$0 \leq a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

Per i Carabinierei si ha quindi che $a_{n+1} \rightarrow 0$, il che è equivalente a dire che $a_n \rightarrow 0$

Achtung! Non pensare nemmeno per un attimo che $a_n \rightarrow 0$ in quanto il denominatore nella ricorrenza tende a $+\infty$.

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \quad a_1 = 2$

Un po' di termini: $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = \frac{64}{3}, \dots$

Idea: $a_n \rightarrow +\infty$ [Esercizio: provare a quali fallimenti si va incontro con un piano basato sulla monotonia]

PIANO (i) $a_n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \rightarrow +\infty$ (banale dall' (i))

Dim (i) Provo per induzione. Passo base: banale

Passo induttivo: ipotesi: $a_n \geq 2^n$ Tesi $a_{n+1} \geq 2^{n+1}$

$$\text{Dim. passo induttivo: } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n} \geq \frac{2^{2n}}{n} \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso ipotesi

Controllo la speranza: $2^{2n} \geq n \cdot 2^{n+1}$, cioè $2^{n-1} \geq n$.

Questa si dimostra facilmente per induzione o usando Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Con $x=1$ è proprio quello che serve: $2^n \geq n+1$.

Morale: è molto più facile dimostrare che $a_n \geq 2^n$ che dimostrare che $a_n \geq n$ (quest'ultimo per induzione non riesce).

Oss. In alternativa avrei potuto provare un pito (i) del tipo $a_n \geq n^2$ (provare che succede per induzione).

Achtung! Evitare ragionamenti di questo tipo

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{a_n^2}{n} \leq a_n \iff a_n \leq n \text{ e questo per } n \text{ grande è vero.}$$

(No: quando n cresce possiamo crescere entrambi).

Esempio 3 $a_1 = 2013$ $a_{n+1} = 7 + \frac{n^{100}}{2^n} a_n$

Idea: per un po' all'inizio cresce, poi la smette e tende a 7.

PIANO Da un certo m_0 tu poi si ha che $\frac{n^{100}}{2^n} \leq \frac{1}{2}$

Pongo $M := \max \{a_n : 1 \leq n \leq m_0\}$ e dimostro per induzione che $a_n \leq M + 14 \quad \forall n \geq m_0$.

A quel p.to sarai facile concludere con i carabinieri (farlo!)

Dim. per induzione che $a_n \leq M + 14$ per ogni $n \geq m_0$.

Passo base: banale $n = m_0$

Passo induttivo: Ipotesi: $a_n \leq M + 14$ Tesi: $a_{n+1} \leq M + 14$

Dim. $a_{n+1} = 7 + \frac{n^{100}}{2^n} \boxed{a_n} \leq 7 + \frac{1}{2} (M + 14) = \frac{M}{2} + 14 \leq M + 14$
 $\leq \frac{1}{2} \leq M + 14$

Osservazione È una induzione che parte da un p.to misterioso m_0 con un valore misterioso M (poterò usare $M = a_{m_0}$)
 —o —o —

Esempio 4 $a_1 = 2013$ $a_{n+1} = 7\sqrt{a_n} + \frac{1}{n}$

Idea: $a_n \rightarrow 49$

Osservazione iniziale: gli unici limiti reali possibili sono 0 e 49

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l = \sqrt[l]{l} + 0$$

$$l = \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 49 \end{matrix}$$

PIANO

(i) $a_n \geq 49 \quad \forall n \geq 1$ (banale)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (banale)

(iv) $l = 49$ (banale)

Dim (ii)

Per induzione. Passo base $a_2 \leq a_1$ banale

Passo induttivo

Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$

Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

$$\text{Dim. : } a_{n+2} = \sqrt[n+1]{a_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n+1} \leq \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

$\uparrow$ ric. $\uparrow$ uso Hp. $\uparrow$ Den. + piccolo

Esempio 3

$$a_1 = 0$$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n}$$

Idea: a_n continua a tendere a 49. MA: la crescita NON funziona per induzione !!!

PIANO CON ALTERNATIVA

Ci sono 2 possibilità:

① $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ma allora è crescente, quindi...)

② $\exists n_0$ t.c. $a_{n_0+1} < a_{n_0}$. Allora da n_0 in poi sarà decrescente. Questo si fa per induzione.

In ogni caso è monotona.

Domanda: siamo nel caso ① o nel caso ② ???

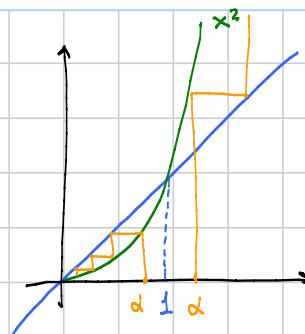
SSSUP 2013 - LEZIONE 17

Titolo nota

25/03/2013

VALORI SOGLIA

Esempio 0 $a_{n+1} = a_n^2$
 $a_0 = \alpha \geq 0$



- Per $\alpha \in [0, 1)$ si ha che $a_n \rightarrow 0$
- Per $\alpha \in (1, +\infty)$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$
- Per $\alpha = 1$ si ha che $a_n \equiv 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in particolare $a_n \rightarrow 1$
 ↑ valore soglia.

Esempio 1 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \left(a_n + \frac{1}{n} \right) \\ a_1 = \alpha \geq 0 \end{cases}$ Studiare a_n al variare di α .

Fatto 1 Esistono α per cui $a_n \rightarrow +\infty$. Basta prendere un qualunque $\alpha \geq 1$ (la successione risulta maggiore di quella al pto pec.)

Fatto 2 Per comodità chiamiamo $a_n(\alpha)$ la succ. che parte con $a_1(\alpha) = \alpha$.
 Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \rightarrow +\infty$, allora per ogni $\beta > \alpha$ si ha che $a_n(\beta) \rightarrow +\infty$

Dim. Basta dimostrare per induzione che $a_n(\beta) \geq a_n(\alpha)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

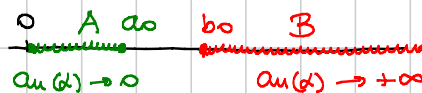
Fatto 3 Esistono α per cui $a_n(\alpha) \rightarrow 0$. Basta prendere $\alpha = 0$.

Fatto 4 Se per un certo $\alpha > 0$ si ha che $a_n(\alpha) \rightarrow 0$, allora per ogni $\beta \in [0, \alpha]$ si ha che $a_n(\beta) \rightarrow 0$

Dim. Basta verificare che $0 \leq a_n(\beta) \leq a_n(\alpha) \quad \forall n \geq 1$.

Punto della situazione:

- c'è una zona A t.c.
 $a_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in A$
- c'è una zona B t.c. $a_n(x) \rightarrow +\infty \quad \forall x \in B$
- La zona A è tutta a sx della zona B.



È interessante considerare $b_0 = \inf B$ e $a_0 = \sup A$

Fatto 5 La zona B è un aperto. Se lo dimostro, ho escluso che $b_0 \in B$.

Sia $x \in B$. Voglio dimostrare che $a_n(x) \rightarrow +\infty$ per ogni x in un opportuno intorno $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ di x .

Visto che $a_n(x) \rightarrow +\infty$, allora esiste di sicuro $\bar{n} \geq 1$ tale che $a_{\bar{n}}(x) > 1$. Ora osservo che la funzione $x \rightarrow a_{\bar{n}}(x)$ è una funzione continua, perché ottenuta come composizione di funzioni continue: ad esempio $a_2(x) = x(x+1)$, $a_3(x) = a_2(x)(a_2(x) + \frac{1}{2})$, e così via...

Ma allora per continuità avremo che $a_{\bar{n}}(y) > 1$ per ogni y in un opportuno intorno di x . Quindi è facile concludere che $a_n(y) \rightarrow +\infty$ per ogni y in un intorno. (sto usando che, appena supera 1, la succ. è condannata a tendere a $+\infty$).

Fatto 6 La zona A è aperta. In particolare $a_0 \notin A$ e a maggior ragione $b_0 \notin A$ in quanto $b_0 \geq a_0$.

Lemma Se esiste un $\bar{n} \geq 1$ tale che $a_{\bar{n}+1}(x) < a_{\bar{n}}(x) < 1$, allora necessariamente $a_n(x) \rightarrow 0$.

Dim. Per induzione si dimostra che $a_{m+1}(x) \leq a_m(x) \quad \forall m \geq \bar{n}$. Infatti... al passo induttivo ritrovo...

$$a_{m+2} = a_{m+1} \left(a_{m+1} + \frac{1}{m+1} \right) \leq a_m \left(a_m + \frac{1}{m} \right) = a_{m+1}.$$

A questo punto i possibili limiti sono $l = 0$ e $l = 1$, ma questo...

Sia $\alpha \in A$, quindi $a_n(\alpha) \rightarrow 0$. Allora per forza esiste un $\bar{n}$ tale che

$$a_{n+1}(\alpha) < a_n(\alpha) < 1$$
 $\uparrow$ vera frequentemente
 $\uparrow$ vera definitivamente

Ma allora entrambe le disuguaglianze sono vere per ogni $\beta \in$ intorno opportuno di α , quindi per il lemma tutto l'intorno sta in A .

Fatto 7 Per $\alpha = a_0$ e per $\alpha = b_0$ si ha che $a_n \not\rightarrow +\infty$ e $a_n \not\rightarrow 0$.

Cosa può fare a_n ? Ci sono due possibilità

- $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, e allora per forza $l = 1$
- a_n non ha limite.

Tuttavia per il lemma non è possibile che $a_{n+1} < a_n$ per un qualche n , quindi per forza $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma allora il limite esiste e fa per forza 1.

Oss. Qui non uso che sta sotto 1 se devo solo dim. l'esistenza del limite.

Conclusione: esiste almeno un valore di α per cui $a_n(\alpha) \rightarrow 1$.

Questo è vero per ogni $\alpha \in [a_0, b_0]$.

Fatto 8 $a_0 = b_0$. Consideriamo la successione $a_n(a_0)$ e $a_n(b_0)$.

Poniamo $d_n := y_n - x_n$ (= differenza). Intanto $d_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$.
 $\uparrow$ stesso se $b_0 > a_0$

$$d_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = y_n \left(y_n + \frac{1}{n} \right) - x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$$

$$= y_n^2 - x_n^2 + \frac{1}{n} (y_n - x_n)$$

$$= \left(y_n + x_n + \frac{1}{n} \right) (y_n - x_n)$$

$$= \underbrace{\left(y_n + x_n + \frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 2} \cdot d_n$$

Quindi definitivamente $d_{n+1} \geq \frac{3}{2} d_n$ da cui $d_n \rightarrow +\infty$

D'altra parte $d_n = y_n - x_n \rightarrow 0$.

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

L'assunto è nato dal supporre che $d_n > 0$ per ogni $n \geq 1$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}$ $a_1 = \alpha > 0$

- Esistono dei dati per cui $a_n \rightarrow +\infty$
 - " " " " " $a_n \rightarrow 0$
 - Come prima A sta a sx di B .
 - Quasi come prima A è una zona aperta
- (Lemma 1: Se $a_n \leq \bar{n}$, allora da lì in poi è decrescente e tende a 0)
- Posto $b_0 = \sup B$ si ha che $a_n(b_0) \rightarrow +\infty$ (o $a_n \leq n$ per un certo n , ma allora tende a 0, o $a_n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e allora tende a $+\infty$)

Idea: nella zona B le soluzioni tendono a $+\infty$ molto velocemente (più che esponenzialmente).

Per $\alpha = b_0$ la soluzione tende ancora a $+\infty$, ma circa come n .

— 0 — 0 —

SSSUP 2013

-

LEZIONE 18

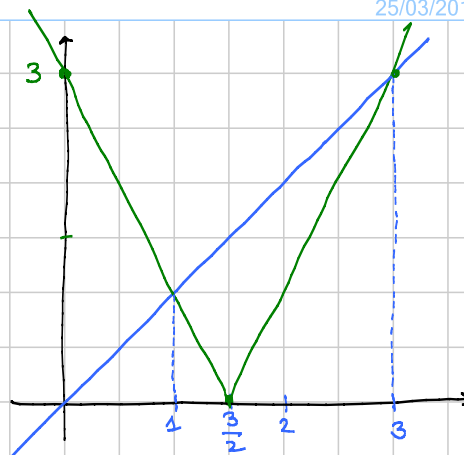
Titolo nota

25/03/2013

Esempio 1 $\begin{cases} x_{n+1} = |2x_n - 3| \\ x_0 = \sqrt{2} \end{cases}$

Facile: se $x_0 > 3$ oppure $x_0 < 0$,
allora $x_n \rightarrow +\infty$.

Consideriamo $x_0 = \sqrt{2}$.



Fatto 1 $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(basta osservare che $0 \leq f(x) \leq 3$ per ogni $x \in [0, 3]$)

Fatto 2 Restano 2 possibilità

- x_n non ha limite
- $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma allora $l = 1$ oppure $l = 3$

Fatto 3 Se $x_n \neq 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora x_n non può tendere a 3.

Dim.: Se x_n tendesse a 3, allora definitivamente avrei che $x_n \in [\frac{3}{2}, 3)$. Allora pongo $d_n := |x_n - 3|$ e verifico facilmente che $d_{n+1} = 2d_n$ definitivamente, il che è assurdo.

Fatto 4 Se $x_n \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora x_n non può tendere ad 1.

Dim.: ... sarebbe $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$ definitivamente... Pongo $d_n := |x_n - 1|$ e avrei che $d_{n+1} = 2d_n$ definitivamente, il che non è possibile a meno che non valga 0...

per induzione

Fatto 5 Se $x_0 = \sqrt{2}$, allora $x_n = k_n \sqrt{2} + r_n$ per opportuni interi k_n ed r_n , con $k_n \neq 0$. Quindi x_n è sempre irrazionale, quindi non può essere mai $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$.

Conclusione: x_n non ha limite e vaga senza meta dalla zona $[0, \frac{3}{2}]$ alla zona $[\frac{3}{2}, 3]$.

Questo è il CAOS.

Oss. Cosa causa il caos? La pendenza maggiore di 1 nei p.ti di intersezione.

— 0 — 0 —

Esempio 2 EQUAZIONE LOGISTICA

$$x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \quad (0 \leq x_0 \leq 1)$$

parametro

Modello: x_n = densità di MAIALI in una certa zona al tempo $t=n$.

Modello semplice: $x_{n+1} = a x_n$

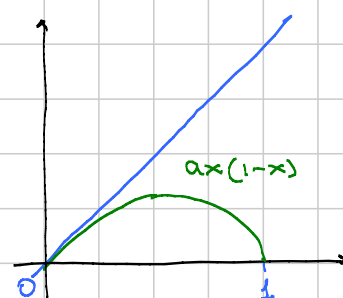
↑ tasso di riproduzione

Cosa succede dipende dall'essere $a > 1$ o $a < 1$.

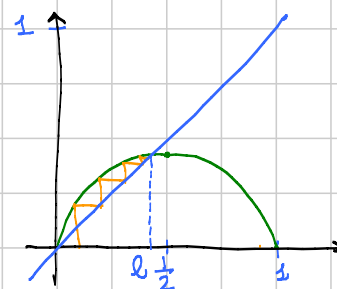
Il termine $(1-x_n)$ pone un freno alla riproduzione quando la densità si avvicina ad 1.

Obiettivo: capire, in funzione di a , come vanno le cose, cioè il comportamento di x_n .

- Se $a \in [0, 1]$, allora $f(x) = ax(1-x)$ sta sotto la bisettrice. È facile vedere che, qualunque sia $x_0 \in [0, 1]$, si ha che $x_n \rightarrow 0$ decrescendo (più con la monotonia).

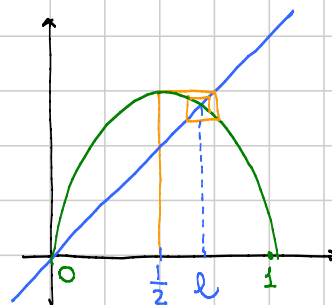


- Se $a \in (1, 2]$, allora $f(x)$ interseca x nel tratto crescente. Indicando con L l'intersezione > 0 , si ha che, per ogni $x_0 \in (0, 1]$, $x_n \rightarrow L$.



La convergenza avviene in modo definitivamente monotono.

- Se $a > 4$, partendo da $x_0 = \frac{1}{2}$ ottengo $x_2 < 0$, e il modello non ha molto senso.
- Se $a \in (2, 4)$ e la derivata nel pto di incontro ha valore assoluto minore di 1, allora c'è spiraleggiamento ad l .



$$l = al(1-l) ; 1 = a(1-l)$$

$$1-l = \frac{1}{a} \Rightarrow l = 1 - \frac{1}{a}$$

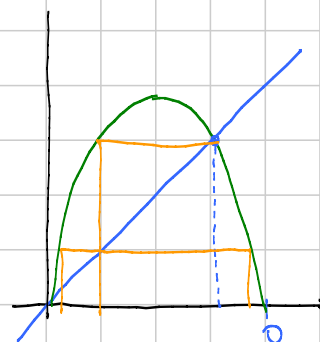
$$f'(x) = (ax - ax^2)' = a - 2ax \Rightarrow f'(l) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2a + 2 = -a + 2$$

$$|f'(l)| \leq 1 \Leftrightarrow |-a+2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -a+2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ a \leq 3 & a \geq 1 \end{matrix}$$

Quindi per $a \in (2, 3]$ c'è la possibilità di spiraleggiamento ad l
(Dim.: fare il piano con le 2 sottosuccessioni)

- Per $a \in (3, 4]$ la successione non può tendere né a 0, né ad l , a meno che non valga 0 o non valga l ad un certo punto



N.B. È possibile arrivare in l in un numero finito di passaggi, se x_0 è fatto apposta.

Non è possibile arrivare ad l al limite.

Per gli altri valori di x_0 è il caos, come nell'esempio 1.

— o — o —

Back to $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n}$. Voglio dim. che esiste un unico valore di x_1 per cui x_n cresce circa come n , cioè per cui $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$.

Idea: pongo $y_n = \frac{x_n}{n}$ e vedo cosa risolve y_n :

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = y_n^2 \frac{n}{n+1}$$

$\uparrow$ uso ricor. $\uparrow$ $x_n = ny_n$

Quindi ora studio $y_{n+1} = y_n^2 \frac{n}{n+1}$

Ci aspettiamo che esista una soglia d_0 b.c.

- se $y_1 > d_0$ si ha che $y_n \rightarrow +\infty$
- se $y_1 < d_0$ si ha che $y_n \rightarrow 0$
- se $y_1 = d_0$, allora $y_n \rightarrow 1$.

Punto chiave: capire che le zone A e B sono aperte.

Altro esempio: $x_{n+1} = (\arctan x_n)^n$

SSSUP 2013 - LEZIONE 019

Titolo nota

08/04/2013

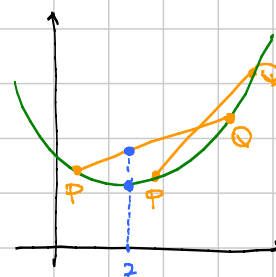
FUNZIONI CONVESSE

Insiemi convessi Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni coppia di pti $x \in A, y \in A$ si ha che il segmento di estremi x e y è tutto contenuto in A . Ci sono 2 tipi di insiemi convessi:

- tutto $\mathbb{R}$,
 - semirette
 - intervalli
- } con o senza estremi

Def. geometrica Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è convessa se, per ogni coppia di pti P e Q del grafico, si ha che il grafico stesso sta "sotto" il segmento PQ .



Def. algebrica $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

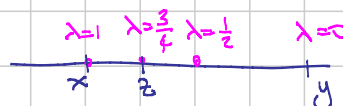
per ogni $x \in A, y \in A, \lambda \in [0, 1]$.

Equivalenza: dati $x \in A$ e $y \in A$, l'espressione $\lambda x + (1-\lambda)y$ rappresenta, quando λ varia in $[0, 1]$, rappresenta il generico p.to del segmento di estremi x e y . Supposto $x < y$, allora $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ verifica

$x \leq z \leq y$ e inoltre

$$\lambda = \frac{y-z}{y-x}$$

$$1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}$$



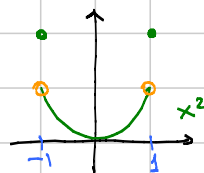
$$\underbrace{f(\lambda x + (1-\lambda)y)}_{f(z)} \leq \underbrace{\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)}_{\text{valore di } z \text{ della retta che passa per i pti del grafico corrispondenti a } x \text{ e } y.}$$

Indice (Concavità e regolarità) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ convesso e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa.

- (1) f è continua in $\text{Int}(A)$ (= parte interna di A). Al bordo può essere discontinua
- (2) f non è obbligata ad essere derivabile, ma f' dove esiste è monotona crescente
- (3) f non è obbligata ad avere f'' , ma f'' dove esiste è ≥ 0 .

Def. Una funzione si dice strettamente convessa se nella definizione vale il $<$ stretto tutte le volte che $x \neq y$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Esempi semplici ① $f(x) = |x|$ convessa ma non derivabile in $x=0$
 ② $A = [-1, 1]$
 $f(x) = x^2$ alzata al bordo



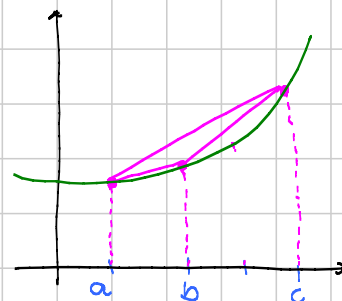
Questa non è continua.

Lemma (dei 3 rapporti incrementali)

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Per ogni $a < b < c$ ($\in A$) si ha che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$



Dim. Scrivo $b = \lambda a + (1-\lambda)c$ dove $\lambda = \frac{c-b}{c-a}$. Per def. ho che

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(c) = f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

Riorganizzando ottengo: $\lambda [f(b) - f(a)] \leq (1-\lambda) [f(c) - f(b)]$, cioè

$$\frac{c-b}{c-a} [f(b) - f(a)] \leq \frac{b-a}{c-a} [f(c) - f(b)]$$

Riorganizzando ancora ottengo 1ª frazione $\leq$ 2ª frazione.

Nuova parentesi:

$$f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(c) = \lambda f(a) + f(c) - \lambda f(c)$$

Riorganizzo: $\lambda [f(c) - f(a)] \leq f(c) - f(b)$

Sostituisco a λ il suo valore e trovo un'altra disuguaglianza.

Per ottenere la 3ª disug. basta scrivere $\lambda f(a) = -(1-\lambda)f(a) + f(a)$ e riorganizzare (esercizio!).

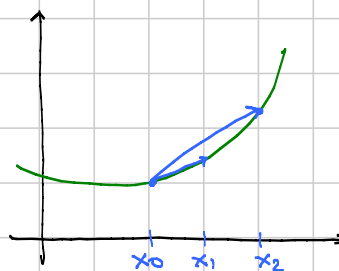
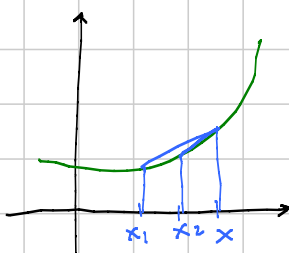
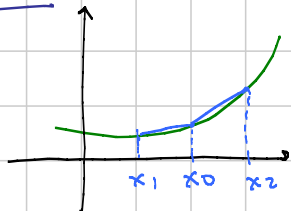
— o — o —

Proposizione Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Consideriamo il rapporto incrementale

$$R_{x_0, x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x \in A \setminus \{x_0\}$$

Allora fissato un qualunque $x_0 \in A$ si ha che $R_{x_0, x}$ è una funzione (debolmente) crescente di x

Dim.



Devo dim. che $x_1 < x_2 \Rightarrow R_{x_0, x_1} \leq R_{x_0, x_2}$

A seconda dei 3 casi

- $x_0 < x_1 < x_2$
- $x_1 < x_2 < x_0$
- $x_1 < x_0 < x_2$

uso la parte che mi serve del lemma.

— o — o —

Detto altrimenti, la funzione

$$R \rightarrow \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R}$$

è debolmente crescente dove è definita.

Teorema Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e sia $x_0 \in \text{Int}(A)$. Allora esistono

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Derivata dx})$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{Derivata sx})$$

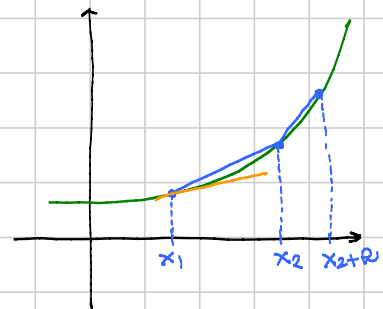
Inoltre si ha che $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ e $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$, viste come funzioni della variabile x , sono debolmente crescenti

Dim.: tutto segue dalla monotonia del rapporto incrementale. Verifichiamo per esempio che $x \rightarrow f'_+(x)$ è deb. crescente

Solito Lemma:

$$\frac{f(x_2+h) - f(x_2)}{h} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'_+(x_1)$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0^+$ ho da fare.



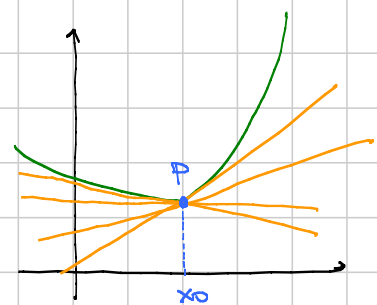
Interpretazione geometrica. La retta tangente al grafico non è obbligata ad esistere, ma possono esserci "due rette tangenti", una da destra e una da sinistra

Teorema Per ogni $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ si ha che

$$f(x) \geq m(x - x_0) + f(x_0) \quad \forall x \in A$$

retta per P con coeff. ang. m

[$f(x)$ sta sopra le rette con coeff. angolare compreso fra la tg. sx e la tg. dx.]



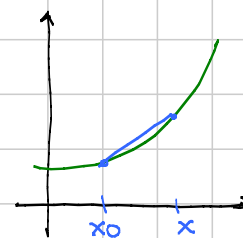
Dim. Solito lemma dei coeff. angolari. Bisogna distinguere i casi $x > x_0$ e $x < x_0$.

Per esempio, quando $x > x_0$ abbiamo che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_+(x_0) \geq m$$

e ora basta moltiplicare per $x - x_0 > 0$ e riorganizzare.

Idem se $x < x_0$, con minimi cambi di segno.



SSSUP 2013

-

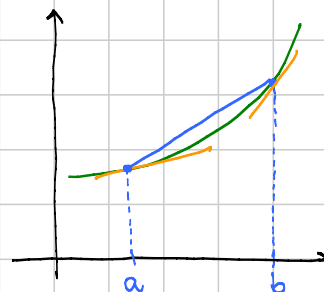
LEZIONE 20

Titolo nota

08/04/2013

Fatto solito: dati $a < b$ si ha che

$$f'_+(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_-(b)$$

Fatto importante Supponiamo che $f'_+(x)$ sia continua in un certo punto x_0 .Allora $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e quindi esiste veramente $f'(x_0)$.Dim. Per ogni $R > 0$ ho che

$$\boxed{f'_+(x_0 - 2R)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto di sopra}}}{f'_-(x_0 - R)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia } f'_-}}{f'_-(x_0)} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ovvia}}}{\boxed{f'_+(x_0)}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{per } R \rightarrow 0}}{f'_+(x_0)}$$

$\downarrow$ perché ho assunto che f'_+ sia continua in x_0

A questo punto $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e fine.Esercizio Dimostrare l'analogo assumendo $f'_-(x)$ continua in x_0 .BLACK BOX Data una funzione monotona (debolmente), l'insieme dei punti in cui NON è continua è NUMERABILE, cioè si può scrivere come $\{x_1, x_2, \dots\}$, cioè come immagine di una successione.Teorema Una funzione convessa è derivabile ovunque tranne al più un insieme numerabile di punti.

Oss. $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ sono quantità finite per ogni $x \in \text{Int}(A)$.
Da questo segue la continuità, allo stesso modo in cui
segue dalla derivabilità standard.

Achtung! Per una funzione derivabile due volte si ha che

$$f \text{ convessa in } A \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in A$$

MA f strett. conv. in $A \Leftarrow f''(x) > 0$ per ogni $x \in A$
 $\nRightarrow$ (solito esempio $f(x) = x^4$)

Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$ e $f''(x)$ non si annulla in un intero
sottointervallo, allora f è strett. convessa.

Fatti sparsi:

① Una funzione convessa può avere ∞ pti di min.



② Una funzione strett. conv. ne ha al più uno (se ne avesse 2,
allora nel pto medio dovrebbe avere valore ancora meno).
Non è obbligata ad avere pti di minimo ($f(x) = e^x$)

③ Una funzione convessa in un intervallo $[a, b]$ ha sempre max
con estremi

(Le funzioni convesse sono comunque sempre semicont. sup.).
Se la funzione non è costante, il max è per forza solo al
bordo.

[Si può vedere con lo stare sopra la retta tangente destra]

④ L'eq. $f(x) = 0$ con f convessa può avere 0 soluzioni, 1 solus,
2 soluzioni o un intero intervallo di soluzioni. Se è strett.
convessa ne ha solo 0, 1, 2 (se ne ha 3 prendo prima e ultima, ...)

Esercizio Cosa si può dire di $f(x) = g(x)$ con f e g convesse (supponendole strett. convesse e senza altri intervalli in cui coincidono).

— o — o —

Disuguaglianze di convessità : $\rightarrow$ JENSEN e derivati
 $\rightarrow$ KARAMATA

JENSEN $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora per ogni $x_1, \dots, x_n$ punti di A e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ si ha che

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

Dim. Caso $n=2$: $f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}_{\lambda x + (1-\lambda)y}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

ed è vera per definizione di funzione convessa.

Supponiamola vera per n e dimostriamola per $n+1$

$$f(\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{\lambda x} + \underbrace{\lambda_{n+1} x_{n+1}}_{(1-\lambda)y}) \leq \quad \text{ho posto } \lambda = 1 - \lambda_{n+1}$$

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = (1-\lambda_{n+1}) f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}{\lambda}}_{\text{Qui posso usare l'ipotesi perché sono } n \text{ variabili e la somma dei coeff. fa 1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq \lambda \left[\frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} f(x_n) \right] + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Guardando il 1° e l'ultimo ho la tesi.

— o — o —

Caso particolare $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ottengo

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

• Caso $f(x) = x^2$ $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}$

Facendo la radice ottengo

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$\uparrow$ media aritmetica $\uparrow$ media quadratica

• Caso $f(x) = \frac{1}{x}$ convessa per $x > 0$

$$\frac{n}{x_1 + \dots + x_n} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + \dots + x_n} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$\uparrow$ media armonica $\uparrow$ media aritmetica

• caso $f(x) = \log x$

Questa è concava per $x > 0$ (cioè $-f$ è convessa), dunque tutto vale con i versi al contrario

$$\log\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} = \log \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

cioè $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

$\uparrow$ media geometrica $\uparrow$ media aritmetica

Esercizio

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q \quad \text{se} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 λ $1-\lambda$

SSSUP 2013 - LEZIONE 21

Titolo nota

22/04/2013

Equazioni differenziali $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (aperto)

$$\begin{array}{ccc} u' = f(t, u) & u(t_0) = u_0 & (t_0, u_0) \in \Omega \\ \uparrow \text{equazione} & \uparrow \text{condizione iniziale} & \\ \text{PROBLEMA DI CAUCHY} & & \end{array}$$

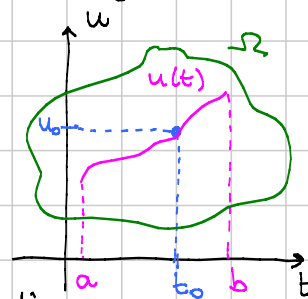


Risolvere un problema di Cauchy vuol dire trovare un intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ con $t_0 \in (a, b)$ ed una funzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ che sia derivabile e verifichi

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Questo in particolare sottintende che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$

Oss. L'insieme di definizione (a, b) della soluzione fa parte delle incognite del problema.



Oss. Si possono considerare anche equazioni più generali

- del tipo $f(t, u, u') = 0$
- con dipendenza da derivate successive: $f(t, u, u', u'', \dots, u^{(k)})$

Nomenclatura: • l'eq. è in forma normale se è del tipo

$$u' = f(t, u)$$

o più in generale

$$u^{(k)} = f(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

- l'eq. è autonoma se non dipende esplicitamente da t

Oss. FONDAMENTALE Se $u(t)$ è soluzione di una eq. AUTONOMA qualunque, allora tutte traslate $v(t) = u(t+c)$, dove definite, sono soluzioni della stessa equazione. [Dim.: OVVIA]

TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo che f sia continua.

Allora il problema ammette almeno una soluzione.

TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ Consideriamo il problema di Cauchy come sopra. Supponiamo che f sia Lipschitziana nella variabile u uniformemente rispetto a t , cioè esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1|$$

per ogni $(t, u_1) \in \Omega$ e ogni $(t, u_2) \in \Omega$.

Allora la soluzione (che esiste per il teorema precedente) è pure unica.

Esempio di non unicità $\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ $\leftarrow$ eq. diff. autonoma con $f(u) = 3|u|^{\frac{2}{3}}$ 

- Una soluzione è banalmente $u(t) \equiv 0$
- Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$. Infatti $u(0) = 0$ e

$$u'(t) = 3t^2$$

$$f(u(t)) = 3|u(t)|^{\frac{2}{3}} = 3|t^3|^{\frac{2}{3}} = 3t^2$$

Ci sono almeno 2 soluzioni.

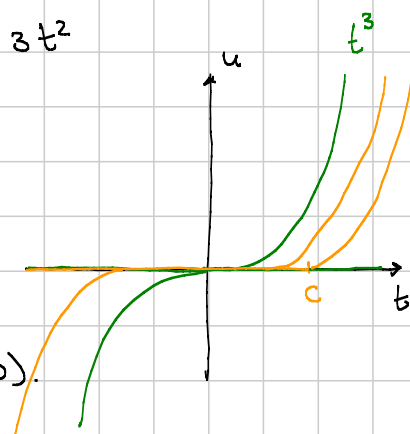
Ce ne sono addirittura infinite! Una è

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ t^3 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

(bisogna verificare che è derivabile pure in $t=0$).

Ma allora ci sono pure tutte le traslate

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq c \\ (t-c)^3 & \text{per } t \geq c \end{cases}$$



Abbiamo ottenuto il fenomeno noto come PENNELLO DI PEANO: tutte le volte che ci sono ALMENO 2 soluzioni, allora per ogni punto tra le 2 passa un'ulteriore soluzione!

Oss. Consideriamo il problema
$$\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

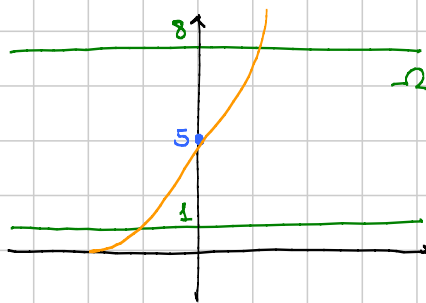
La soluzione è localmente unica, cioè dal punto $(0,5)$ parte una sola soluzione (unica almeno per valori t vicini a 0). Perché?

Considero la funzione $f(t,u)$ come definita solo per $u \in (1,8)$.

In questa zona la funzione $3|u|^{2/3}$ è Lipschitziana (basta che siamo lontani da $u=0$),

quindi la soluzione, fin quando resta in Ω , è unica.

La soluzione è la traslata di t^3 che passa per quel punto, cioè $u(t) = (t + \sqrt[3]{5})^3$. Quando arriva a 0 smette di essere unica.



TEOREMA DI ALTERNATIVA Consideriamo la soluzione di un problema di Cauchy:
$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$
 $\uparrow$ t_0

Dove (cioè per quali t) è definita la soluzione? La soluzione si può estendere nel futuro fino ad un certo istante T , e succede almeno una delle seguenti 3 cose: $\uparrow$ tempo di vita

- ① $T = +\infty$ (si dice che il pbn. di Cauchy ha **esistenza globale** nel futuro)
- ② $T < +\infty$ e

$\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (si dice che c'è **BLOW-UP** per $t = T$)

- ③ $T < +\infty$ e $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \partial\Omega) = 0$ (si dice che c'è **BREAK-DOWN** per $t = T$)
- $\uparrow$ $\uparrow$
pittografico bordo di Ω

Discorsi del tutto analoghi valgono per $t \leq 0$.

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = 7e^t$ e ha esistenza globale per $t \geq 0$ e $t \leq 0$.

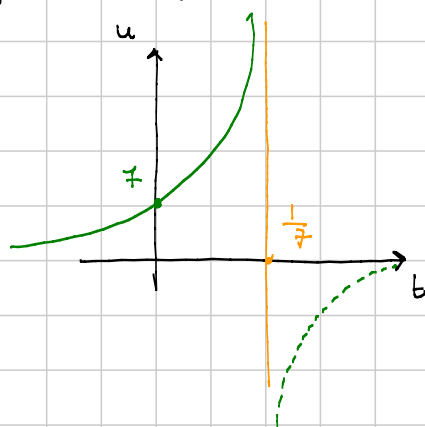
Esempio 2
$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = \frac{1}{\frac{1}{7} - t} = \frac{7}{1 - 7t}$ (verifica!)

Questa ha BLOW-UP per $t = \frac{1}{7}$.

Nel passato c'è esistenza globale.

Il ramo "giusto" è quello che contiene la condizione iniziale.

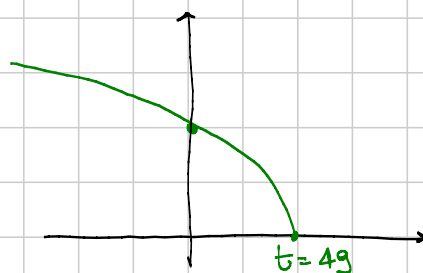


Esempio 3
$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{2u} \\ u(0) = 7 \end{cases}$$

La soluzione è $u(t) = \sqrt{49 - t}$ (verifica!)

Questa ha esistenza globale nel passato e BREAK-DOWN per $t = 49$.

In questo caso $\Omega = \{u \neq 0\}$ e per $t \rightarrow 49^-$ la soluzione va proprio lì!



SSSUP 2013 - LEZIONE 22

Titolo nota

22/04/2013

Studio qualitativo di equazioni differenziali

Determinare come sono fatte le soluzioni senza saper risolvere.

Strumento 1: TEOREMA DELL'ASINTOTO Sia $u: (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita almeno su una semiretta $(A, +\infty)$. Supponiamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Allora per $u'(t)$ ci sono due possibilità

- ① $u'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$
 ② $u'(t)$ non ha limite per $t \rightarrow +\infty$, ma in tal caso
- $$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \geq 0$$

Esempio $u(t) = \frac{\sin t^2}{t}$. È chiaro che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$, ma

$$u'(t) = \frac{2t \cos t^2 \cdot t - \sin t^2}{t^2} = 2 \cos t^2 - \frac{\sin t^2}{t^2}$$

quindi $\limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 2$ e $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = -2$.

Dim. Applico Lagrange nell'intervallo $[n, n+1]$. Ottengo che esiste un p.to $c_n \in (n, n+1)$ tale che

$$\boxed{u(n+1)} - \boxed{u(n)} = u'(c_n) \cdot 1$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 l l

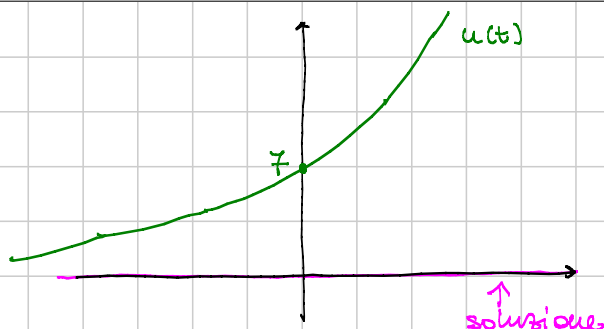
Quindi $u'(c_n) \rightarrow 0$ e ovviamente $c_n \rightarrow +\infty$ poiché $n < c_n < n+1$

Quindi $\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \min_{c_n \rightarrow +\infty} \lim u'(c_n) \leq 0$ e analogo per il $\limsup$.

— 0 — 0 —

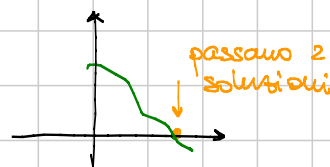
Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 7 \end{cases}$

Fatto 1 Prescindendo dal dato iniziale, una soluzione si vede subito ed è $u(t) \equiv 0$



FATTO GENERALE Un'eq. autonoma $u' = f(u)$ ha tutte le soluzioni stazionarie $u(t) \equiv \alpha$ dove $f(\alpha) = 0$.

FATTO 2 La soluzione che parte da 7 non potrà mai diventare ≤ 0 perché se lo diventasse dovrebbe attraversare la soluzione stazionaria, ma allora per quel punto passerebbero 2 soluzioni il che è contro l'unicità (perché $f(u)$ è derivabile, quindi Lipschitziana localmente)



FATTO GENERALE Quando c'è unicità, tutte le soluzioni conosciute fungono da barriera per le altre, cioè non sono attraversabili.

FATTO 3 Ora sappiamo che $u(t) > 0$ per ogni t per cui esiste, quindi $u'(t) = \arctan u(t) > 0$ finché esiste, quindi $u(t)$ è strettamente crescente.

FATTO 4 Poiché $0 \leq u'(t) \leq \frac{\pi}{2}$ finché esiste, si ha che $u(t)$ non può avere blow-up in un tempo finito: infatti

$$|u(t) - u(0)| = |u'(c)| \cdot |t - 0| \leq \frac{\pi}{2} t$$

Quindi non può avere blow-up, non può avere break-down (perché $f(u)$ è definita ovunque), quindi c'è
ESISTENZA GLOBALE.

FATTO GENERALE Se l'equazione è del tipo $u' = f(t, u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata $|f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$, allora c'è sempre esistenza globale.

FATTO 5 Essendo $u: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ monotona, sappiamo che esistono

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l_1 \in [\tau, +\infty) \cup \{+\infty\}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l_2 \in [0, \tau]$$

Vorremmo dire che $l_1 = +\infty$ e $l_2 = 0$.

Consideriamo l_2 . Dal teorema dell'asintoto (versione a $-\infty$, da fare per esercizio) sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) \begin{cases} \nearrow 0 \text{ è uguale a } 0 \\ \searrow 0 \text{ non esiste} \end{cases}$$

D'altra parte dall'equazione differenziale sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan u(t) = \arctan l_2$$

Quindi il limite esiste, ma allora deve fare 0, cioè $\arctan l_2 = 0$, cioè $l_2 = 0$.

Consideriamo l_1 . Se per assurdo fosse $l_1 \in \mathbb{R}$ potrei applicare il te. dell'asintoto a $t = +\infty$. Dall'equazione avremmo che

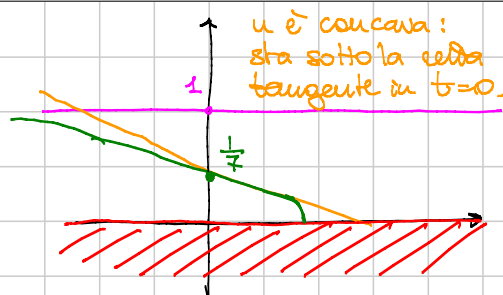
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \arctan l_1$$

quindi esiste, ma allora è 0, ma allora $l_1 = 0$ il che è assurdo in quanto $l_1 \geq \tau$. Ma allora è assurdo che sia $l_1 \in \mathbb{R}$, dunque $l_1 = +\infty$.

FATTO 6 u è convessa in quanto $u''(t) = [u'(t)]' = [\arctan u(t)]' =$

$$= \frac{1}{1 + [u(t)]^2} \cdot \underbrace{u'(t)}_{>0} \geq 0.$$

Esempio 2
$$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \frac{1}{7} \end{cases}$$



FATTO 1 $u(t) \equiv 1$ è sol. stazionaria, quindi $u(t) < 1$ finché esiste

FATTO 2 $u(t)$ non può diventare ≤ 0 , pena la perdita di significato. Quindi $0 < u(t) < 1$ finché esiste, ed in particolare $u'(t) = \log u(t) < 0$ finché esiste, quindi $u(t)$ è monotona decrescente finché esiste.

FATTO 3 Consideriamo i $t \leq 0$.

Non può esserci blow-up perché $\frac{1}{7} \leq u(t) \leq 1$ per $t \leq 0$.

Non può esserci break-down per lo stesso motivo.

Quindi c'è esistenza globale per $t \leq 0$.

FATTO 4 Per monotonia sappiamo che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in [\frac{1}{7}, 1]$.

Dall'eq. sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \log l, \text{ quindi esiste.}$$

Ma allora il limite è 0, cioè $\log l = 0$, cioè $l = 1$.

FATTO 5 Per $t \geq 0$ non può esserci blow-up in quanto $0 < u(t) \leq \frac{1}{7}$.

Può esserci esistenza globale o break-down.

Se ci fosse esistenza globale, avremmo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l_1 \in [0, \frac{1}{7}]$, ma allora... $\log l_1 = 0$ da cui $l_1 = 1$, che

è impossibile, quindi c'è break-down.

Detto altrimenti, poiché $0 < u(t) \leq \frac{1}{7}$, avremo che $u'(t) \leq \log \frac{1}{7}$ da cui

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \leq u(0) + \underbrace{\log \frac{1}{7}}_{< 0} \cdot t$$

disenta negativo per t grande.

SSSUP 2013

—

LEZIONE 23

Titolo nota

23/04/2013

Strumento 2: teoremi di confronto, sopra soluzioni, sottosoluzioni

Supponiamo di avere 2 problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v' = g(t, v) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Teorema (di confronto) Supponiamo che

- $f(t, u) > g(t, u)$ dove è definita
- $u_0 > v_0$

Allora $u(t) > v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per cui le 2 soluzioni sono definite.

Dim. Occhio a non dire che $u'(t) - v'(t) = f(t, u(t)) - g(t, v(t)) > 0$ perché f e g non sono calcolate nello stesso punto.

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$. Se $w(t) > 0$ per t per cui è definita, allora ok. Altrimenti esiste almeno un $t > 0$ per cui $w(t) \leq 0$.

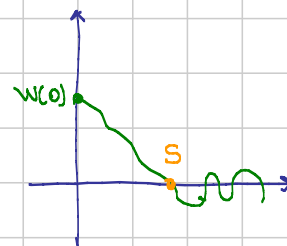
Considero allora

$$S := \inf \{ t > 0 : w(t) \leq 0 \}.$$

 S è l'inf. di un insieme non vuoto.Per continuità si vede bene che $w(S) = 0$ e $w(t) > 0$ per ogni $t \in [0, S)$.Calcolo in 2 modi $w'(S)$.1° modo. Usando le equazioni differenziali ottengo che

$$w'(S) = u'(S) - v'(S) = f(t, u(S)) - g(t, v(S)) > 0$$

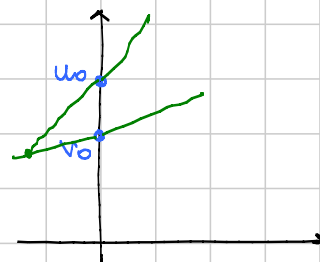
$\underbrace{\quad}_{u(S) \text{ perché } w(S)=0}$
essendo f e g calcolate nello stesso punto,
posso usare l'ipotesi $f > g$.



Osservazione In tutti i teoremi di confronto possiamo mettere $\geq$ e $\leq$ nelle ipotesi e nelle tesi PURCHÉ f e g verificano le ipotesi del teorema di unicità.

Se così non è ci sono facili controesempi giocati sull'esempio di non unicità.

Osservazione Per tempi negativi non vale nulla di quanto enunciato. Valgono risultati analoghi ma cambiando i versi in opportune disuguaglianze



Confronti standard Consideriamo il problema

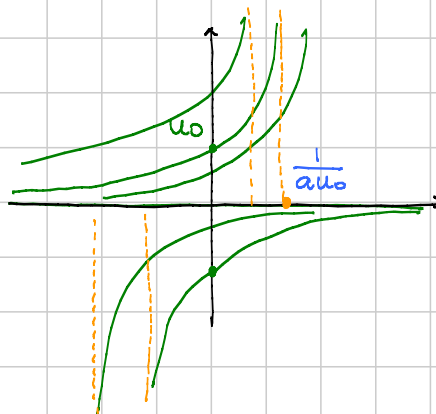
$$\begin{cases} u' = au^2 & \text{con } a > 0 \text{ parametro reale} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

La soluzione generale è $\frac{du}{u^2} = a \quad - \frac{1}{u} = at + c \quad u = \frac{-1}{c + at}$

con $c = -\frac{1}{u_0}$, quindi $u(t) = \frac{-1}{-\frac{1}{u_0} + at} = \frac{u_0}{1 - au_0 t}$ (verifica)

Come sono fatte le soluzioni? Per $t \leq 0$ non hanno problemi e tendono a 0 per $t \rightarrow -\infty$. Per $t \geq 0$ hanno blow-up per $t = \frac{1}{au_0}$.
In particolare

- ① tutte le soluzioni hanno blow-up per $t \rightarrow +\infty$
- ② Il tempo di vita tende a 0 quando $u_0 \rightarrow +\infty$



Osservazione Non è difficile vedere che si ha la situazione opposta per $u_0 \leq 0$.

Oss. La simmetria tra le soluzioni con partenza $u_0 > 0$ e quelle con partenza $u_0 < 0$ si può rendere rigorosa.

Consideriamo una soluzione $u(t)$ con $u(0) = u_0 > 0$.

Considero $v(t) := -u(-t)$. Cosa risolve $v(t)$?

$$v(0) = -u(0) = -u_0$$

$$\begin{aligned} v'(t) &= -u'(-t) \cdot (-1) = u'(-t) = a[u(-t)]^2 \\ &= a[-u(-t)]^2 = a[v(t)]^2 \end{aligned}$$

Quindi $v(t)$ risolve la stessa equazione con dato iniziale cambiato di segno.

Più in generale: si ha lo stesso fenomeno per equazioni del tipo

$$\begin{cases} u' = a|u|^p & \text{con } p > 1 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

- ↓ • blow-up per $t > 0$ per ogni $u_0 > 0$
- tempo di vita che tende a 0 quando $u_0 \rightarrow +\infty$.

Dati: basta risolvere esplicitamente

Se avere $p=1$, allora le soluzioni sono tutte esponenziali con esistenza globale.

Ancora meglio, tutte le soluzioni del problema

$$u' = a(t)u + b(t)$$

con $a(t)$ e $b(t)$ funzioni continue definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ sono definite globalmente (teoria generale delle equazioni lineari).

C'è anche una formula per trovarle.

TEOREMA (Caso della f sublineare)

Consideriamo un'equazione diff. $u' = f(t, u)$ con

- $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua (definita ovunque)
- esistono 2 funzioni continue $a(t)$ e $b(t)$ tali che

$$|f(t, u)| \leq a(t)|u| + b(t) \quad (f \text{ cresce meno che linearmente nella variabile } u)$$

Allora il problema di Cauchy ha solus. globale per ogni valore iniziale $u(0) = u_0$.

Dam.: Non può esserci break-down perchè $f(t, u)$ è per ipotesi definita ovunque.

Non può esserci blow-up per tempi positivi poiché sapendo che

$$f(t, u) \leq a(t)u + b(t) < a(t)u + b(t) + 32$$

quindi la soluzione è < di una soluzione di

$$v' = a(t)v + b(t) + 32$$

che da parte sopra, ma queste non scoppiano, quindi $u(t)$ non può tendere a $+\infty$ in tempo finito.

Analogamente

$$f(t, u) \geq -a(t)u - b(t) > -a(t)u - b(t) - 5$$

e questo le impedisce di andare a $-\infty$.

Analogamente si ragiona per tempi $t \leq 0$.

Oss. f sublineare $\Rightarrow$ la soluzione cresce meno che esponenzialmente.

— o — o —

SSSUP 2013

—

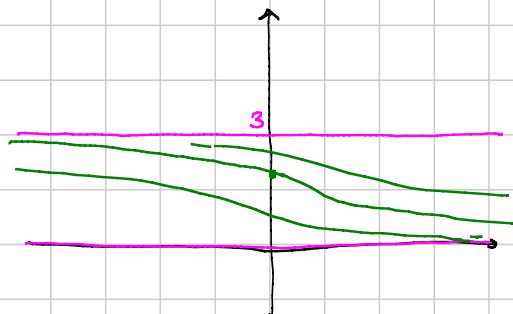
LEZIONE 24

Titolo nota

23/04/2013

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u^2 - 3u \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Fatto 1 Le soluzioni stazionarie sono
 $u(t) \equiv 0$ e $u(t) \equiv 3$.



Fatto 2 Per unicità, la soluzione con $u(0) = 2$ soddisfa $0 < u(t) < 3$ finché esiste, quindi $u'(t) < 0$ finché esiste. Non possono esserci blow-up o break down, quindi c'è esistenza globale.

Fatto 3 Si ha che $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 3$.

Dimostriamo quello a $-\infty$.

① Per monotonia esiste $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in [2, 3]$

② Dall'equazione ricaviamo che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} u^2(t) - 3u(t) = l^2 - 3l$

quindi esiste.

③ Se il $\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t)$ esiste, allora per il teo. dell'asintoto deve essere $= 0$, quindi $l^2 - 3l = 0$, quindi $l = 0$ oppure $l = 3$ e l'unico compatibile con ① è $l = 3$.

Il discorso a $+\infty$ è analogo.

Fatto 4 Traslando questa soluzione si ottengono tutte le altre con partenza $u_0 \in (0, 3)$.

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^2 - 3u \\ u(0) = 4 \end{cases}$

Come prima, si ottiene che $u(t) > 3$
e quindi $u'(t) > 0$ finché esiste.

Per $t \leq 0$ si ha esistenza globale e $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 3$ (solita storia)

Per $t \geq 0$ può esserci esistenza globale o blow-up. In realtà c'è blow-up per colpa del termine u^2 .

Rigorosamente bisogna usare un confronto.

Esiste una costante $c > 0$ tale che

$$u^2 - 3u > cu^2 \text{ per ogni } u \geq \frac{7}{2}.$$

Questo perché segue facilmente dallo studio della funzione

$$f(u) = \frac{u^2 - 3u}{u^2}$$

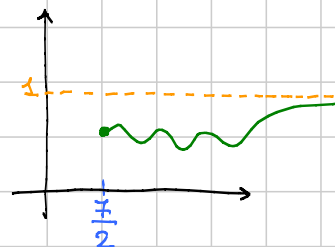
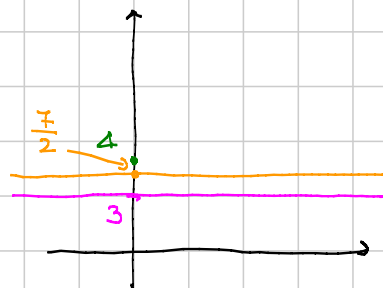
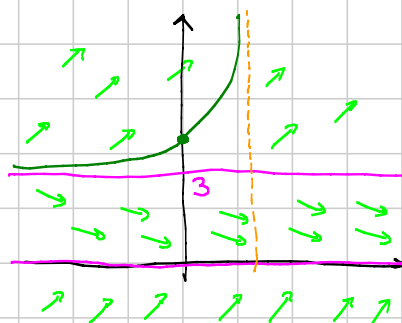
(positiva per $u \geq \frac{7}{2}$, tende a 1 per $u \rightarrow +\infty$,
e questo basta a garantire $\inf f = c > 0$)

Posso quindi confrontare i problemi

$$\begin{cases} u' = u^2 - 3u \\ u(0) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} v' = cv^2 \\ v(0) = \frac{7}{2} \end{cases}$$

più grande (curva superiore)
più grande (curva inferiore)

Sappiamo che $v(t)$ ha blow-up in tempo finito e $u(t) > v(t)$,
quindi $u(t)$ deve avere blow-up.



Osservazione Quando uso il confronto, basta controllare l'ipotesi $f(t, u) > g(t, u)$ nella zona in cui effettivamente le soluzioni stanno.

Metodo alternativo per dim. il blow-up: sparare a occhio una sottosoluzione che abbia blow-up. Proviamo

$$v(t) = \frac{\frac{7}{2}}{1-\varepsilon t} \quad \text{e vedo se per caso per qualche valore di } \varepsilon \text{ funziona.}$$

Mi serve che $v'(t) \leq v^2(t) - 3v(t)$ per ogni $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon})$
↑ sottosoluz. ↑ finché esiste

$$v'(t) = \frac{7}{2} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon t)^2} \leq \frac{49}{4} \frac{1}{(1-\varepsilon t)^2} - \frac{21}{2} \frac{1}{1-\varepsilon t}$$

Moltiplico ancora e ottengo

$$\frac{7}{2} \varepsilon \leq \frac{49}{4} - \frac{21}{2} (1-\varepsilon t) \quad \text{Riorganizzando basta dir.}$$

$$\frac{7}{2} \varepsilon + \frac{21}{2} (1-\varepsilon t) \leq \frac{49}{4} \quad \text{D'altra parte}$$

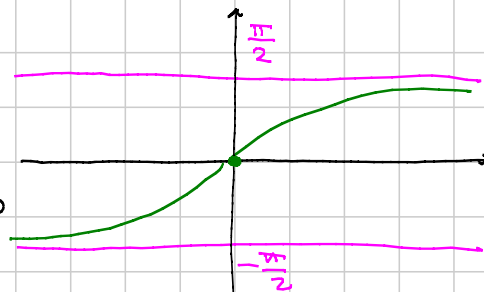
$$\frac{7}{2} \varepsilon + \frac{21}{2} \underbrace{(1-\varepsilon t)}_{\leq 1} \leq \frac{7}{2} \varepsilon + \frac{21}{2} \leq \frac{49}{4} \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo.}$$

Quindi per ε piccolo ho scritto una sottosoluzione che ha blow-up.

Esempio 3 $\begin{cases} u' = \cos u \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Le soluzioni stazionarie più vicine sono

$$u(t) \equiv \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad u(t) \equiv -\frac{\pi}{2}$$

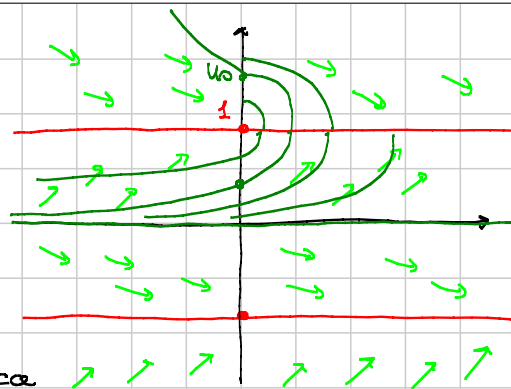


C'è esistenza globale perché il RHS è definito ovunque, la soluzione è crescente e i 2 limiti sono...

Esempio 4 $u' = \frac{u^3}{1-u^2}$

Fatto 1 Soluzioni stazionarie:
solo $u(t) \equiv 0$

Fatto 2 Le rette $u = \pm 1$ sono fuori
della zona di definizione (chi tocca
muore!).



Fatto 3 Il segno di u' è rappresentato in figura

Fatto 4 Se $u(t)$ è una soluzione con $u(0) = u_0 > 0$, allora
 $v(t) := -u(t)$ è la soluzione con $v(0) = -u_0$.

Verifica: $v'(t) = -u'(t) = -\frac{u^3(t)}{1-u^2(t)} = \frac{[-u(t)]^3}{1-[-u(t)]^2} = \frac{v^3}{1-v^2}$.

Fatto 5 Con partenza $u_0 \in (0, 1)$ abbiamo soluzioni crescente, con
esistenza globale nel passato e break-down nel futuro
(se ci fosse esistenza globale, allora $u(t) \rightarrow l \in [u_0, 1]$
per $t \rightarrow +\infty$, ma allora $u'(t)$ avrebbe limite (reale oppure
 $+\infty$) ma per il teorema dell'asintoto ...).
In alternativa basta dim. la convessità.

Fatto 6 Con partenza $u_0 > 1$ abbiamo break-down nel futuro per
lo stesso motivo di sopra.

Nel passato non può esserci break-down (si allontanano
dal rosso) e nemmeno blow-up in quanto la crescita
di $\frac{u^3}{1-u^2}$ è lineare ($\sim u$ per u grandi).

Formalmente esiste una costante $c > 0$ tale che

$\left| \frac{u^3}{1-u^2} \right| \leq cu$ per ogni $u \geq u_0 (> 1)$ ← zona in cui la
sol. va per $t \leq 0$

SSSUP 2013

-

LEZIONE 25

Titolo nota

29/04/2013

Studi qualitativi per eq. diff. non autonome

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = \arctan u - t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema ha esistenza globale

$$|f(t, u)| \leq A(t) \cdot |u| + B(t)$$

$$|\arctan u - t| \leq |\arctan u| + |t| \leq \frac{\pi}{2} + |t|$$

$B(t) = |t|$ $A(t) = 0$

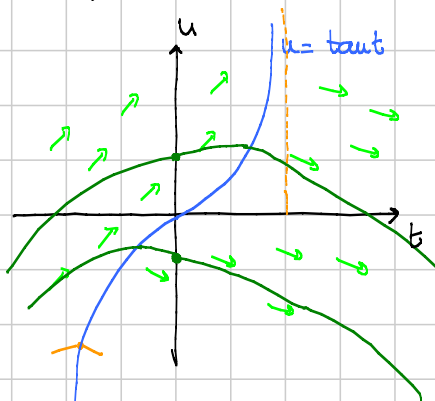
Fatto 2 Seguo di u' . Abbiamo che $\arctan u - t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \arctan u$
Vedi figura

Fatto 3 $\alpha < 0$ e $t \geq 0$. La soluzione decresce sempre, quindi per $t \rightarrow +\infty$ la soluzione ha un limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Se fosse $l \in \mathbb{R}$, avremmo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\arctan u(t)}_{\arctan l} - \underbrace{t}_{+\infty} = -\infty$$

ma per il te. dell'asintoto il limite, ESISTENDO, dovrebbe essere 0.
Quindi l'unica possibilità è $l = -\infty$

Fatto 4 $\alpha < 0$ e $t \leq 0$. Andando indietro, la soluzione ha un max relativo dove tocca $u = \tan t$, poi "decresce". Una volta entrata nella "zona sx" la soluzione non può più toccare la curva $u = \tan t$, perché dovrebbe farlo con derivata nulla, cioè passando da sx a dx. Inoltre $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = -\infty$ per i soliti motivi.



Fatto 5 $\alpha > 0$ e $t \leq 0$. Esattamente come fatto 4.

Fatto 6 $\alpha > 0$ e $t \geq 0$. A priori ci sono 2 possibilità:

- sta sempre sopra $u = \tan t$ ← **CONTRO ESISTENZA GLOBALE**,
 - tocca e discende
- perché ci sarebbe blow-up prima di $t = \frac{\pi}{2}$

Quindi tutte "toccano".

Oss. Per dimostrare che esistono sol. che toccano basta **partire** lungo la curva e andare indietro col tempo.

considerare il problema di Cauchy con dato iniziale $u(t_0) = u_0$ e $(t_0, u_0) \in$ curva.

Fatto 7 Tutte le soluzioni vanno a $-\infty$ per $t \rightarrow +\infty$ e ci vanno come t^2 . Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\arctan u(t)}{2t} - \frac{t}{2t} = -\frac{1}{2}$$

$\uparrow$ $\left[\frac{-\infty}{+\infty} : \text{H\ddot{o}p} \right]$
 $\downarrow$ $\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{\infty} = 0 \right)$

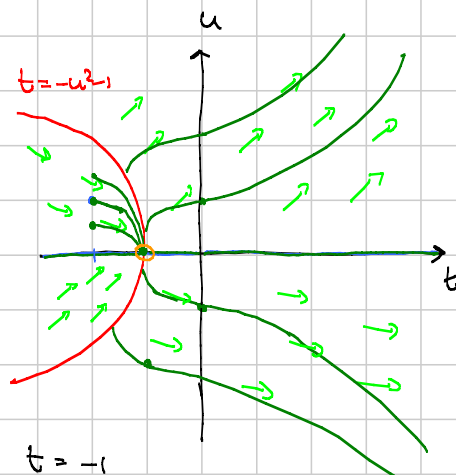
Quindi a meno di termini di ordine inferiore $u(t) \sim -\frac{1}{2}t^2$ per $t \rightarrow +\infty$

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \frac{u}{u^2 + t + 1} \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Ci sono problemi se $u^2 + t + 1 = 0$ cioè se $t = -u^2 - 1$

Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è una "soluzione", modulo il fatto che "muore" per $t = -1$. Questo sistema $\alpha = 0$



Fatto 3 Per $\alpha < 0$ e $t \geq 0$ abbiamo esistenza globale in quanto la soluzione è confinata nel N quadrante e in quel quadrante

$$|f(t, u)| = \frac{|u|}{u^2 + t + 1} \leq \frac{|u|}{u^2 + 1} \stackrel{\text{analisi 1.}}{\downarrow} \leq \text{costante}$$

Fatto 4 Essendoci esistenza globale abbiamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

"Puntroppo" sia $l \in \mathbb{R}$ sia $l = -\infty$ sono compatibili con il teo. dell'asintoto... (verifica!)

Brutal mode: se fosse $u(t) \rightarrow -l \in \mathbb{R}$, avremmo che

$$u'(t) \sim \frac{-l}{l^2 + t + 1} \sim \frac{-l}{t} \text{ per } t \text{ grandi, quindi } u(t) \sim -l \log t,$$

ma allora $u(t)$ non tenderebbe ad l ...

Rigorosamente: cerchiamo di fare disuguagliante. Se fosse che

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -l < 0$, allora $u(t) \geq -l$ per ogni $t \geq 0$ (perché ci tende decrescendo), quindi

$$|u'(t)| = \frac{|u(t)|}{u^2(t) + t + 1} \geq \frac{\alpha}{t + 1 + l^2}, \text{ quindi}$$

$\uparrow$
 num. + piccolo
 denom. + grande

$$u'(t) = -|u'(t)| \leq -\frac{\alpha}{t + 1 + l^2} \text{ per ogni } t \geq 0$$

Ma allora $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$

$$\leq \alpha - \int_0^t \frac{\alpha}{s + 1 + l^2} ds = \alpha - \alpha \log(t + 1 + l^2) + \alpha \log(1 + l^2) \rightarrow -\infty$$

Fatto 5 Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ c'è break-down dove incontra la curva $t = -1 - u^2$ (e la incontra per forza).

È facile vedere che esistono valori di α per cui il B-D avviene per tempi $t < -1$ (Basta considerare la soluzione con $u(-1) = -3$)

Variaute Cosa succede alla soluzione che parte con $t = -2$ dentro la parabola?

- Non può toccare $u = 0$ senza violare l'unicità
- Non può toccare la parabola per $u > 0$ in quanto "dovrebbe farlo dall'alto" dovendo avere derivata $-\infty$

L'unica possibilità è che abbia break-down per $t = -1$ arrivando a $u = 0$.

FOSSA COMUNE Tutte le soluzioni che partono all'interno della parabola arrivano nel punto $(-1, 0)$.

SSSUP 2013 - LEZIONE 26

Titolo nota

29/04/2013

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Il segno di u' è come in figura

Fatto 2 $\alpha < 0, t \geq 0$: sale, tocca, scende
Dopo aver iniziato la discesa non tocca più perché dovrebbe farlo con derivata nulla, cioè passando da sc a cr.

Detto meglio: la retta $v(t) = -t$ è una sottosoluzione in quanto

$$v'(t) = -1 < 0 = [v(t)]^2 - t^2 = f(v(t), t)$$

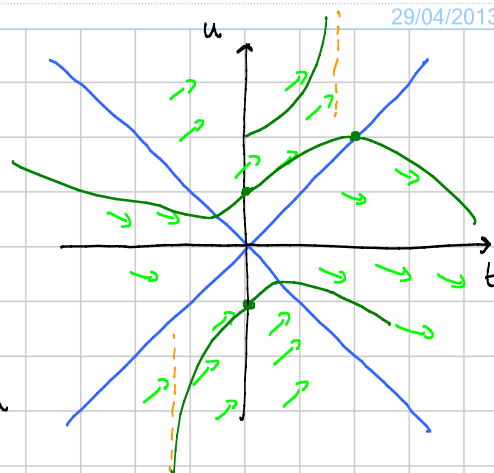
quindi se sta sotto per un certo t_0 , sta sotto per tutti i $t \geq t_0$.

Una volta che sta sopra c'è per forza esistenza globale, nonostante il termine u^2 .

Fatto 3 $\alpha > 0, t \geq 0$. Ci sono 3 possibilità

- ① Cresce e blow-up
- ② Cresce ed esistenza globale crescente
- ③ Tocca e scende, poi esistenza globale decrescente.

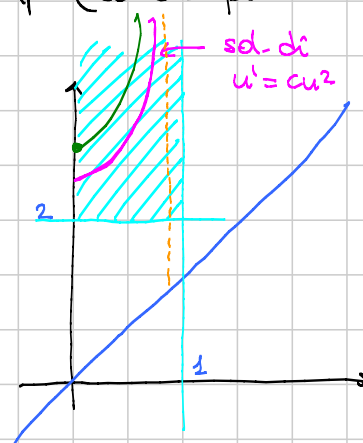
Di sicuro ci sono soluzioni di tipo 3 e se da un certo $\alpha > 0$ parte una soluzione di tipo ③, la stessa cosa accade con gli α precedenti.



Fatto 4 Esistono valori di α per cui c'è blow-up (se c'è per un certo α , c'è per tutti i successivi)

Consideriamo la zona $t \in [0, 1]$, $u \geq 2$.
In quella zona

$$\underbrace{u^2 - t^2}_{f(t, u)} \geq u^2 - 1 \stackrel{\text{analisi 1}}{\geq} \underbrace{cu^2}_{g(t, u)}$$



Quindi posso applicare un confronto tra le soluzioni del problema

$$u' = u^2 - t^2 \quad \text{e le soluzioni di} \quad u' = cu^2$$

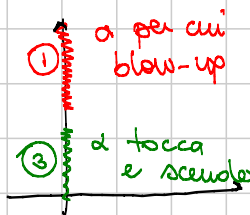
Quindi: finchè stiamo nella striscia, le soluzioni del primo problema stanno sopra le soluzioni del secondo, purché partano sopra,

Ora esistono soluzioni del secondo problema che hanno blow-up prima di uscire dalla striscia (tempo di vita $\rightarrow 0$ quando dato $\rightarrow -\infty$). Tutte le soluzioni del 1° problema che stanno sopra devono avere blow-up.

Alternativa per dimostrare l'esistenza di una soluzione con blow-up: esibire una sottosoluzione che ha blow-up, cioè trovare $v(t)$ t.c. $v'(t) \leq v^2(t) - t^2$ e $v(t)$ ha blow-up in tempo finito.

[Provare con: $v(t) = \frac{1}{a-bt}$ scegliendo bene a e b]

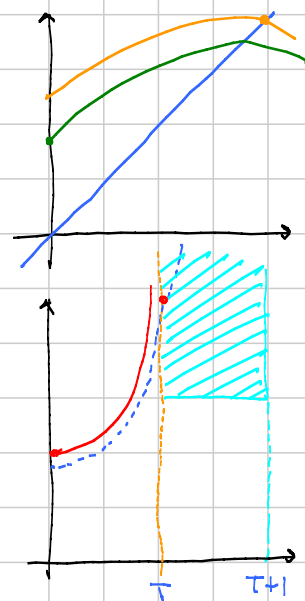
Riassunto: ci sono α di tipo ① e α di tipo ③
Se c'è qualcuno in mezzo, per forza è di tipo ②



Fatto 5 Le zone ① e ③ sono aperte, cioè il sup del ③ non è di tipo ③ e l'inf. dell'① non è di tipo ①.

Può il sup del ③ essere di tipo ③?

NO! Basterebbe partire lungo la bisettrice sopra il pto di contatto per trovare una soluzione ancora più grande di tipo ③



Può l'inf di ① essere di tipo ①?

Punto con dato $u(T) = u_0$ e ragionando come prima su una striscia $t \in [T, T+1]$ e $u \geq u_0$ scopro che per u_0 grande c'è blow-up

Quindi esiste almeno una soluzione di tipo 2.

Sarà unica?

Supponiamo che ce ne siano 2 distinte $u(t) > v(t)$. Queste sono crescenti e globali. Poniamo $w(t) := u(t) - v(t)$ e vediamo cosa risolve:

$$\begin{aligned} w'(t) &= u'(t) - v'(t) = u^2(t) - \cancel{t^2} - v^2(t) + \cancel{t^2} \\ &= \underbrace{(u(t) + v(t))}_{\geq w(t)} \underbrace{(u(t) - v(t))}_{w(t) > 0} \\ &\geq w^2(t) \end{aligned}$$

Quindi $w'(t) \geq w^2(t)$. Tutte le soluzioni di $w' = w^2$ con partenza > 0 hanno blow-up, quindi a maggior ragione le soprassoluzioni.

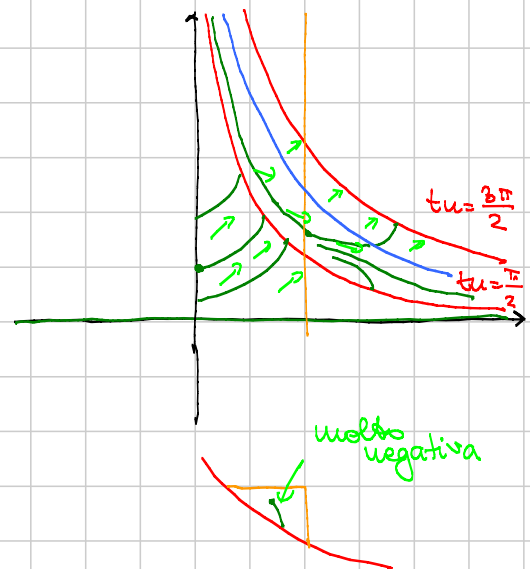
Quindi $w(t)$ avrebbe blow-up, ma questo è assurdo.

Oss. I tempi t si studiano osservando che se $u(t)$ è solus, allora anche $v(t) := -u(-t)$ è solus. (verifica).

Esempio 2 $u' = \tan(tu)$

① $u(t) \equiv 0$ è soluz.

Esercizio: dim. che esiste soluzione
definita per ogni $t > 0$.



SSSUP 2013

—

LEZIONE 027

Titolo nota

06/05/2013

Sistemi di equazioni differenziali

Esempi
$$\begin{cases} u' = f(u, v, t) \\ v' = g(u, v, t) \end{cases}$$

Le incognite sono $u(t)$ e $v(t)$.Le condiz. iniziali $u(t_0) = u_0$

$$v(t_0) = v_0$$

$$\begin{cases} u' = f(u, v, w, t) \\ v' = g(u, v, w, t) \\ w' = h(u, v, w, t) \end{cases}$$

Incognite sono $u(t), v(t), w(t)$

Osservazione Una eq. diff. singola di ordine k si può trasformare in un sistema di k equazioni di ordine 1

Esempio $u'' + u' - u^{20} = 0$

$$u' = v$$

$$v' = -u' + u^{20}$$

$$\uparrow$$

$$u''$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -v + u^{20} \end{cases}$$

sistema di 2 equaz.

$$u''' + u'' - u \cos u = t$$

$$u' = v$$

$$v' = w$$

$$w' = u''' = -u'' + u \cos u + t$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = -w + u \cos u + t \end{cases}$$

Conseguenza Teoremi di esistenza e/o unicità per sistemi di ordine 1 implicano teoremi analoghi per equazioni o sistemi di ordine qualunque.

Esempio Sistema lineare omogeneo di 2 eq. di ordine 1.

$$\begin{cases} u' = 3u + 4v \\ v' = u + 6v \end{cases}$$

Voglio trovare la soluzione generale, che dovrebbe avere 2 parametri liberi.

1° metodo Ridursi ad una singola equaz. di ordine 2.

Derivo la 1° eq: $u'' = 3u' + 4v' = 3u' + 4u + 24v = 3u' + 4u + 6u' - 18u$

$\uparrow$ prendo v' dalla 2° $\uparrow$ mi procuro $24v$ dalla 1°

Ho un' eq. nella sola u : $u'' - 9u' + 14u = 0$

$$\leadsto x^2 - 9x + 14 = 0 \leadsto (x-2)(x-7) = 0 \leadsto x=2 \text{ e } x=7$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{7t}$$

$\downarrow$ dalla 1°

$$v(t) = \frac{1}{4} u'(t) - \frac{3}{4} u(t)$$

$$v(t) = -\frac{1}{4} a e^{2t} + b e^{7t}$$

$$= \frac{1}{4} (2a e^{2t} + 7b e^{7t}) - \frac{3}{4} (a e^{2t} + b e^{7t})$$

$$= -\frac{a}{4} e^{2t} + b e^{7t}$$

a e b sono le stesse
sopra e sotto.

Esercizio Scrivere un sistema 3×3 e trasformarlo in una singola equazione con il metodo precedente.

Passo avanti Riscrittura in termini di singola equazione con matrice

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u + 4v \\ u + 6v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema si scrive nella forma $U' = AU$

La soluzione ottenuta prima si può scrivere nella forma

$$U(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Sorpresa: 2 e 7 sono gli autovalori della matrice e $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono i rispettivi autovettori.

Verifica: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ traccia = 9 Det = 14 $\Rightarrow$ autoval = 2, 7

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 7y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 3x + 4y = 2x \\ x + 6y = 7y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x + 4y = 0 & x = -4y \\ \text{ad esempio} & (1, -\frac{1}{4}) \end{matrix}$$

e similmente per il 7... Osservazione $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

Det = $(3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14$
 è lo stesso polinomio che interviene risolvendo l'eq. di ordine 2 ottenuta.

Motivo per cui funziona : $u(t)$ e $v(t)$ sono le componenti di $U(t)$ rispetto alla base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Poiché la matrice si diagonalizza, esiste una nuova base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{tale che se scrivo } U(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$$

allora abbiamo $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 7y \end{cases}$ Sistema diagonale, quindi disaccoppiato

$$x(t) = a e^{2t}, \quad y(t) = b e^{7t}, \quad \text{quindi } U(t) = a e^{2t} e_1 + b e^{7t} e_2$$

che è la formula di sopra.

Il passaggio di $(u(t), v(t))$ a $(x(t), y(t))$ avviene mediante la matrice di cambio di base M

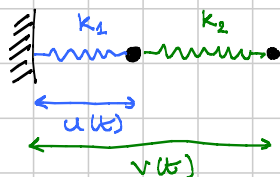
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \text{Quando derivo ottengo:}$$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = M A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \overset{\text{Matrice diagonale } D}{\boxed{M A M^{-1}}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

↑ linearità della derivata ↑ sistema in (u, v) ↑ cambio di base inverso

Il procedimento appena descritto funziona con qualunque numero di variabili, purché la matrice A sia diagonalizzabile.

Osservazione 1 Se $u(t)$ e $v(t)$ rappresentano delle variabili "fisiche", è probabile che $x(t)$ e $y(t)$ rappresentino delle variabili fisiche ancora più significative ("intrinseche").



$$\begin{cases} u'' = \dots \\ v'' = \dots \end{cases} \rightsquigarrow \text{sistema di 4 eq. del 1° ordine}$$

$$\rightsquigarrow \text{nuove variabili (posizione centro di massa, \dots)}$$

Osservazione 2 Se abbiamo l'eq. singola $u' = au$ la soluzione è $u(t) = c e^{at}$

$\uparrow$
 parametro

Se abbiamo il sistema $U' = AU$ con U vettore e A matrice la soluzione è

$$U(t) = \underbrace{C}_{\substack{\uparrow \\ \text{vettore di parametri}}} \underbrace{e^{At}}_{\substack{\uparrow \\ \text{e elevato ad una matrice}}}$$

Come si definisce e^M con M matrice? Intanto è una matrice

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad e^M = Id + M + \frac{1}{2!} M^2 + \frac{1}{3!} M^3 + \dots$$

Se M è una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ho che

$$e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Oss. L'esponenziale commuta con i cambi di base nel senso che, data una matrice di cambio di base B e posto

$$N = B M B^{-1} \quad \text{abbiamo che}$$

$$N^k = B M^k B^{-1}$$

Quindi
$$e^N = Id + N + \frac{1}{2!} N^2 + \frac{1}{3!} N^3 + \dots$$

$$= B Id B^{-1} + B N B^{-1} + \frac{1}{2!} B N^2 B^{-1} + \dots$$

$$= B \left(Id + M + \frac{1}{2!} M^2 + \dots \right) B^{-1} = B e^M B^{-1}$$

Come si calcola l'esponenziale di una matrice M ?

→ Si diagonalizza $B M B^{-1} = D$

→ Si fa l'esponenziale di D che è facile

→ Si torna indietro con il cambio base.

Achtung! Non è vero che $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$
È vero però se commutano!

Finale Tutte le volte che la matrice è diagonalizzabile, il sistema si può risolvere con questo metodo

SSSUP 2013 - LEZIONE 28

Titolo nota

06/05/2013

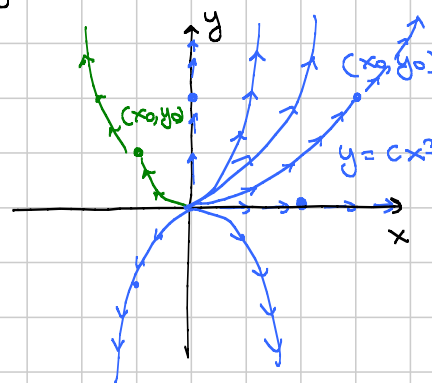
Spazio delle fasi per un sistema

Per un sistema di n equazioni lo spazio delle fasi è $\mathbb{R}^n$ di ordine n

Per un sistema di 2 equazioni si disegna la traiettoria come curva in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x & x(t) = a e^t = x_0 e^t \\ y' = 3y & y(t) = b e^{3t} = y_0 e^{3t} \end{cases}$$

Osservo che $y(t) = \text{cost} \cdot [x(t)]^3$

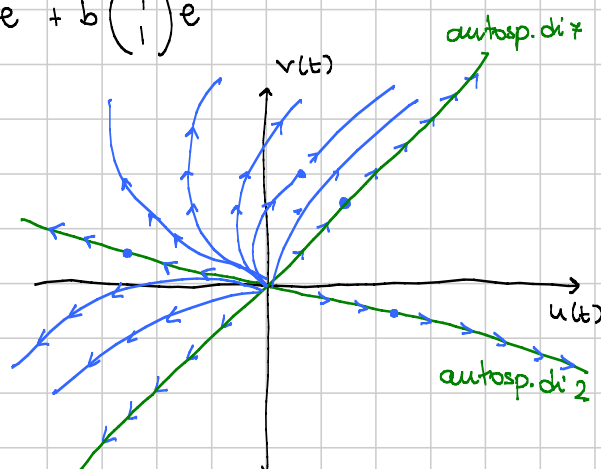
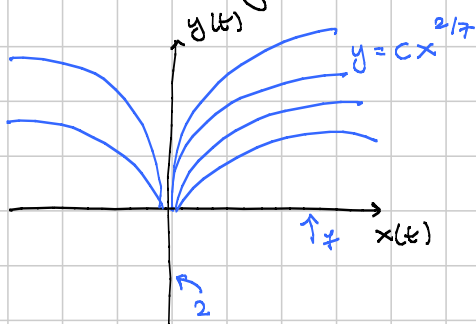


$$\begin{cases} u' = 3u + 4v \\ v' = u + 6v \end{cases} \quad U(t) = a \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Le altre traiettorie si ottengono prendendo quelle del sistema diagonale

$$\begin{cases} x' = 7x \\ y' = 2y \end{cases}$$

e "storcendo gli assi"



$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{7t} \\ y(t) &= y_0 e^{2t} \end{aligned}$$

$$y(t) = \text{cost} [x(t)]^{2/7}$$

Problema della stabilità

Se $x_0 = y_0 = 0$, la traiettoria è fissa nell'origine (soluzione stazionaria)

Se parto vicino all'origine, cosa succede per tempi grandi?

Negli esempi presentati finora, l'origine è INSTABILE: comunque io parto vicino all'origine, la traiettoria se ne allontana per sempre.

Teoria per i sistemi 2×2

$$U' = A U$$

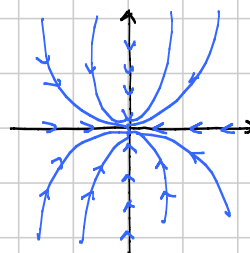
matrice 2×2 di numeri

Supponiamo che la matrice abbia 2 autovalori reali distinti λ e μ . Allora a meno di cambiare variabili il sistema diventa

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = y_0 e^{\mu t} \end{cases}$$

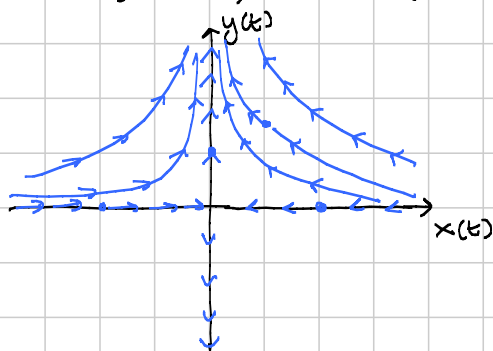
- Se λ e μ sono < 0 , allora l'origine è stabile, cioè tutte le traiettorie tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$

La forma delle curve dipende dal rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.



- Se λ e μ sono > 0 , allora l'origine è completamente instabile, cioè tutte le traiettorie che non partono da $(0,0)$ divergono per $t \rightarrow +\infty$.

- Se $\lambda < 0$ e $\mu > 0$, allora quando t cresce $x(t) \rightarrow 0$, $y(t) \rightarrow \pm \infty$



$$y(t) = c [x(t)]^{\text{espon. neg.}}$$

Quindi le traiettorie che partono sull'autosp. di λ tendono all'origine, tutte le altre divergono.

Esercizio Trattare il caso in cui uno degli autovalori è nullo
(le traiettorie sono quasi tutte SEMIrette)
— 0 — 0 —

Caso 2 La matrice ha 2 autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$.

Black-box: una matrice del genere cambiando base diventa $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Quindi il sistema diventa
$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha x(t) + \beta y(t) \\ y'(t) &= -\beta x(t) + \alpha y(t) \end{aligned}$$

Passo in coordinate polari $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$ $y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta = \alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta \\ y' &= \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta = -\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$$1^a. \cos \theta + 2^a. \sin \theta \quad \rho' = \alpha \rho \cos^2 \theta + \beta \cancel{\rho \sin \theta \cos \theta} - \beta \cancel{\rho \cos \theta \sin \theta} + \alpha \rho \sin^2 \theta$$

$$\boxed{\rho' = \alpha \rho}$$

$$-1^a. \sin \theta + 2^a. \cos \theta \quad \rho \theta' = -\alpha \cancel{\rho \cos \theta \sin \theta} - \beta \rho \sin^2 \theta - \beta \rho \cos^2 \theta + \alpha \cancel{\rho \cos \theta \sin \theta}$$

$$\rho \theta' = -\beta \rho$$

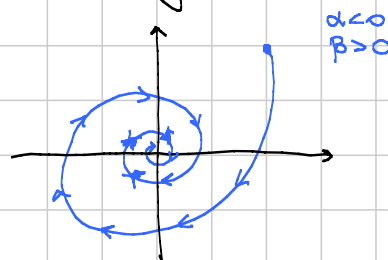
$$\boxed{\theta' = -\beta}$$

Nelle variabili $\rho(t)$ e $\theta(t)$ ho il sistema
$$\begin{cases} \rho' = \alpha \rho & \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \\ \theta' = -\beta & \theta(t) = \theta_0 - \beta t \end{cases}$$

Brutalmente: $\theta(t)$ ruota in senso orario (antiorario a seconda di β)
 $\rho(t)$ tende a 0 o $+\infty$ a seconda del segno di α

Quindi le traiettorie sono stabili se $\alpha < 0$
e sono instabili se $\alpha > 0$

Esercizio Per $\alpha = 0$...



Caso 3 Autovalori reali coincidenti. Ci sono 2 sottocasi

3.1 Diagonalizzabile $\leadsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e si tratta come nel caso 1.

3.2 Non diagonalizzabile (mult. geom. = 1) $\leadsto$ black-box

$\leadsto \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ e qui si fanno i conti esplicitamente.

SSSUP 2013

-

LEZIONE 29

Titolo nota

13/05/2013

Stabilità dell'origine per sistemi lineari : se parto vicino all'origine

- resto vicino all'origine?

- tendo all'origine per $t \rightarrow +\infty$?

La risposta dipende dagli autovalori della matrice.

* Se tutti gli autovalori hanno parte reale < 0 , allora c'è stabilità

* Se " " " " " " " > 0 , allora c'è instabilità totale, cioè nessuna soluzione che parte $\neq$ origine tende all'origine

* Se gli autovalori hanno parte reale un po' > 0 e un po' < 0 , allora ci sono direzioni in cui le solus. tendono all'origine, ma altrove scappano

* Se ci sono autovalori con parte reale $= 0$, le cose si complicano.

Metodo energetico Prendiamo un sistema in forma diagonale

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ v' = \mu v \end{cases} \quad \text{Supponiamo } \lambda < 0 \text{ e } \mu < 0, \text{ quindi tutte le soluzioni tendono a } 0.$$

Considero la funzione $E(t) := u^2(t) + v^2(t)$ (distanza di (u, v) dall'origine al tempo t).

$$E'(t) = 2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t) = 2\lambda u^2(t) + 2\mu v^2(t) \leq 0$$

quindi intanto $E(t) \searrow$. Inoltre

$$E'(t) \leq -2c E(t) \quad \text{dove } c = \min\{|\lambda|, |\mu|\}$$

quindi $E(t)$ è sottosoluzione di $y' = -2cy$, quindi

$$E(t) \leq E(0) e^{-2ct}$$

quindi la distanza dall'origine tende a 0 come un esponenziale dipendente dal minimo autovalore (in valore assoluto)

Discorso ribaltato se $\lambda > 0$ e $\mu > 0$.

Non funziona nulla se i segni sono diversi.

Cosa succede se il sistema non è diagonale, ma diagonalizzabile con autovalori tutti negativi (o tutti positivi).

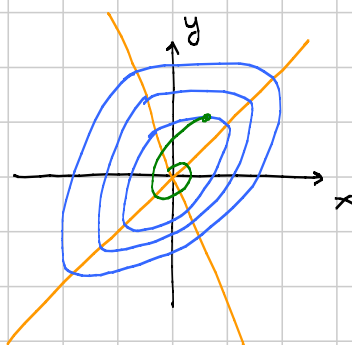
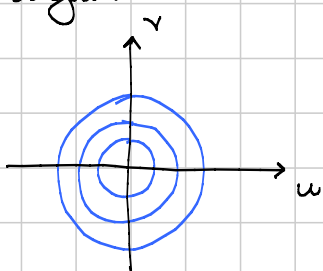
$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) + b y(t) \\ y'(t) = c x(t) + d y(t) \end{cases} \quad \begin{cases} u(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \\ v(t) = \delta x(t) + \gamma y(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{nelle nuove variabili} \\ \text{è diagonale} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} = M \text{ matrice di cambio di base}$$

Quindi $E(t) := (\alpha x(t) + \beta y(t))^2 + (\delta x(t) + \gamma y(t))^2$
decresce esponenzialmente

Forma quadratico-
ca definita
positiva in
 $x(t), y(t)$.

Le linee di livello di $E(t)$ nel piano (x, y) sono ellissi con centro nell'origine.



Il fatto che $E(t)$ scende dice che se partiamo in una ellisse, andiamo in ellissi sempre più piccole.

Metodo energetico: trovare una funzione $E(t)$ le cui linee di livello sono curve che si addensano sull'origine e tale che $E(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (E vale 0 nell'origine).

Cosa succede se il sistema non è lineare?

$$\begin{cases} u' = -2u + u^2 + 5uv \\ v' = -3v - v^2 + u^2 \end{cases}$$

Posso sempre supporre, dato $u' = f(u, v)$, $v' = g(u, v)$ che f e g siano della forma termini lineari + roba di ordine superiore (Taylor). Posso sempre supporre che la parte lineare sia in forma canonica (diagonale se è diagonalizzabile).

$$E(t) = u^2 + v^2$$

$$\begin{aligned} E' &= 2uu' + 2vv' \\ &= -4u^2 + 2u^3 + 10u^2v - 6v^2 - 2v^3 + 2u^2v \\ &= \underbrace{-4u^2 - 6v^2}_{\text{come prima}} + \underbrace{12u^2v + 2u^3 - 2v^3}_{\text{ordine superiore}} \end{aligned}$$

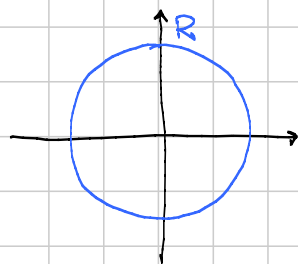
Poniamo $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$. Allora

$$|\text{termine di ordine superiore}| \leq 16 \rho^3$$

$$\text{Invece} \quad -4u^2 - 6v^2 \leq -4u^2 - 4v^2 = -4(u^2 + v^2) = -4\rho^2$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad E'(t) &\leq -4E(t) + 16[E(t)]^{3/2} \\ &= E(t) \{ -4 + 16[E(t)]^{1/2} \}. \end{aligned}$$

Scelgo un raggio R t.c. $-4 + 16[E(t)]^{1/2} \leq -2$
per ogni punto all'interno del cerchio.



Finché sto nel cerchio ho che $E'(t) \leq -2E(t)$, quindi $E(t)$ scende, quindi la distanza dall'origine scende, ma allora la distanza dall'origine tende a 0.

Tutte le soluzioni che partono vicino all'origine tendono all'origine.

TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE Le soluzioni di un sistema qualunque, vicino ad un pto. stazionario, si comportano come le soluzioni del sistema linearizzato (considerando solo i termini lineari). Questo è vero solo se tutti gli autovalori del linearizzato hanno parte reale $\neq 0$ (altrimenti entrano in gioco i termini di ordine superiore).

Dim.: metodo energetico se tutti gli autoval. hanno $Re < 0$ o tutti hanno $Re > 0$.

Difficile nel caso misto.

Esempio 1 $u'' = -\sin u$ (pendolo)

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u \end{cases} \quad \begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases} + \text{termini di ordine superiore}$$

Il sistema linearizzato ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con autoval. $\pm i$, quindi $Re = 0$, quindi il teo. di linearizzazione non si applica.

Esempio 2 $\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin u \end{cases}$ Considero il punto $u = \pi, v = 0$ che è pure una soluz. stazionaria

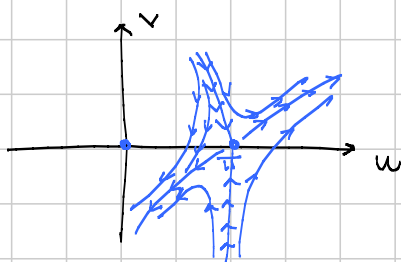
Studiamo la stabilità di questa soluzione. Traslo il problema nell'orig. ponendo $u = \pi + w$, cioè $w = u - \pi$. Allora

$$\begin{cases} w' = u' = v \\ v' = -\sin u = -\sin(\pi + w) = \sin w \end{cases} \quad \begin{cases} w' = v \\ v' = \sin w \end{cases}$$

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = w \end{cases} + \text{termini sup.}$$

Ora il linearizzato ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con autovalori ± 1 , quindi il teo. di linearizzazione vale!

Questo dice che anche per il sistema non lineare, c'è una direzione di stabilità e tutto il resto è instabile.



SSSUP 2013 - LEZIONE 30

Titolo nota

13/05/2013

MODELLO PREDATORIA - PREDATORE

$$\begin{cases} u' = -5u + 3uv \\ v' = 2v - 7uv \end{cases} \quad \text{La cosa importante sono i segni dei coeff.}$$

$$\begin{aligned} u' &= u(-5 + 3v) & u &= \text{leoni (densità di)} \\ v' &= v(2 - 7u) & v &= \text{pecore (densità di)} \end{aligned}$$

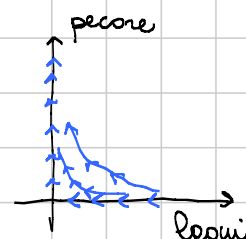
Problema: cercare i pti stazionari e classificarli

$$\begin{cases} -5u + 3uv = 0 \\ 2v - 7uv = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} u=0 \\ v=0 \end{matrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{matrix} u = \frac{2}{7} \\ v = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

Studio (0,0) il linearizzato è $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, quindi c'è una

direzione di stabilità e tutto il resto è instabile

Studio $(\frac{2}{7}, \frac{5}{3})$ Pongo $x = u - \frac{2}{7}$, $y = v - \frac{5}{3}$



$$x' = u' = -5u + 3uv = -5\left(x + \frac{2}{7}\right) + 3\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(y + \frac{5}{3}\right)$$

$$= -5x - \frac{10}{7} + 3xy + 5x + \frac{6}{7}y + \frac{10}{7}$$

$$y' = v' = 2v - 7uv = 2\left(y + \frac{5}{3}\right) - 7\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(y + \frac{5}{3}\right)$$

$$= 2y + \frac{10}{3} - 7xy - \frac{35}{3}x - 2y - \frac{10}{3}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{6}{7}y + 3xy \\ y' = -\frac{35}{3}x - 7xy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{7} \\ -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

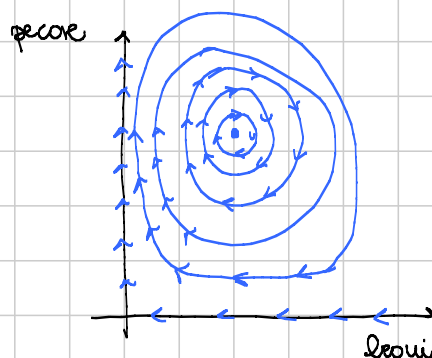
Autovalori $\pm \beta i$ con
 $\beta^2 = \frac{6}{7} \cdot \frac{35}{3} = 10$

Quindi il tes. di linearizzazione non consente di dire nulla.

Si può verificare che le traiettorie sono curve chiuse che circondano il punto $(\frac{2}{7}, \frac{5}{3})$.

Come si dimostrerebbe?

Metodo energetico: esiste una funzione $E(x, y)$ che è costante lungo le traiettorie e le cui linee di livello sono le curve cercate.



Esercizio

$$u' = -5u + 3uv - \varepsilon u^2 = u(-5 + 3v - \varepsilon u)$$

$$v' = 2v - 7uv - \delta v^2 = v(2 - 7u - \delta v)$$

ε e δ sono il "fastidio" che una specie troppo numerosa dà a se stessa.

Trovare, per ε e δ abbastanza piccoli, i punti stazionari e classificarli. Si ottiene che ce ne sono 3...

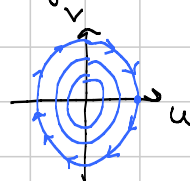
— o — o —

Equazioni di ordine 2

Esempio classico

$$u'' = -ku \rightsquigarrow \begin{cases} u' = v \\ v' = -ku \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{k > 0}$$

Autovalori $\pm \sqrt{k} i$ e le traiettorie sono circonferenze con centro nell'origine



Metodo energetico: moltiplico l'eq. per u'

$$u'' \cdot u' = -k u u' \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{k}{2} u^2 \right]', \text{ quindi}$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{2} u^2 \right]' = 0, \text{ quindi} \quad \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{2} u^2 = \frac{1}{2} \dot{u}^2(0) + \frac{k}{2} u^2(0)$$

Ponendo $E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{k}{2} u^2(t)$ si ha che $E(t) = E(0)$ per ogni t .

Le traiettorie sono le linee di livello di E , quindi ellissi.

Esempio 2 $u'' = -ku^3$.

Moltiplico per $\dot{u}$: $\ddot{u} \cdot \dot{u} = -k u^3 \dot{u}$

$$\left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = \left(-\frac{k}{4} u^4\right)'$$

Quindi posto $E(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{4} u^4$ ho che E resta costante lungo le traiettorie

Conseguenza 1 $\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{k}{4} u^4 = E_0 \leftarrow \text{energia iniziale}$

quindi $\dot{u}^2 = 2E_0 - \frac{k}{2} u^4$ $\dot{u} = \pm \sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4}$

Così diventa una eq. del 1° ordine, che volendo si risolve, ma c'è un po' il problema del $\pm$.

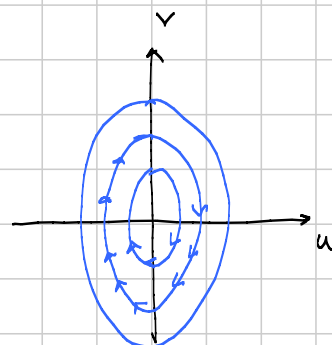
Conseguenza 2 le traiettorie nello spazio delle fasi sono linee di livello di

$$E(u, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{k}{4} u^4$$

Le traiettorie sono comunque curve chiuse intorno all'origine.

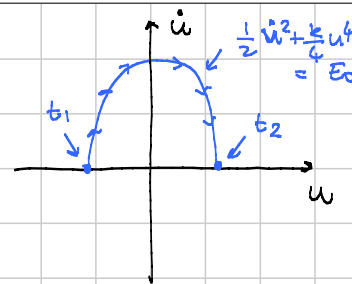
Quindi sono traiettorie periodiche.

Dovrei dimostrare che la traiettoria "completa il giro"...



$$\dot{u}(t) = \sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4(t)}$$

siamo "sopra"



$$\frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{\dots}} = 1 \quad \text{Integro tra } t_1 \text{ e } t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} u^4(t)}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = (t_2 - t_1) = \frac{T}{2}$$

↑ Pongo $x = u(t)$, quindi $dx = \dot{u}(t) dt$

Quando $t = t_1$ ho che $x = u(t_1) = -\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4}$

$t = t_2$ ho che $x = u(t_2) = +\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4}$

$$= \int_{-\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4}}^{+\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4}} \frac{dx}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} x^4}} = \text{integrale improprio che si vede essere convergente (es. analisi 1)}$$

Pongo infine $x = \left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4} y$, quindi $dx = \left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4} dy$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4} dy}{\sqrt{2E_0 - \frac{k}{2} \frac{4E_0}{k} y^4}} = \int_{-1}^1 \frac{\left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4} dy}{\sqrt{2E_0} \sqrt{1-y^4}} = \left(\frac{4E_0}{k}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2E_0}} \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}}_{\substack{\text{indipend.} \\ \text{di } E_0}}$$

$\sim \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{1}{\sqrt{E_0}}$

Più l'energia è piccola, più il periodo è lungo.

Oss. 1 Se facessimo il conto del periodo con $u'' = -ku$ otterremmo che il periodo NON dipendeva da E_0 .

Oss 2 $\ddot{u} = -\sin u \quad \ddot{u} \dot{u} = -\sin u \dot{u} \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2\right]' = [\cos u]'$

$E(u, v) = \frac{1}{2} v^2 - \cos u$ è costante lungo le traiettorie. Ha un min. glob. in $(0, 0)$ e lì vicino le traiettorie sono curve chiuse.