

Def. Si indica con ℓ^2 è l'insieme delle successioni $\{a_n\}$ di numeri reali tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

Per familiarizzare:

- 0 - dim. che è un prodotto scalare
- 1 - dim. che la norma è triangolare
- 2 - DIFFICILE: dim. che è completo.

Brutalmente, è un'estensione di $\mathbb{R}^n$ con infinite componenti.

Base algebrica di uno spazio vettoriale. Insieme B di vettori linearmente indipendenti tali che ogni vettore dello spazio è combinazione lineare finita di elementi di B .

Base Hilbertiana di uno spazio vettoriale. Insieme B di vettori lin. indip. t.c. ogni elemento dello spazio è serie di combinazioni lineari di elementi di B .

Occhio! L'indipendenza lineare rimane un concetto FINITO
(ogni comb. lin. finita è 0 $\Leftrightarrow$ i coeff. sono tutti 0)

Esempio In ℓ^2 i vettori $e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{posiz. } n}{1}, 0, \dots)$

costituiscono una base ortonormale NUMERABILE.

Fatto: se in un Hilbert qualunque esiste una base Hilbertiana ortonormale, allora quell' Hilbert è come se fosse ℓ^2 .

Se $\{e_n\}$ è la base, allora le componenti di un generico v rispetto alla base si calcolano con i prodotti scalari!

$$a_n = \langle v, e_n \rangle = \text{numero}$$

$$\underset{\text{vettore}}{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\text{numero}}{a_n} \underset{\text{vettore}}{e_n}$$

Domanda: è vero che $\{v \in H : |v| \leq 1\}$ è compatto?

In dimensione infinita NO!!

Basta prendere una base Hilbertiana ortonormale $\{e_n\}$ per avere che non è una successione di Cauchy, in quanto $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$ per ogni $n \neq m$, quindi non può avere s. succ. convergenti

Osservazione Il classico procedimento di ortonormalizzazione permette, in ogni spazio di Hilbert, di avere

→ o dimensione finita

→ o un insieme $\{e_n\}$ numerabile di vettori t.c.

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= 0 & \text{se } n \neq m \\ &= 1 & \text{se } n = m \end{aligned}$$

Questo basta per avere la non compattezza delle palle in dimensione infinita

— o — o —

Convergenza DEBOLE Sia H uno spazio di Hilbert e sia x_n una successione di elementi di H . Si dice che x_n converge debolmente ad $x_\infty \in H$, e si scrive $x_n \rightharpoonup x_\infty$ se

$$\langle x_n, v \rangle \longrightarrow \langle x_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Numeri che convergono a numeri

Esempio $H = \ell^2$, $x_n = n$ -esimo elemento della base Hilbertiana

$\langle x_n, v \rangle = n$ -esima componente di v ,

quindi poiché

$$\sum \langle x_n, v \rangle^2 < +\infty$$

per definizione stessa di stare in ℓ^2 , avremo che $\langle x_n, v \rangle \rightarrow 0$,
quindi $x_n \rightarrow 0$.

Teorema 1 $\{v \in H: |v| \leq 1\}$ è compatto debolmente

Teorema 2 La norma è

- * continua fortemente
- * non continua debolmente
- * semicontinua inferiormente debolmente.

Dim. teo. 2 Se $u_n \rightarrow u_\infty$ in H , allora $|u_n| \rightarrow |u_\infty|$.

Basta dimostrare che $|u_n|^2 \rightarrow |u_\infty|^2$.

Basta dimostrare che $|u_n|^2 - |u_\infty|^2 \rightarrow 0$

$$|u_n|^2 = |u_n - u_\infty + u_\infty|^2$$

$$= \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{perché } u_n \rightarrow u_\infty}} + |u_\infty|^2 + \underbrace{2 \langle u_n - u_\infty, u_\infty \rangle}_{\substack{\text{per C.S.} \\ | \langle \dots, \dots \rangle | \leq |u_n - u_\infty| \cdot |u_\infty| \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \quad \text{Fisso}}}$$

Per dimostrare che non è continua debolmente basta l'esempio della base Hilbertiana $|e_n| = 1$, $|\text{limite debole}| = 0$

Per l'ultimo punto bisogna dimostrare che, se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^2 \geq |u_\infty|^2$$

$$|u_n|^2 = |u_\infty|^2 + 2 \underbrace{\langle u_n, u_\infty \rangle}_{\substack{\downarrow \\ \langle u_\infty, u_\infty \rangle \\ \text{per conv. debole}}} - 2 \cancel{\langle u_\infty, u_\infty \rangle} + \underbrace{|u_n - u_\infty|^2}_{\substack{\geq 0 \text{ sempre, quindi} \\ \text{al limite dà il } \geq \dots}}$$

Base algebrica / base Hilbertiana in uno sp. di Hilbert

Indipendenza lineare Sia V uno sp. vett. Un sottoinsieme $B \subseteq V$ si dice linearmente indipendente se e solo se ogni combinazione lineare finita di elementi di B è 0 $\Leftrightarrow$ tutti i coeff. sono nulli.

In simboli

$\forall m \geq 1, \forall v_1, \dots, v_m \in B$ distinti, $\forall c_1, \dots, c_m$ reali si ha

$$\sum_{i=1}^m c_i v_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = \dots = c_m = 0.$$

Base algebrica Un insieme $B \subseteq V$ è una base algebrica se è linearmente indipendente e genera tutto V , cioè per ogni $v \in V$, esiste $n \geq 1$ ed esistono $v_1, \dots, v_n \in B$ ed esistono $c_1, \dots, c_n$ reali t.c.

$$v = \sum_{i=1}^n c_i v_i. \quad (\star)$$

In altri termini: ogni elemento $v \in V$ è combinazione lineare finita di elementi di B .

Fatto generale La scrittura $(\star)$ è unica (se ce ne fossero due diverse, parto dalla stessa parte ed avrei che B non è lin. indep.).

Fatto generale In ogni sp. vett. V esistono basi algebriche, anzi per ogni insieme $B \subseteq V$ che sia linearmente indep., esiste almeno una base algebrica $B' \supseteq B$.

[Dim. basta prendere un insieme $B' \supseteq B$ che sia linearmente indep. e massimale (se aggiungo ancora qualcosa, perdo la lin. indep.). Questa è la base cercata. Il problema è dim. che il massimale esiste...]

Base Hilbertiana Sia H uno spazio di Hilbert. Una base Hilbertiana numerabile è un insieme numerabile di vettori $\{e_n\} \subseteq H$ (volendo una successione) tale che

(i) sono ortonormali, cioè $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(ii) per ogni $v \in H$, esiste una successione $\{a_n\}$ di numeri reali b.c.

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 coefficienti, vettori
 cioè numeri

Gli a_n si dicono coefficienti o componenti di v rispetto alla base $\{e_n\}$.

Fatti generali Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora la scrittura di sopra è unica e $a_n = \langle v, e_n \rangle$. Inoltre

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \quad (\text{Pitagora negli Hilbert}).$$

Achtung! Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

← serie di vettori

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

← serie di numeri

converge se e solo se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

Def. Pariauno $S_n := \sum_{i=1}^n a_i e_i$ $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^n a_i^2$. Allora

Serie dei vettori converge $\Leftrightarrow S_n$ converge

$\Leftrightarrow S_n$ è di Cauchy (H è completo)

$\Leftrightarrow \bar{S}_n$ è di Cauchy

$\Leftrightarrow \bar{S}_n$ converge

$\Leftrightarrow$ serie dei numeri converge

$i < k$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{distanza in } H}}{\text{dist}^2(S_i, S_k)} = |a_{i+1}e_{i+1} + \dots + a_k e_k|^2 = a_{i+1}^2 + \dots + a_k^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distanza in } \mathbb{R}}}{\text{dist}^2(\bar{S}_i, \bar{S}_k)}.$$

Esempio Sia H lo spazio di Hilbert costituito dalle successioni $\{a_n\}$ di numeri reali t.c. $\sum a_n^2 < +\infty$. Il prodotto scalare tra $v = \{a_n\}$ e $w = \{b_n\}$ è dato da

$$\langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

Si dimostra che

- (i) il prodotto scalare è ben definito (cioè se $v \in H$ e $w \in H$, allora la serie che definisce $\langle v, w \rangle$ converge); F
- (ii) ha le proprietà di un prodotto scalare (bilineare, def. positivo) F
- (iii) H risulta un Hilbert (Difficile: completezza).

Di solito questo spazio si indica con ℓ^2 .

Una base Hilbertiana di ℓ^2 è data dai vettori

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \dots)$$

Algebra Lineare Fissata una base algebrica in uno spazio vettoriale V di dim. finita k , accade che ad ogni elemento $v \in V$ possiamo associare k -numeri reali $(a_1, \dots, a_k)$, cioè lo spazio risulta isomorfo ad $\mathbb{R}^k$.

Negli spazi di Hilbert Se esiste una base Hilbertiana $\{e_n\}$, allora ad ogni $v \in H$ possiamo associare la successione $\{a_n\}$ delle sue componenti, che per quanto detto prima sta in ℓ^2 . In altre parole: se c'è la base Hilb., lo spazio è isomorfo ad ℓ^2 .

Compattezza negli spazi di Hilbert

Brutta notizia In uno spazio di Hilbert di dimensione infinita le palle chiuse non sono compatte

$$\{v \in H : \|v\| \leq 1\}$$

"Dim." Supponiamo che esista una base Hilbertiana $\{e_n\}$. Allora tutti i suoi elementi stanno in $\overline{B}_1(0)$ = palla con centro in 0 e raggio 1 chiusa.

Basta che dim. che $\{e_n\}$ non può avere s.succ. convergenti.

Se ci fosse una s.succ. convergente, questa sarebbe di Cauchy, ma non è possibile perché la distanza tra 2 elementi qualunque è sempre $\sqrt{2}$.

Dim. In realtà non ho usato che $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, ma solo che sono vettori ortonormali.

Questi si possono ottenere facilmente per involuzione sfruttando il procedimento di ortonormalizzazione dell'algebra lineare

Analogamente gli insiemi del tipo $\{v \in H : |v| = 1\}$ non sono compatti.