

SSSUP 2011
Corso di Complementi di
Analisi Matematica I
Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 01 – Successioni per ricorrenza lineari di ordine 1	4
Lezione 02 – Successioni per ricorrenza lineari di ordine superiore	8
Lezione 03 – Successioni per ricorrenza autonome: studio mediante monotonia . . .	12
Lezione 04 – Successioni per ricorrenza autonome: distanza dal presunto limite . . .	16
Lezione 05 – Successioni per ricorrenza spiraleggianti	20
Lezione 06 – Esempi di studio di successioni per ricorrenza	24
Lezione 07 – Liminf e limsup di successioni	28
Lezione 08 – Versione liminf/limsup di teoremi classici. Liminf e limsup di funzioni	33
Lezione 09 – Studio della velocità di convergenza di successioni per ricorrenza . . .	37
Lezione 10 – Successioni per ricorrenza non autonome: primi esempi	41
Lezione 11 – Successioni per ricorrenza non autonome con “valori soglia”	45
Lezione 12 – Esercizi misti su successioni per ricorrenza, liminf, limsup	50
Lezione 13 – Uniforme continuità, hölderianità, lipschitzianità	54
Lezione 14 – Esempi ed esercizi sulle funzioni uniformemente continue	58
Lezione 15 – Equazioni differenziali: teorema di esistenza ed unicità	62
Lezione 16 – Equazioni differenziali: primi studi qualitativi	66
Lezione 17 – Teorema di confronto, sopra e sottosoluzioni, blow-up e break-down . .	70
Lezione 18 – Teoremi di esistenza globale per equazioni differenziali	74
Lezione 19 – Studio qualitativo di equazioni differenziali non autonome	78
Lezione 20 – Equazioni differenziali con “valori soglia”	82
Lezione 21 – Equazioni differenziali di ordine 2 (parte 1)	86
Lezione 22 – Equazioni differenziali di ordine 2 (parte 2)	89
Lezione 23 – Sistemi di equazioni differenziali lineari	93
Lezione 24 – Stabilità per sistemi di equazioni differenziali lineari	97
Lezione 25 – Metodi energetici per la stabilità	101
Lezione 26 – Teorema di linearizzazione per sistemi non lineari	104

SSSUP 2011 - LEZIONE 01

Titolo nota

13/01/2011

Successioni per ricorrenza1° ordine, autonoma: dipendenza dal solo termine precedente

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad a_0 = \alpha$$

$\uparrow$ legge di passaggio $\uparrow$ valore iniziale dato

2° ordine, autonoma: dipendenza da 2 termini precedenti

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}) \quad a_0 = \alpha \quad a_1 = \beta$$

$\uparrow$ dati $\uparrow$ dati

Ordine k: $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1})$ + k valori iniziali datiNon autonoma: La legge di passaggio dipende anche da n

$$a_{n+1} = f(n, a_n) \quad \text{1° ordine} \quad a_{n+1} = \cos(n a_n)$$

$$a_{n+1} = f(n, a_n, a_{n-1}) \quad \text{2° ordine}$$

colpevole del non essere autonoma.

e così via

Domande a cui rispondere: proprietà (monotonia, Limitatezza, ...), calcolo del Limite (se esiste)

Utilizzo operativo: per un computer è banale iterare una ricorrenza.Quello che non si riesce quasi mai a fare è trovare una formula esplicita per calcolare un certo a_n senza calcolare prima tutti i precedenti.

Questo riesce nel caso di successioni per ricorrenza LINEARI:

$$x_{n+1} = a x_n \quad \text{1° ordine}$$

$$x_{n+1} = a x_n + f(n)$$

$$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} \quad \text{2° ordine}$$

$$x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} + f(n)$$

Lineare omogeneoLineare non omogeneo

Oss. Non omogeneo vuol dire non autonoma? NO!

C'è il caso in cui $f(n) = \text{costante} \neq 0$ (es.: $x_{n+1} = 3x_n + 4$)

Caso lineare 1° ordine omogeneo

$$x_{n+1} = ax_n \quad x_0 = \alpha$$

Formula esplicita:

$$x_n = \alpha a^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dav. base induttiva

Caso lineare 1° ordine non omogeneo ma autonoma

$$x_{n+1} = ax_n + b \quad x_0 = \alpha$$

1° modo: calcolo un po' di termini e cerco di capire

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = a\alpha + b, \quad x_2 = a^2\alpha + ab + b, \quad x_3 = a^3\alpha + a^2b + ab + b$$

Congettura: $x_n = a^n\alpha + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = a^n\alpha + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$
per lo meno se $a \neq 1$.

La dimostrazione è una base induttiva.

Quando $a = 1$ è ancora più semplice: $x_{n+1} = x_n + b$

$$x_{n+1} = \begin{cases} a^n\alpha + b \frac{a^n - 1}{a - 1} & \text{se } a \neq 1 \\ \alpha + nb & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

2° modo: assumiamo $a \neq 1$. Ignoro il dato iniziale. Esistono successioni costanti che soddisfano la ricorrenza?

Supponiamo $x_n \equiv x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$x = ax + b \Rightarrow x = \frac{b}{1-a}$$

$$\text{Pongo ora } b_n = x_n - \frac{b}{1-a}$$

Che cosa risolve b_n ?

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{b}{1-a} = ax_n + b - \frac{b}{1-a} \quad (x_n = b_n + \frac{b}{1-a}) \\
 &= a \left(b_n + \frac{b}{1-a} \right) + b - \frac{b}{1-a} \\
 &= ab_n + \underbrace{\frac{ab}{1-a} + b - \frac{b}{1-a}}_{=0} \\
 &= ab_n
 \end{aligned}$$

Quindi $b_{n+1} = ab_n \Rightarrow b_n = a^n \cdot b_0$

Ho una formula esplicita per b_n , quindi anche una formula esplicita per x_n .

$$x_n = b_n + \frac{b}{1-a} = a^n \cdot b_0 + \frac{b}{1-a} = a^n \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

Facendo i conti è la formula di prima.

Struttura generale Voglio una formula esplicita per

$$x_{n+1} = ax_n + f(n)$$

Supponiamo di conoscere per qualche motivo una successione y_n che verifica questa ricorrenza, cioè $y_{n+1} = ay_n + f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Come sono fatte tutte le altre soluzioni?

Pongo $z_n = \overset{\text{mist.}}{\downarrow} x_n - \overset{\text{nota}}{\downarrow} y_n$. Cosa risolve z_n ?

$$z_{n+1} = x_{n+1} - y_{n+1} = ax_n + \cancel{f(n)} - ay_n - \cancel{f(n)} = az_n$$

USO PESANTE DELLA LINEARITÀ
↓

Il termine non omogeneo è sparito, quindi so calcolare z_n . Nota z_n è nota pure x_n :

$$x_n = z_n + y_n = a^n \cdot \overset{\text{nota}}{\downarrow} z_0 + \overset{\text{nota}}{\downarrow} y_n$$

Morale: se uno conosce una soluzione qualunque, allora nel caso lineare conosce TUTTE le soluzioni

Analogia con i sistemi lineari: se ho 2 soluzioni di un sistema lin. non omogeneo

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ x - y + 3z = 7 \\ x - z = 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Se } (x_1, y_1, z_1) \text{ e } (x_2, y_2, z_2) \text{ sono solus.,} \\ \text{allora } (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \text{ è sol.} \\ \text{del sistema con tutti o al 2° membro.} \\ \text{---o---o---} \end{array}$$

Esempio 1 $x_{n+1} = 3x_n + n$ $x_0 = 5$

Provo a trovare una successione che verifichi la ricorrenza (senza dato iniziale). Proviamo a cercarla di tipo polinomiale:
 $y_n = an + b$, con a e b coeff. incogniti. Sostituisco:

$$\underbrace{a(n+1) + b}_{y_{n+1}} = 3 \underbrace{(an + b)}_{3y_n} + n$$

$$\begin{aligned} an + a + b &= 3an + 3b + n; & -2an + a - 2b &= n \\ \begin{cases} -2a = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases} & \quad a = -\frac{1}{2} & b = \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Così ho dimostrato che $y_n = -\frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$ è soluzione della ric.

Ma allora $z_n = x_n - y_n$ risolve la stessa ricorrenza senza il termine non omogeneo, cioè $z_{n+1} = 3z_n$, da cui

$$x_n = z_n + y_n = 3^n z_0 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

Al variare di z_0 questa fornisce tutte le soluzioni. Se devo imporre $x_0 = 5$, basta sostituire: $5 = z_0 - \frac{1}{4} \Rightarrow z_0 = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$

$$x_n = \frac{21}{4} \cdot 3^n - \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

Questa non si vedeva provando a fare i primi termini...

SSSUP 2011 - LEZIONE 02

Titolo nota

13/01/2011

Nei casi $x_{n+1} = ax_n + f(n)$

Se $f(n)$ è un polinomio in n di grado d , allora è ragionevole trovare una successione y_n che la verifica sotto forma di polinomio dello stesso grado a coeff. incogniti.

Una volta trovata y_n , si trova facilmente la soluzione gen. x_n . La formula della sol. gen. ha al suo interno un parametro libero z_0 che permette di assumere ogni condizione iniziale.

Esempio 1 $x_{n+1} = x_n + n^2 + 3$.

Idea iniziale: provare con un polinomio di grado 2:

$$y_n = an^2 + bn + c.$$

$$\underbrace{a(n+1)^2 + b(n+1) + c}_{y_{n+1}} = \underbrace{an^2 + bn + c}_{y_n} + n^2 + 3$$

$$\cancel{an^2} + 2an + a + b\cancel{n} + b + c = \cancel{an^2} + b\cancel{n} + c + n^2 + 3$$

Problema: spariscono i termini in n^2 . Il problema nasce dal coeff. 1 in fronte a x_n .

Tentativo da fare: passare al grado successivo, tralasciando il termine noto che tanto sparisce per lo stesso motivo di prima.

Tentativo: $y_n = an^3 + bn^2 + cn$ e con qualche calcolo si finisce.

Esempio 2 $x_{n+1} = 2x_n + 5^n$

Cerco una soluzione speciale del tipo $y_n = a \cdot 5^n$. Sostituisco:

$$a \cdot 5^{n+1} = 2a \cdot 5^n + 5^n$$

$$5a \cdot 5^n = (2a+1)5^n \Rightarrow 5a = 2a+1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Una soluzione speciale è $y_n = \frac{1}{3} \cdot 5^n$

Ponendo $z_n = x_n - y_n$ ottengo $z_{n+1} = 2 \cdot z_n$, quindi

$$x_n = z_n + y_n = \underbrace{z_0}_{\text{parametro libero}} \cdot 2^n + \frac{1}{3} 5^n$$

Esempio 3

$$x_{n+1} = 5x_n + 5^n$$

Se provo $y_n = a \cdot 5^n \Rightarrow a \cdot 5^{n+1} = 5 \cdot a \cdot 5^n + 5^n$

Soluzione: mettere una n davanti!

$$y_n = a n 5^n \Rightarrow a(n+1)5^{n+1} = 5an5^n + 5^n$$

$$an5^{n+1} + a5^{n+1} = 5an5^n + 5^n$$

stessa cancellazione di prima
moltiplicata per n

Ora $a = \frac{1}{5}$ e si fa...

— 0 — 0 — 0 —

ORDINE 2

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \quad (\text{caso omogeneo})$$

Proviamo a vedere se ci sono soluzioni di tipo esponenziale.

Provo $x_n = R^n$. Sostituisco:

$$R^{n+1} = aR^n + bR^{n-1} \Rightarrow R^2 = aR + b$$

Devo prendere come R una delle soluzioni dell'eq. di 2° grado

$\Delta > 0$ Ho trovato 2 soluzioni che vanno bene

$\Delta < 0$ Ho trovato 2 soluzioni complesse che vanno bene

$\Delta = 0$ Ho trovato una soluzione che va bene. Un'altra si ottiene mettendo una n davanti. Perché? $x_n = nR^n$

$$(n+1)R^{n+1} = anR^n + b(n-1)R^{n-1}$$

$$nR^2 + R^2 = anR + bn - b$$

$$n(R^2 - aR - b) = -R^2 - b$$

$= 0$ perché R

è soluzione dell'equazione

$$R^2 = aR + b$$

essendo R una radice
doppia del polinomio
abbiamo che

$-b =$ termine noto $=$

$=$ prodotto radici

$$= R^2$$

Utilizzo ulteriore della linearità. Date x_n e y_n 2 soluzioni di una ricorrenza lineare omogenea, allora la successione

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n \quad (\text{combinazione lineare...})$$

cosa risolve?

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} \\ &= \alpha (ax_n + bx_{n-1}) + \beta (ay_n + by_{n-1}) \\ &= a(\alpha x_n + \beta y_n) + b(\alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1}) \\ &= a z_n + b z_{n-1} \end{aligned}$$

Nel caso LINEARE OMOGENEO ogni combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione !!!

Una volta note 2 soluzioni, ho trovato una famiglia a 2 parametri di soluzioni. Se x_n e y_n lo so, ho che

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n$$

è soluzione. Sono tutte? Sì, perché ogni soluzione è univocamente determinata sapendo z_0 e z_1 e con 2 parametri a disposizione posso "pittare" i 2 valori.

Oss. le 2 soluzioni di base devono essere non l'una multipla dell'altra, cioè linearmente indipendenti.

Nei 3 casi $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$ abbiamo trovato 2 soluzioni linearmente indipendenti. La sol. generale è una loro comb. lin.

Esempio Fibonacci: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.

Per trovare 2 sol. considero l'eq. $R^2 = R + 1$, quindi

$$R^2 - R - 1 = 0 \quad R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \text{ La soluzione generale è}$$

$$x_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Dati i valori iniziali (che per Fibonacci sono $x_0 = 0$, $x_1 = 1$) si determinano univocamente α e β

Oss.1 I numeri di Fibonacci sono interi, ma la formula è piena di $\sqrt{5}$, che evidentemente si semplifica

Oss.2 Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \dots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

— 0 — 0 —

Nel caso in cui le 2 radici sono complesse, ma i dati iniziali sono reali, si ottiene una formula dove le i alla fine si semplificano come le $\sqrt{5}$ in Fibonacci.

— 0 — 0 —

Se è non omogenea, tipo $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1} + n$, la soluzione generale sarà del tipo

$$x_n = z_n + y_n$$

$\uparrow$ soluzione generale (con 2 parametri) della ricorrenza omogenea associata.
 $\uparrow$ soluzione qualunque trovata per tentativi

— 0 — 0 —

Se la ricorrenza è di ordine k , il polinomio associato è di ordine k , quindi ha k radici che producono k elementi della base le cui combinazioni lineari danno la soluzione generale. Se c'è una radice R di molteplicità m , questa produce m elementi della base della forma

$$R^n, \quad n \cdot R^n, \quad n^2 R^n, \quad \dots, \quad n^{m-1} R^n.$$

SSSUP 2011 - LEZIONE 03

Titolo nota

17/01/2011

Successioni per ricorrenza non lineari (autonome, 1° ordine)

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad a_0 = \alpha \text{ dato}$$

Impossibile (in generale) avere una formula esplicita

Interpretazione grafica

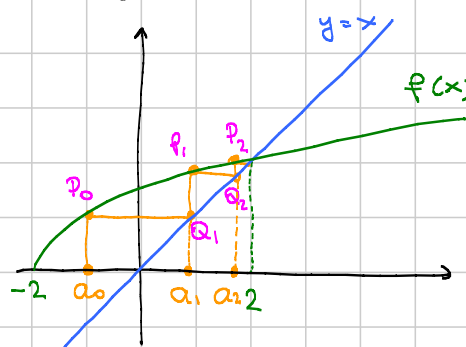
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

$$a_0 = -1$$

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

Per fare il disegno occorre studiare

$$f(x) = x, \quad f(x) > x, \quad f(x) < x$$

Slogan: verticale alla funzione
orizzontale alla bisettrice

(La procedura produce 1 p.to ad ogni passaggio)

$$P_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1) ; \quad Q_1 = (a_1, a_1) ; \quad P_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$$

$$P_i = (a_i, a_{i+1}) ; \quad Q_i = (a_i, a_i)$$

I valori $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ sono le ascisse dei punti ottenuti seguendo lo slogan.Nell'esempio è chiaro che a_n è strett. crescente e $a_n \rightarrow 2$. Per dimostrarlo bisogna elaborare un piano.**PIANO** (Piano classico con la monotonia)

$$(i) \quad -1 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{limitazione della zona in cui sta } a_n)$$

$$(ii) \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{monotonia debole})$$

$$(iii) \quad a_n \rightarrow L \in \mathbb{R} \quad (\text{esistenza del limite})$$

$$(iv) \quad L = 2 \quad (\text{calcolo del limite})$$

Idea: dimostrare in successione i vari p.ti usando anche i p.ti prec.

Dim. (i) Induzione $n=0$ banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $-1 \leq a_n \leq 2$ Tesi: $-1 \leq a_{n+1} \leq 2$

Dim.: prendo l'ipotesi e "applico la funzione" $f(x)$

$$f(-1) \leq f(a_n) \leq f(2) \quad (\text{osservazione essenziale: posso lasciare}$$

$$-1 \leq 1 \leq a_{n+1} \leq 2 \quad \text{invarianti i versi perché } f(x) \text{ è strettamente}$$

il che dim. la tesi.

crescente per $x \geq -2$)

Dim. (ii) 1° modo: ricorrenza + disequazione

Devo dim. che $a_{n+1} \geq a_n$, cioè $\sqrt{a_n+2} \geq a_n$, cioè devo risolvere la disequazione $\sqrt{x+2} \geq x$ (che è $f(x) \geq x$).

Questa ha come soluzione $-2 \leq a_n \leq 2$, e noi sappiamo che questa è verificata grazie al p.to (i).

2° modo: induzione + applico f

$n=0$ $a_1 \geq a_0$ $1 \geq -1$ ok.

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \geq a_n$ Tesi: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

Dim.: applico $f(x)$ all'ipotesi e ottengo $f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$
(conservo i versi perché ...)

$$a_{n+2} \geq a_{n+1}$$

Dim. (iii) Teo succ. monotona: a_n è

- monotona crescente per il p.to (ii)
- limitata superiormente per il p.to (i)

Quindi esiste il limite ed è reale.

Dim. (iv) Passo al limite nella ricorrenza (usando che l esiste $l \in \mathbb{R}$)

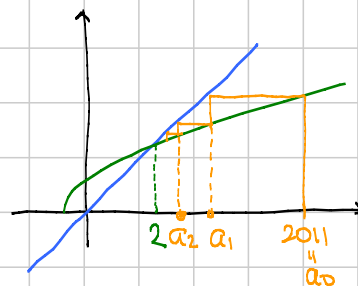
$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{a_n + 2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \sqrt{l + 2} \end{array}$$

Otengo così un'equazione in l (che è $x = f(x)$) la cui soluzione (unica in questo caso) è $l = 2$. $\square$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ $a_0 = 2011$

- Piano**
- (i) $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 - (iv) $l = 2$



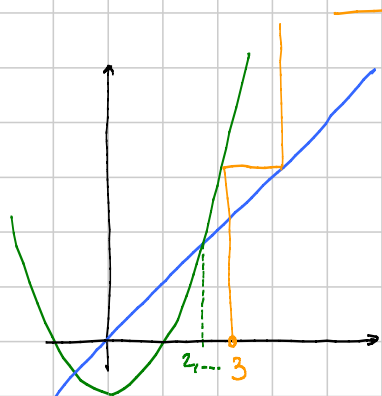
Dim. esattamente come prima.

Oss. la funzione $f(x)$ è monotona crescente, MA la successione a_n è monotona DECRESCENTE.

Esempio 3 $a_{n+1} = a_n^2 - 3$ $a_0 = 3$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



Dal disegno sembra che $a_n \rightarrow +\infty$.

- PIANO**
- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
 - (iv) $l = +\infty$

Dim (i) Induzione ...

Dim. (ii) 1° modo: ricorrenza + disequazione:

$a_{n+1} \geq a_n$, cioè $a_n^2 - 3 \geq a_n$, cioè $a_n^2 - a_n - 3 \geq 0$, cioè valori esterni all'intervallo delle radici. Dal pto (i) sappiamo che $a_n \geq 3 \geq \text{radice} + \text{grande}$, quindi ok.

2° modo: induzione + applico $f(x)$

n=0 $a_1 \stackrel{?}{\geq} a_0 \quad 6 \geq 3 \quad \text{ok.}$

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_{n+1} \geq a_n$... applico $f(x)$ e conservo i versi perché è crescente per $x \geq 0$ ed io sto lavorando nella zona $a_n \geq 3$ grazie al p.to (i). Ottengo $f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$
 $a_{n+2} \geq a_{n+1}$
 e questa è la tesi del passaggio induttivo.

Dim. (iii) Per il p.to (ii) a_n è debolm. crescente. Allora a_n ha limite, finito o $+\infty$, per il teo. sulle succ. monotone.

Dim. (iv) Suppongo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora posso passare al limite nella ricorrenza e ottengo

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n^2 - 3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 - 3 \end{array}$$

Ottengo la solita equazione $f(x) = x$, che ha come soluzioni $l = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, ma entrambe sono incompatibili con il p.to (i).

Essendo assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$, resta come unica possibilità $l = +\infty$.

Osservazioni generali $a_{n+1} = f(a_n)$

① Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora l è una delle soluzioni dell'equazione $x = f(x)$. Le intersezioni tra il grafico di $f(x)$ e la bisettrice sono i possibili limiti reali.

② Dove $f(x) \geq x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$
 " $f(x) \leq x$ si ha $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$

Quindi il tipo di monotonia di a_n dipende dallo stare $f(x)$ sopra o sotto la bisettrice nella zona di interesse, cioè quella individuata al p.to (i).

Punto (ii) Bisogna dim. che esiste una costante $c < 1$ tale che

$$d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Oss. NON basta dimostrare che $d_{n+1} < d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$: la costante c deve essere < 1 e deve essere la stessa per ogni $n \in \mathbb{N}$]

$$d_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{|a_{n+1} - 2|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}}{|\sqrt{a_n + 2} - 2|} \quad (\text{Razionalizzo})$$

$$= \left| (\sqrt{a_n + 2} - 2) \cdot \frac{\sqrt{a_n + 2} + 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right|$$

$$= \left| \frac{a_n + 2 - 4}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right|$$

stimo il denom. ≥ 2

$$= \frac{|a_n - 2|}{\sqrt{a_n + 2} + 2} = \frac{d_n}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \leq \frac{d_n}{2}$$

Così ho ottenuto che $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$, quindi ho la (ii) con $c = \frac{1}{2}$, come volevo.

— o — o —

Commenti sul p.to (ii). $d_n = |a_n - \ell|$, dove ℓ è una soluzione dell'equazione $f(\ell) = \ell$.

Teorema di Lagrange Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che è

- continua in $[a, b]$,
- derivabile in (a, b) ,

allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi)$

Nel nostro caso:

$$d_{n+1} = \underbrace{|a_{n+1} - \ell|}_{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}} = \underbrace{|f(a_n) - f(\ell)|}_{\substack{\uparrow \\ \text{ricor.}}} = |a_n - \ell| \cdot |f'(\xi)| = d_n \cdot |f'(\xi)|$$

Ho ottenuto che $d_{n+1} = d_n \cdot \text{coeff.}$ Devo sperare che il coeff. sia minore di 1. Ovviamente su ξ so solo che sta tra a_n ed ℓ , e qui torna utile il p.to (i).

Nell'esempio ho che $l = 2$ e $a_n \geq 2$ per il p.to (i).

Quindi posso dire che $\xi \geq 2$ e quindi

$$|f'(\xi)| \leq \sup \{ |f'(x)| : x \geq 2 \}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}, \text{ quindi } \sup \{ |f'(x)| : x \geq 2 \} = \max \{ |f'(x)| : x \geq 2 \} = \frac{1}{4}$$

$f'(x)$ è massima quando il denom. è minimo.

In questo modo ottengo $d_{n+1} \leq \frac{1}{4} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e va benissimo.

Esempio 3 $a_{n+1} = a_n^2 - 3 \quad a_0 = 6$

PIANO Pongo $d_n = a_n - l$ (senza valore assoluto), dove l è la radice + grande dell'equazione $f(l) = l$

(i) $a_n \geq l \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \geq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (e mi serve che sia $c > 1$)

(iii) $d_n \geq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow +\infty$, cioè $a_n \rightarrow +\infty$.

I p.ti (i), (iii), (iv) funzionano come sempre.

Dim (ii) 1° modo: "elementare"

$$d_{n+1} = a_{n+1} - l = a_n^2 - 3 - l \quad \text{e da qui non è ovvio come tirare fuori } d_n$$

Con un po' di mestiere uso che $l^2 - 3 = l$, quindi

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_n^2 - 3 - l = a_n^2 - l^2 + l = (a_n + l)(a_n - l) \\ &= (a_n + l) d_n \geq 2 d_n \end{aligned}$$

Ho ottenuto che $d_{n+1} \geq 2 d_n$ e va benissimo.

$$\begin{aligned} \text{2° modo: "Lagrange": } d_{n+1} &= a_{n+1} - l = f(a_n) - f(l) \\ &= (a_n - l) \cdot f'(\xi) \\ &= d_n \cdot f'(\xi) \end{aligned}$$

Dove sta ξ ? Per il p.to ci) so che $\xi \geq l$, quindi

$$f'(\xi) \geq \inf \{ f'(x) : x \geq l \} = \inf \{ 2x : x \geq l \} \\ = \min \{ 2x : x \geq l \} = 2l \geq 4$$

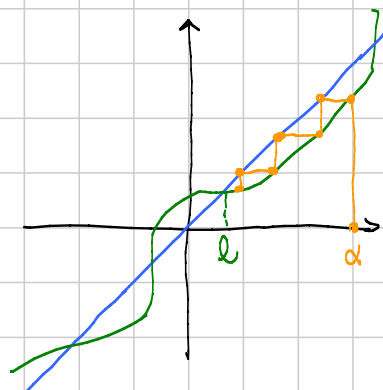
Ho così ottenuto che $\underline{a_{n+1}} \geq \underline{4a_n}$, il che barba e avanza.

Esempio di teorema (esercizio) $a_{n+1} = f(a_n)$ $a_0 = \alpha$

Supponiamo che

- $f(x)$ è continua
- $f(x)$ è debolmente crescente su tutto $\mathbb{R}$
- $f(\alpha) < \alpha$

Allora a_n è debolmente decrescente e tende alla più grande soluzione dell'eq $x = f(x)$ che sia minore di α . Se non esistono tali soluzioni, allora $a_n \rightarrow -\infty$



Piano della dim. Supponiamo che l sia la soluzione più grande

(i) $l \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (inclusione)

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (inclusione + applico f)

(iii) $a_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$ (solito)

(iv) $m = l$ (solito)

Esercizio

- Dimostrare il teorema in questo caso
- " " " se non esiste la soluzione più piccola di α
- Enunciare e dim. un teorema analogo nel caso $f(\alpha) > \alpha$.

SSSUP 2011

- LEZIONE 05

Titolo nota

24/01/2011

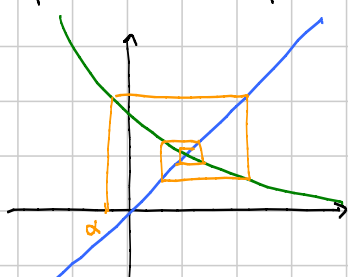
Succ. per ricorrenza autonoma

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

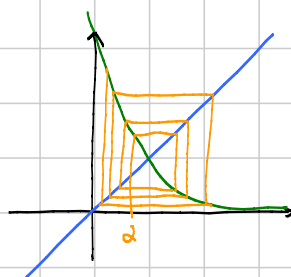
 $a_0 = \alpha$ dato

Se $f(x)$ è crescente, allora la successione a_n risulta monotona, crescente o decrescente (questo dipende dall'essere in una zona con $f(x) > x$ o $f(x) < x$).

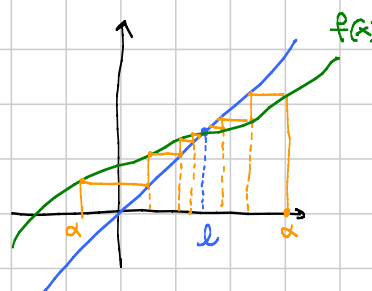
Se $f(x)$ è decrescente, le cose si complicano perché si ha spiraleggiamento di a_n



spiraleggiamento
"entrante"



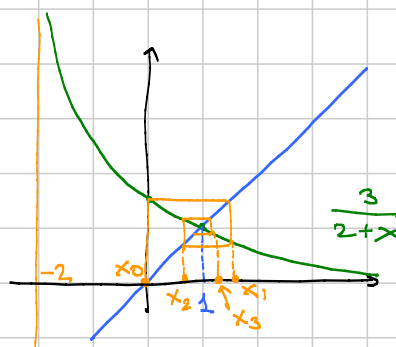
Spiraleggiamento
"uscite"



Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$ $x_0 = 0$

Idea: spiraleggiamento "entrante"

2 tipi di piano: $\rightarrow$ distanza dal limite
 $\rightarrow$ s.succ. pari/dispari

PIANO CON DISTANZA

(i) $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq c^n d_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Idea: pone $d_n = |x_n - 1|$ e dim. che $d_n \rightarrow 0$

(zona in cui sta la successione)

(dove $c < 1$ è fisso indip. da n)

(segue per induzione dal p.to (ii))

(segue per i carabinieri dal p.to (iii))

Dim. (i) 1° modo Induzione + disuguaglianze $n=0$ Base $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$ Tesi: $0 \leq x_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ Devo risolvere $x_{n+1} \geq 0$, cioè $\frac{3}{2+x_n} \geq 0$, cioè $x_n > -2$, che è vero per ipotesiDevo risolvere $x_{n+1} \leq \frac{3}{2}$, cioè $\frac{3}{2+x_n} \leq \frac{3}{2}$, cioè $\frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2} \leq 0$
cioè $\frac{2-2-x_n}{(2+x_n)2} \leq 0$, cioè $\frac{x_n}{x_n+2} \geq 0$ cioè valori esterni! $x_n < -2$ oppure $x_n \geq 0$ e questa (la seconda) è vera per ipotesi induttiva.2° modo Induzione + "applico f" $n=0$ Base $n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$. Applico $f(x)$ all'ipotesi. Essendo in un tratto in cui $f(x)$ è decrescente invertito i versi:

$$f(0) \geq f(x_n) \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{3}{2} \geq x_{n+1} \geq \frac{3}{2+\frac{3}{2}} = \frac{6}{7} \geq 0$$

che è proprio la tesi del passaggio induttivo.

Dim. (ii) 1° modo Direttamente:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\stackrel{\text{Def.}}{=} |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{Ric.}}{=} \left| \frac{3}{2+x_n} - 1 \right| \stackrel{\text{conto}}{=} \left| \frac{3-2-x_n}{2+x_n} \right| \stackrel{\text{conto}}{=} \\ &= \frac{|1-x_n|}{|2+x_n|} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d_n}{x_{n+2}} \leq \frac{1}{2} d_n \quad c = \frac{1}{2} < 1 \text{ OK} \end{aligned}$$

uso che $x_n \geq 0$

2° modo Stessa cosa con Lagrange:

$$d_{n+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} |x_{n+1} - 1| \stackrel{\text{Ric.}}{=} |f(x_n) - f(1)| \stackrel{\text{Lagrange}}{=} |x_n - 1| \cdot |f'(\xi)| = d_n \cdot |f'(\xi)|$$

$$|f'(\xi)| \leq \sup \left\{ |f'(x)| : 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} = \sup \left\{ \left| -\frac{3}{(2+x)^2} \right| : 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{4} < 1$$

— 0 — 0 —

PIANO CON LE 2 SOTTOSUCCESSIONIIdea: x_{2n} crescente e $\rightarrow 1$ x_{2n+1} decrescente e $\rightarrow +1$

(i) $0 \leq x_{2n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2 zone di competenza)

$1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{3}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2n} \leq x_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2 monotomie)

$x_{2n+1} \geq x_{2n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(Esistenza dei 2 limiti)

$x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$

(iv) $l = m = 1.$

(Conclusione)

Dim. (iii) Segue banalmente da (i), (ii) e teo. succ. monotoneDim. (iv) Non posso passare al limite in $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$. Sisto allora

$$x_{2n+1} = \frac{3}{2+x_{2n}}$$

$$\downarrow$$

$$m = \frac{3}{2+l}$$

$$x_{2n} = \frac{3}{2+x_{2n-1}}$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{3}{2+m}$$

Ho così il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{3}{2+l} & 2m + ml = 3 \\ l = \frac{3}{2+m} & 2l + ml = 3 \end{cases}$$

Sottraendo trovo $m=l$. Sostituisco in una qualunque e ottengo $2l+l^2=3 \Rightarrow l=1$ oppure $l=-3$. Però $l=3$ è incompatibile.

— 0 — 0 —

Oss. lemma delle 2 sottosuccessioni (esercizio) Se $a_{2n} \rightarrow l$ e $a_{2n+1} \rightarrow l$, allora $a_n \rightarrow l$.

Lemma delle k sottosuccessioni Considero una succ. a_n . Suppongo che esistano k sottosuccessioni tali che

- hanno tutte lo stesso limite $l \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- la loro unione copre tutta la succ. a_n tranne un num. finito di termini

Allora $a_n \rightarrow l$ (stesso l).

Domanda: e se le sottosuccessioni sono infinite?
 $\quad \quad \quad _0 _0 _$

Dim (i) Modo + comodo: inclusione + applico f sul blocco delle 2 proprietà.

$n=0$ $0 \leq a_0 \leq 1$ e $1 \leq a_1 \leq \frac{3}{2}$ Banale sostituzione

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $0 \leq a_n \leq 1$ e $1 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ (2 ipotesi)

Tesi: $0 \leq a_{n+2} \leq 1$ e $1 \leq a_{n+3} \leq \frac{3}{2}$ (2 tesi)

Dim. prendo la seconda ipotesi e applico $f(x)$ che è decrescente

$$1 \leq a_{n+1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) \geq f(a_{n+1}) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 1 \geq a_{n+2} \geq \frac{6}{7} \geq 0$$

che è la 1ª tesi. Ora applico $f(x)$ alla 1ª tesi:

$$0 \leq a_{n+2} \leq 1 \Rightarrow f(0) \geq f(a_{n+2}) \geq f(1) \Rightarrow \frac{3}{2} \geq a_{n+3} \geq 1$$

che è la 2ª tesi.

Dim (ii) Inclusione + applico $f(x)$ sul blocco delle 2.

$n=0$ Verificare che $x_0 \leq x_2$ e $x_1 \geq x_3$ (si fa a mano)

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $x_{2n} \leq x_{2n+2}$ e $x_{2n+1} \geq x_{2n+3}$ 2 ipotesi

Tesi: $x_{2n+2} \leq x_{2n+4}$ e $x_{2n+3} \geq x_{2n+5}$ 2 tesi

Dim. prendo la 2ª ipotesi e applico $f(x)$: uso che $f(x)$ è decrescente nella zona in questione.

$$x_{2n+1} \geq x_{2n+3} \Rightarrow f(x_{2n+1}) \leq f(x_{2n+3})$$

$$x_{2n+2} \leq x_{2n+4} \quad \text{che è la 1ª tesi}$$

Prendo la 1ª tesi e applico $f(x)$:

$$x_{2n+2} \leq x_{2n+4} \Rightarrow f(x_{2n+2}) \geq f(x_{2n+4})$$

$$x_{2n+3} \geq x_{2n+5} \quad \text{che è la 2ª tesi.}$$

$$\quad \quad \quad _0 _0 _$$

Oss. finale: $f(x)$ decrescente $\Rightarrow$ ad ogni applicazione si invertano i versi $\Rightarrow$ spiraleggiamento.

SSSUP 2010 - LEZIONE 06

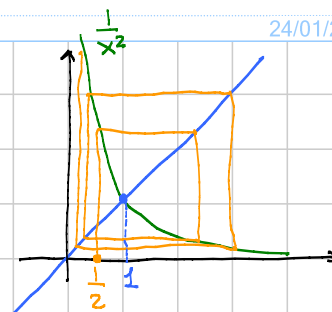
Titolo nota

24/01/2011

Esempio 1 $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2}$ $x_0 = \frac{1}{2}$

Idea: spiraleggiamento "uscite".

$x_0 = \frac{1}{2}$ $x_1 = 4$ $x_2 = \frac{1}{16}$, $x_3 = 256$



Non è vero che la distanza dal presunto limite aumenta!

Altra possibile idea: sui pari tende a 0 (decrescendo), sui dispari tende a $+\infty$ crescendo.

Possibile piano

(i) $0 \leq x_{2n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$4 \leq x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_{2n+2} \leq x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x_{2n+3} \geq x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = 0$ e $m = +\infty$

[Inclusione sui 2 blocchi applicando $f(x)$]

(Banale dai precedenti)

Dim. (iv) Sottili la ricorrenza sui pari e sui dispari:

Supponendo per assurdo che sia $m \in \mathbb{R}$ posso passare a limite:

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+1} & = & \frac{1}{x_{2n}^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \frac{1}{l^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+2} & = & \frac{1}{x_{2n+1}^2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{1}{m^2} \end{array}$$

da cui $l \neq 0$ (altrimenti sarebbe $m = +\infty$) e $m l^2 = 1 = m^2 l$.

Essendo m ed $l \neq 0$ ottienei $m = l = \pm 1$, che sono incompatibili con il p.to (i).

Quindi è assurdo supporre $m \in \mathbb{R}$, quindi $m = +\infty$, quindi (dal 2° limite) $l = 0$.

"Alternativa" al piano con i 2 blocchi: esaminio separatamente x_{2n} e x_{2n+1} . Pongo $a_n = x_{2n}$. Che cosa risolve a_n ?

$$a_{n+1} = x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) = f(f(x_{2n})) = f(f(a_n))$$

Quindi a_n risolve $a_{n+1} = f(f(a_n))$. Ora $f(f(x))$ è composizione di 2 decrescenti, quindi è crescente (nella zona in questione). Quindi posso studiare a_n con i metodi di monotonia.

Analogamente: $b_n = x_{2n+1}$ risolve $b_{n+1} = f(f(b_n))$, cioè la stessa.

Nell'esempio: $f(f(x)) = x^4$, quindi sto studiando

$$a_{n+1} = a_n^4 \quad a_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad b_{n+1} = b_n^4 \quad b_0 = 4$$

È evidente e facile da dimostrare che
 $a_n \rightarrow 0$ decrescendo } piani classici con
 $b_n \rightarrow +\infty$ crescendo } monotonia



Morale: con l'iterazione doppia (considerare $f(f(x))$) il caso con $f(x)$ decrescente ricade nel caso con $f(f(x))$ crescente.
 — o — o —

Teorema generale Sia f di classe C^1 (continua con derivata cont.)

Sia $l \in \mathbb{R}$ tale che

- $f(l) = l$
- $|f'(l)| < 1$.

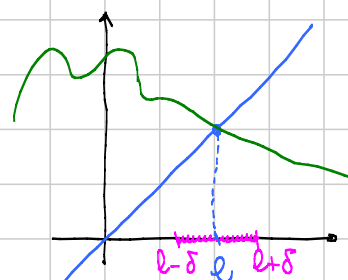
Considero la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = f(x_n)$ $x_0 = \alpha$.

Allora, se α è abbastanza vicino ad l , si ha che $x_n \rightarrow l$.

Dim. Per continuità di $f'(x)$, esiste $\delta > 0$ ed esiste $c < 1$ tale che

$$|f'(x)| \leq c \text{ per ogni } x \in [l-\delta, l+\delta]$$

Ora se $\alpha \in [l-\delta, l+\delta]$, uso la distanza



$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def.}}}{=} |f(x_n) - f(l)| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Ric. } f(l) = l}}{=} |x_n - l| \cdot |f'(\xi)| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=}$$

Ora ξ sta tra x_n ed l , quindi comunque in $[l-\delta, l+\delta]$, quindi $|f'(\xi)| \leq c$ e quindi $d_{n+1} \leq c d_n$ con $c < 1$ fisso.

Da qui la conclusione è immediata.

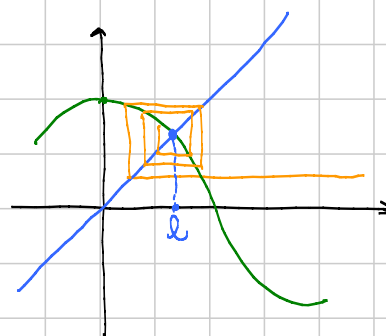
Piano : $\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & l - \delta \leq x_n \leq l + \delta \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(ii)} & d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(iii)} & d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{(iv)} & d_n \rightarrow 0, \text{ cioè } x_n \rightarrow l. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in un certo senso} \\ \text{si fanno insieme} \end{array}$

Conseguenza : in questi casi è possibile avere una stima della distanza dal limite (data dal p.to (iii)).

Esempio 2 Studiare $x_{n+1} = \cos x_n$ $x_0 = 2011$

(Equivalente a scrivere 2011 su una calcolatrice e continuare a premere il tasto "cos": dopo un po' il valore si stabilizza)

1° fatto : l'equazione $x = \cos x$ ha un'unica soluzione reale l .
Si dimostra verificando che $g(x) = x - \cos x$ è strettamente crescente, quindi iniettiva.



2° fatto : $x_n \rightarrow l$. Vorrei fare il piano con la distanza

(i) ...

(ii) $d_{n+1} \leq c \cdot d_n$

(iii) $d_n \leq c^n d_0$

(iv) $d_n \rightarrow 0$

Quando provo a dim. la (ii) ho che

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |\cos x_n - \cos l| \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange}}}{=} |x_n - l| \cdot \underbrace{|-\sin \xi|}_{f'(\xi)} \leq |x_n - l|.$$

Così ho che $d_{n+1} \leq d_n$, e questa non serve a nulla.

Idea: fare un p.to (i) in modo da dire che x_n sta in una zona più ristretta vicino ad l in cui la derivata di $\cos x$ sta staccata da ± 1 .

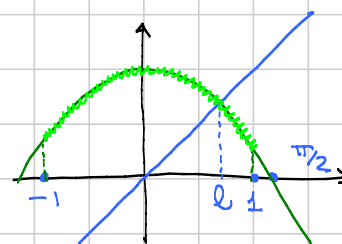
Piano

(i) $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ ovvia

(ii) $dx_{n+1} \leq c dx_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) solito ovvia

(iv) solito. ovvia



Dim (ii) $dx_{n+1} \leq dx_n \cdot |\sin x|$ ora x sta in $[-1, 1]$, quindi
 $|\sin x| \leq \max\{|\sin x| : x \in [-1, 1]\} = \sin 1$

Quindi $dx_{n+1} \leq \underbrace{\sin 1}_{c < 1} \cdot dx_n$

— o — o —

Così ho dim. che $dx_n \rightarrow 0$ e ho una stima sulla velocità di conv.

Esempio 3 $x_{n+1} = |2x_n - 3|$
 $x_0 = \sqrt{2}$

Fatti che si verificano

① $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

② Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l=1$ oppure $l=3$

③ Se fosse $l=1$, allora definitivamente

avrei che $0 \leq x_n \leq \frac{3}{2}$, e quindi avrei che $|x_{n+1} - 1| = 2|x_n - 1|$
 il che impedisce di tendere a 1...

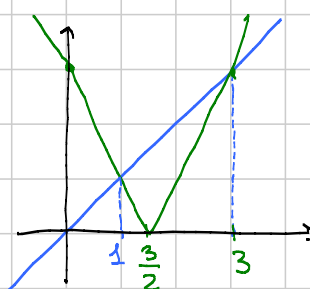
④ Se fosse $l=3$, allora definitiv. ..., quindi $|x_{n+1} - 3| = 2|x_n - 3|$

⑤ Non può tendere a 1 e non può tendere a 3 a meno che non valga $x_n = 1$ oppure $x_n = 3$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$.

⑥ x_n è sempre del tipo $a + b\sqrt{2}$ con $b \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{Z}$.
 Questo gli impedisce di valere 1 o 3.

⑦ Conclusione: x_n non ha limite.

— o — o —



SSSUP 2010 - LEZIONE 07

Titolo nota

07/03/2011

LIMINF e LIMSUPRiduciamo di topologia in $\mathbb{R}$. $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

- Si dice che x_0 è interno ad A se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$
Si indica con $\mathring{A}$ l'insieme di tutti i p.ti interni ad A (parte interna di A): $\mathring{A} \subseteq A$
intorno con centro x_0 e raggio ε
- Si dice che x_0 è aderente ad A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si indica con $\bar{A}$ l'insieme di tutti i punti aderenti ad A (chiusura di A): $A \subseteq \bar{A}$
- Si dice che x_0 sta sul bordo (o frontiera) di A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$.
L'insieme di questi punti si indica con ∂A (frontiera di A).
Si verifica facilmente che $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.
- Si dice che x_0 è un p.to di accumulazione per A se $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $[(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, cioè la prima intersezione è $\neq \emptyset$ e $\neq \{x_0\}$.
Si verifica che l'insieme dei p.ti di accumulazione è costituito da $\bar{A}$ meno i p.ti isolati di A (un p.to $x_0 \in A$ si dice isolato se $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \{x_0\}$).
- Si dice che $B \subseteq \mathbb{R}$ è intorno di x_0 se $\exists \varepsilon > 0$ t.c.
 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq B$
intorno elementare di x_0

Operativamente: se una funzione è definita in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, ha senso calcolare il limite per $x \rightarrow x_0$, dove x_0 è un p.to di accumulazione di A .
La derivata si definisce classicamente nei p.ti interni ad A

Esempio $A = [0, 1)$, $\mathring{A} = (0, 1)$, $\bar{A} = [0, 1]$, $\partial A = \{0, 1\}$

Esercizio Trovare $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A, \overset{\circ}{A}, \bar{A}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \bar{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\bar{\overset{\circ}{A}}}, \bar{\bar{\overset{\circ}{\bar{\overset{\circ}{A}}}}}$ siano 7 insiemi tutti diversi.
Volevo si può anche dimostrare che procedendo così si ottengono insiemi nuovi.

Liminf e limsup di successioni

Esempio: $a_n = (-1)^n$ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$ $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$

$b_n = 2^{(-n)^n}$ $\liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ $\limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

LIMSUP Sia a_n una successione

- Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$
- Se a_n è limitata superiormente, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c.
 $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si pone

$$S_k = \sup \{a_n : n \geq k\} \quad (\in \mathbb{R} \text{ perché è limitata})$$
e si osserva che S_k è una successione debolmente
decrescente e come tale ammette un limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
Si pone allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$$

LIMINF • Se a_n non è limitata inferiormente, allora si pone

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

- Se a_n è limitata inferiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$
si considera

$$I_k = \inf \{a_n : n \geq k\}$$

e si osserva che I_k è debolmente crescente. Si può
quindi porre

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Oss. liminf e limsup esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Caratterizzazioni con gli epsilon

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definitivamente

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ frequentemente, cioè infinite volte.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ si ha che $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ si ha che
 $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente
 $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \leq M$ definitivamente

Per il liminf valgono caratterizzazioni analoghe, ed in particolar.

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ si ha che
 $l - \varepsilon \leq a_n$ definitivamente
 $l + \varepsilon \geq a_n$ frequentemente.

Rapporti con il limite

① Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, allora liminf e limsup sono uguali a questo limite.

② Se liminf e limsup (che esistono sempre) sono uguali, allora esiste il limite e coincide con loro.

Esercizio di teoria Dedurre le caratterizzazioni ed i rapporti con il limite dalle definizioni di $\liminf$ e $\limsup$.

$\liminf$, $\limsup$ e sottosuccessioni

Sia a_n una successione, e sia a_{n_k} una sottosuccessione. Allora si ha sempre che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

In particolare: se esiste il limite di a_n , allora i due laterali coincidono, dunque i 2 centrali coincidono, dunque esiste il limite di a_{n_k} e coincide con quello generale.

Dim: semplici proprietà di $\inf$ e $\sup$.

Fatto generale Sia a_n una successione. Allora esiste una s.s. successione a_{n_k} tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \text{ esiste ed è } \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Dim: sia L il $\limsup$. Faccio il caso in cui $L \in \mathbb{R}$ (gli altri 2 sono più semplici: esercizio). Uso la caratt. con $\varepsilon = 1$. Ho che

$$a_n \leq L+1 \text{ definitivamente.}$$

$$a_n \geq L-1 \text{ frequentemente.}$$

Quindi esiste un indice n_1 per cui sono verificate entrambe: così ho definito a_{n_1} .

Ora uso caratt. con $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ho che

$$a_n \leq L + \frac{1}{2} \text{ definitivamente.}$$

$$a_n \geq L - \frac{1}{2} \text{ frequentemente.}$$

Quindi esiste un indice $n_2 > n_1$ per cui sono vere entrambe

Per riduzione definisco l'indice n_{k+1} in maniera tale che $n_{k+1} > n_k$ e per $n = n_{k+1}$ si abbia che

$$a_n \leq L + \frac{1}{k+1} \quad \text{e} \quad a_n \geq L - \frac{1}{k+1}$$

A questo p.to è ovvio che $a_{n_k} \rightarrow L$.
— o — o —

Osservazione finale Il limsup è anche maxlim, cioè il massimo limite tra tutte le sottosuccessioni che hanno limite.

Analogamente: il liminf è anche minlim.

SSSUP 2011 - LEZIONE 08

Titolo nota

07/03/2011

Teorema di confronto Se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Teoremi algebrici Scordateveli! Almeno in forma classica...

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Dim.: esercizio usando la parte "definitivamente" delle caratterizzazioni.

Esempio: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
 $b_n = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

Esercizio: esplorare $\liminf$ e $\limsup$ del prodotto...Criterio della radice Sia a_n una successione con $a_n \geq 0$ definitivamente.

- Se $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$;
- se $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dim. 2° caso Sia $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

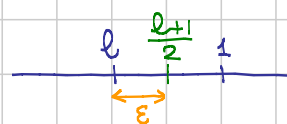
Allora definitivamente

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{L+1}{2}$$

elevando alla n :

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$$

↓ ↓ ↓
 0 0 0
 per Cauchy



Faccio la radice n -esima a dx e sx e consenso i versi:

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_{n_0}} \cdot (L+\varepsilon)^{\frac{n-n_0}{n}} \quad \forall n \geq n_0$$

Ora faccio il $\limsup$ a dx e sx sfruttando il teo. del confronto

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1 \cdot (L+\varepsilon)$$

Poichè la disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, vale anche per $\varepsilon = 0$.

— 0 — 0 —

Oss. Nella dimostrazione abbiamo usato che, dato $a > 0$ si ha che $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$. Questo va dimostrato a parte con la disuguaglianza di Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x > -1$. La applico con $x = \frac{a-1}{n}$ (che è ≥ 0 se $a \geq 1$) e ho

$$\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{a-1}{n} = a$$

da cui

$$\boxed{1} \leq \boxed{\sqrt[n]{a}} \leq \boxed{1 + \frac{a-1}{n}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1 1

Se invece $a \in (0, 1)$, posso scrivere $a = \frac{1}{b}$ con $b \geq 1$ e $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ e ci siamo ricondotti al caso precedente.

— 0 — 0 —

Liminf e limsup di funzioni. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, sia x_0 p.to di accumulazione di A .

Un po' brutalmente si definisce

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup \{ f(x) : x \in \underbrace{[x_0-r, x_0+r] \cap A}_{\neq \emptyset \text{ perchè } x_0 \text{ è di accumulazione}} \setminus \{x_0\} \}$$

esiste perchè il sup è
 monotono come funz. di r

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf \{ \dots \}$$

Il "brutale" è relativo al fatto che il sup in questione potrebbe fare $+\infty$ per certi valori di n , quindi bisognerebbe distinguere i casi come nel caso delle successioni.

Approccio "maxlim". Considero tutte le successioni $x_n \rightarrow x_0$ (ovviamente con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \neq x_0$) e per cui esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ (andrebbe dimostrato che ce ne sono).

Allora il $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ è il massimo di tali limiti.

Detto altrimenti: $\limsup = \maxlim$, cioè esiste una successione $x_n \rightarrow x_0$, con $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, tale che $f(x_n) \rightarrow \limsup$. (idem per il $\liminf$).

Teorema di de L'Hôpital Siano f e g due funzioni e supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ sia del tipo } \frac{0}{0} \text{ o } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Allora

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La dimostrazione è una riedizione del caso classico.

— 0 — 0 —

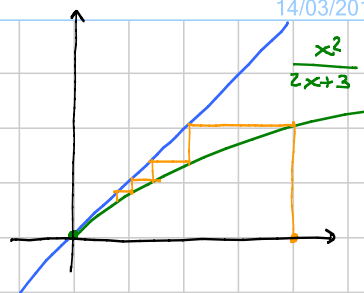
SSSUP 2011 - LEZIONE 09

Titolo nota

14/03/2011

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n+3}$ $a_0 = 2011$

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \leq \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \leq x \quad \text{per } x > 0$$



Si dim. facilmente che $a_n \rightarrow 0$. Come?

In questo caso va a zero esponenzialmente.

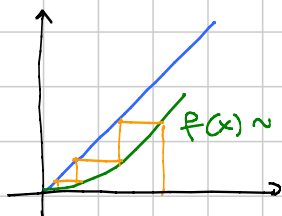
Idea: poiché $f(x) \leq \frac{x}{2}$ per ogni $x > 0$ avremo che $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui per induzione si ottiene che

$$a_n \leq \frac{a_0}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cosa c'è di speciale nel coeff. $\frac{1}{2}$? $f'(x) = \frac{2x(2x+3) - 2x^2}{(2x+3)^2}$

$$= \frac{4x^2 + 6x - 2x^2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x}{(2x+3)^2}$$

quindi in realtà il disegno è così



Quindi quando $a_n \rightarrow 0$ è come se stessi studiando $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{3}$, quindi $a_n \rightarrow 0$ molto più che esponenzialmente.

Calcolo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot 2^{n^2}$ - Uso criterio rapporto;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \cdot 2^{(n+1)^2}}{a_n \cdot 2^{n^2}} = \frac{\frac{a_n^2}{2a_n+3} \cdot 2^{n^2+2n+1}}{a_n \cdot 2^{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2a_n+3} \cdot 2 \cdot 4^n \quad \text{quindi mi sono ridotto a calcolare}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \cdot 4^n}{a_n}$ Faccio a sua volta il rapporto e ottengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} \cdot 4^{n+1}}{a_n \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2a_n+3} \cdot 4 = 0$$

Conclusione: $\frac{c_{n+1}}{c_n} \rightarrow 0 \Rightarrow c_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \cdot 2^{n^2} \rightarrow 0.$$

Volevamo farsi un'idea migliore, facciamo posto che sia $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{3}$, e da qui otterremmo qualcosa del tipo

$a_n \sim c^{2^n}$ con $c < 1$. Esercizio: provare a fare rigorosamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot 2^{2^n}$$

(si tratta di fare un po' di rapporti...

— 0 — 0 —

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}$ $a_0 = 2011$



Ora quando $a_n \rightarrow 0$ è come fare

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, quindi un aspetto un andamento del tipo $a_n \sim \frac{c}{2^n}$.

Cosa può voler dire rigorosamente che $a_n \sim \frac{c}{2^n}$.

Ad esempio dovrebbe succedere che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Per dimostrarlo uso il criterio rapporto $\rightarrow$ radice. Calcolo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_n + 2} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} = f'(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

[Più in generale $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{f(a_n)}{a_n} = \frac{f(0+a_n) - f(0)}{a_n} \rightarrow f'(0)]$

Altre cose che succedano: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b^n$ con $b > 0$.

Dipende da b : per $b > 2$ il limite è $+\infty$
 per $b < 2$ il limite è 0
 per $b = 2$ è MOLTO + delicato.

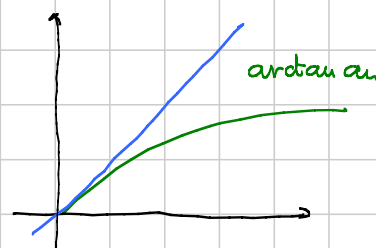
Esempio 3 $a_{n+1} = \arctan a_n$

$$a_0 = 2011$$

Ancora una volta $a_n \rightarrow 0$.

Facciamo Finta di sapere che

$$a_n \sim \frac{\alpha}{n^a}$$



Voglio determinare α ed a . Sostituisco nella ricorrenza;

$$\frac{\alpha}{(n+1)^a} = \arctan \frac{\alpha}{n^a} \sim \frac{\alpha}{n^a} - \frac{1}{3} \frac{\alpha^3}{n^{3a}}$$

↑
uso $\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3$

Da questa uguaglianza provo a ricavare α ed a

$$\frac{1}{(n+1)^a} = \frac{1}{n^a} - \frac{1}{3} \frac{\alpha^2}{n^{3a}}$$

$$\frac{1}{n^a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} = \frac{1}{n^a} - \frac{1}{3} \frac{\alpha^2}{n^{3a}} ; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 - \frac{a}{3} \frac{1}{n^{2a}}$$

$$(1+x)^b \sim 1 + bx + \dots$$

$$1 - \frac{a}{n} = 1 - \frac{a}{3} \frac{1}{n^{2a}}$$

$$\text{Quindi } a = \frac{1}{2} \text{ e } \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ cioè } a_n \sim \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esercizio Supponendo in generale che sia $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ e $f(x) = x + bx^k + o(x^k)$, determinare come va a zero a_n facendo finta di sapere che $a_n \sim \frac{\alpha}{n^a}$.

Come rendere rigoroso il discorso fatto nell'esempio. Voglio calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \sqrt{n} \text{ e sperare che venga } \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ oppure}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 \cdot n = \frac{3}{2}, \text{ oppure } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \frac{3}{2}$$

Hôpital per successioni Devo calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Supponiamo

$a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow +\infty$, e (forse) che b_n strett. cresc. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Se gli estremi coincidono, bla...
— o — o —

Dando per buono Hôpital per successioni, nell'esempio mi ritrovo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overset{\substack{\text{è sparito } n \\ \downarrow \\ 1}}{1}}{\frac{1}{a_n \operatorname{arctan}^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{arctan}^2 x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{arctan}^2 x}{x^2 - \operatorname{arctan}^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{x^2 - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Esercizio Rendere riguroso l'esercizio precedente usando Hôpital per successioni.

SSSOP 2011 - LEZIONE 10

Titolo nota

14/03/2011

Successioni per ricorrenza non autonome $a_{n+1} = f(n, a_n)$

Esempio 1 $a_{n+1} = \frac{3a_n + \arctan n}{a_n + \sqrt{n+3}}$ $a_0 = 2011$

Idea: il denominatore (ed in particolare $\sqrt{n+3}$) trascina tutto a 0.
Come dimostrarlo?

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (M va scelto opportunamente)
(ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim. (ii) Dal p.to (i) io so che

$$\boxed{0} \leq a_{n+1} \leq \frac{\boxed{3M + \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{n+3}}$$

$\downarrow$ $\quad \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad \quad 0$

Dal teo. dei carabinieri ottengo che $a_{n+1} \rightarrow 0$, quindi anche $a_n \rightarrow 0$.

Dim. (i) Per induzione: $a_n \geq 0$ è banale

Per $a_n \leq M$ al passo induttivo mi trovo

$$a_{n+1} \leq \frac{3M + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+3}} \leq M$$

$\uparrow$ $\quad \quad \quad \uparrow$
 maggiorazione $\quad$ spero
 come sopra

La speranza si realizza non appena n è abbastanza grande.

Occhio a non dire: il termine centrale tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, quindi è banale. Il valore di M deve anche soddisfare il passo base !!!

Fatto per bene: per ogni $n \geq 13$ ho che

$$\frac{3M + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{3M + \frac{\pi}{2}}{4} \leq M$$

$\uparrow$
 se M è grande in modo quantificabile

$M \geq \frac{\pi}{2}$

Allora, volendo fare le cose per bene, pongo

$$M = a_0 + a_1 + \dots + a_3 + \frac{\pi}{2}$$

e dimostro per induzione che $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo è banale per $n \leq 3$ e dopo funziona il passo induttivo.

— o — o —

Esempio 2 $a_{n+1} = \sqrt[n]{5 + a_n}$ $a_1 = 2011$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ (esercizio: provare a scrivere un piano con la monotonia e vedere quanto è difficile dimostrarlo).

PIANO ALTERNATIVO

(i) $1 \leq a_n \leq \frac{2016}{10.000}$ $\forall n \geq 1$ (induzione)

(ii) $a_n \rightarrow 1$ (carabinieri)

Esempio 3 $a_{n+1} = \sqrt[n]{5n + a_n}$ $a_1 = 2011$

PIANO (i) $1 \leq a_n \leq M$ $\forall n \geq 1$ (induzione scegliendo M)

(ii) $a_n \rightarrow 1$ (carabinieri)

Osservazione: posso sostituire (i) con qualcosa di abbondante, tipo $1 \leq a_n \leq 10000n$ $\forall n \geq 1$

Dim nuovo (i) Passo induttivo di $a_n \leq 10.000 n$

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{5n + a_n} \leq \sqrt[n]{10.005 n} = \sqrt[n]{10.005} \cdot \sqrt[n]{n} \leq 10.000 \cdot (n+1)$$

↑
speso

D'altra parte $\sqrt[n]{10.005} \leq \sqrt{10.005} \leq 10.000$ appena $n \geq 2$ e $\sqrt[n]{n} \leq n \leq n+1$ appena $n \geq 1$.

Non resta che fare i passi base $n=1$ ed $n=2$.

— o — o —

Esempio 3 $a_{n+1} = n \cdot a_n^2$ $a_1 = \alpha$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \geq 1$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$ (dimostrare!)

Fatto 2 Per $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha che $a_n \rightarrow 0$. Un possibile piano è dimostrare che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n}$ per ogni $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{induzione: } a_{n+1} &= n \cdot a_n^2 \\ &\leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$\uparrow$
spero

Speranza: $\frac{n}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, cioè $\frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{2}$,

cioè $2^{n-1} \geq n$ e questa si fa

- o a sua volta per induzione
- o con Bernoulli: $2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$

(Nota bene: provare a vedere che succede cercando di dimostrare che $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$) (Provare anche con $\frac{1}{n^2}$).

Idea: esiste una SOGLIA α_* tale che

- per $0 \leq \alpha < \alpha_*$ si ha che $a_n \rightarrow 0$
- per $\alpha > \alpha_*$ si ha che $a_n \rightarrow +\infty$
- per $\alpha = \alpha_*$ è delicato.

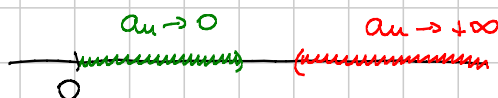
Ora ci puoi indicare con $x_n(\alpha)$ la successione ottenuta a partire da $x_1 = \alpha$.

Fatto 3 Fissato n si ha che $x_n(\alpha)$, come funzione di α è continua e monotona crescente.

Fatto 4 Se per un certo α esiste $n \geq 1$ t.c. $x_n(\alpha) \geq 1$, allora di sicuro $x_n \rightarrow +\infty$ per quel valore di α .

Fatto 5 L'insieme degli α per cui tende a $+\infty$ è una semiretta destra, con o senza estremo

Fatto 6 L'insieme degli α per cui tende a 0 è un intervallo, con o senza estremo destro. Quindi questa è la situazione



Chi sono i candidati ad essere α_* ? Il sup della zona in cui $a_n \rightarrow 0$ o l'inf di quella in cui $a_n \rightarrow +\infty$.

Fatto 7 La zona rossa è aperta, cioè il suo inf non è in zona rossa.

Supponiamo che per un certo α_0 si abbia che $x_n \rightarrow +\infty$. Allora $\exists n_0 \geq 1$ b.c. $x_{n_0}(\alpha_0) \geq 100$. Poiché $x_{n_0}(\alpha)$, come funzione di α , è continua, vuol dire che $x_{n_0}(\alpha) > 1$ in un intorno di α_0 .

~~(intorno)~~
 α

Allora tutto l'intorno di α_0

sta in zona rossa, dunque la zona è aperta.

Questo dice che l'inf. della zona rossa non sta in zona rossa.

Fatto 8 Se per un certo α si ha che $x_{n_0+1} \geq x_{n_0}$, allora per quel valore di α si ha che x_n è sempre crescente da n_0 in poi (banale induzione), quindi ha limite, quindi tende a $+\infty$.

Fatto 9 Prendo $\alpha_* = \inf$ zona rossa.

Partendo da α_* non tends a $+\infty$, quindi non posso avere nemmeno per un valore di n , che $x_{n+1} \geq x_n$, quindi $x_n \searrow$, quindi ha limite, e tale limite è 0.

SSSUP 2011 - LEZIONE 11

Titolo nota

06/04/2011

Hôpital per successioni**Caso $\frac{\infty}{\infty}$**

Siano a_n e b_n 2 successioni. Supponiamo che $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow +\infty$. Supp. anche b_n strett. cresc.
Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Dim. Mi limito a dimostrare la disuguaglianza di destra suppo-
nendo anche che il $\limsup$ a dx sia $L \in \mathbb{R}$ (se è $+\infty$ è
banale, se è $-\infty$ si aggiusta facilmente: farlo!).

Essendo L il $\limsup$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \text{ e quindi (uso denom. } > 0)$$

$$a_{n+1} - a_n \leq (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \dots + a_{n_0} \\ &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{n_0+1} - a_{n_0}) + a_{n_0} \\ &\leq (L + \varepsilon) [(b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_{n_0+1} - b_{n_0})] + a_{n_0} \\ &= (L + \varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0} \end{aligned}$$

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{(L + \varepsilon)(b_n - b_{n_0}) + a_{n_0}}{b_n - b_{n_0} + b_{n_0}} = \frac{\cancel{b_n - b_{n_0}} (L + \varepsilon) + \frac{a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}}}{1 + \frac{b_{n_0}}{b_n - b_{n_0}}}$$

$\nearrow 0$
 $\downarrow 0$
 uso che $b_n \rightarrow +\infty$

Ho quindi dimostrato che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ quindi vale anche con } L \text{ basta}$$

— 0 — 0 —

Osservazione: non ho usato che $a_n \rightarrow +\infty$.

Caso $\frac{0}{0}$ Siano a_n e b_n due successioni con $a_n \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow 0$.
Supponiamo b_n strett. decrescente. Allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

Dim. Suppongo che il $\limsup$ a dx sia $L \in \mathbb{R}$. Fisso $\varepsilon > 0$.
Allora $\forall n \geq n_0$ si avrà che

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} \leq (L + \varepsilon), \text{ cioè } a_n - a_{n+1} \leq (L + \varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

Prendo $k \geq n \geq n_0$. Allora

$$\begin{aligned} a_n &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{k-1} - a_k) + a_k \\ &\leq (L + \varepsilon) [(b_n - b_{n+1}) + \dots + (b_{k-1} - b_k)] + a_k \\ &= (L + \varepsilon)(b_n - b_k) + a_k \end{aligned}$$

Quindi (sfrutto ancora che $b_n > 0$)

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{(L + \varepsilon)(b_n - b_k) + a_k}{b_n - b_k + b_k} = \frac{\cancel{b_n - b_k} (L + \varepsilon) + \boxed{a_k}}{\cancel{b_n - b_k} + \boxed{b_k}} = \frac{(L + \varepsilon) + \frac{a_k}{b_n - b_k}}{1 + \frac{b_k}{b_n - b_k}}$$

$\xrightarrow{n \text{ fisso, } k \rightarrow +\infty} 0$

Tengo n fisso e mando k all'infinito e ottengo che

$$\frac{a_n}{b_n} \leq (L + \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{quindi facendo ora } n \rightarrow +\infty$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon. \text{ Essendo } \varepsilon \text{ arbitrario ho finito.}$$

— 0 — 0 —

Oss. Ho usato sia che $a_n \rightarrow 0$ sia che $b_n \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

Esercizio $a_{n+1} = a_n \left(a_n + \frac{1}{n} \right)$ $a_1 = \alpha \geq 0$

Quali sono i possibili comportamenti di a_n .

Fatto 1 Se $\alpha > 1$, allora a_n è monotona crescente e tende a $+\infty$

$$a_{n+1} = a_n \left(a_n + \frac{1}{n} \right) \quad \text{se } l \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$l = l \cdot l$$

$$l = l^2 \Rightarrow l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ incompatibili}$$

Fatto 2 Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \rightarrow +\infty$, allora per ogni $\beta > \alpha$ si ha che $a_n(\beta) \rightarrow +\infty$

Dim. Per induzione si verifica che $a_n(\beta) > a_n(\alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Fatto 3 Se per un certo α si ha che $a_n(\alpha) \rightarrow +\infty$, allora esiste un intorno U di α tale che $a_n(\beta) \rightarrow +\infty$ per ogni $\beta \in U$.

Conseguenza: L'insieme degli α per cui $a_n \rightarrow +\infty$ è aperto.

Dim. Prendo α b.c. $a_n(\alpha) \rightarrow +\infty$. Allora esiste mo b.c.

$a_{n_0}(\alpha) > 1$. Per continuità esiste un intorno U di α b.c.

$a_{n_0}(\beta) > 1$ per ogni $\beta \in U$. Ma allora per tutti questi β ricadiamo nel fatto 1.

Ho usato la continuità della funzione $\alpha \rightarrow a_{n_0}(\alpha)$ ad indice fisso.

La continuità ad indice fisso si dimostra per induzione sull'indice (composizione di funzioni continue). Sono addirittura polinomi...



Fatto 4 Esistono $\alpha > 0$ per cui $a_n(\alpha) \rightarrow 0$

Dim. Vediamo se è vero per induzione che $a_n \leq \frac{1}{2n}$

Nel passo induttivo mi ritrovo

$$a_{n+1} = a_n \left(a_n + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{3}{2n} = \frac{3}{4n^2} \leq \frac{1}{2n+2}$$

$\uparrow$ ric $\uparrow$ ip. ind. $\uparrow$ spero

$$\text{Speranza } (\Leftrightarrow) \quad 6u+6 \leq 4u^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad 3u+3 \leq 2u^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad u \geq 3$$

Quindi basta che $a_3 \leq \frac{1}{6}$ per garantirci che $a_n \rightarrow 0$.
Se mettiamo $\alpha = 0$ avrò che $a_3(\alpha) = 0 < \frac{1}{6}$, quindi lo stesso vale per α vicini.

Fatto 5 Se per un certo $\alpha > 0$ ho che $a_n(\alpha) \rightarrow 0$, allora lo stesso vale per ogni $0 \leq \beta \leq \alpha$ (come il fatto 2).

Fatto 6 Se per un certo n_0 si ha che $a_{n_0+1} < a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq n_0$, quindi è monotona decrescente, quindi ha limite $l = 0$ (il limite $\pm$ non è possibile in quanto $a_{n_0} < 1$, altrimenti sarebbe $a_{n_0} < a_{n_0+1}$).

Dim. Per induzione

$$a_{n+2} = a_{n+1} \left(a_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \leq a_n \left(a_n + \frac{1}{n} \right) = a_{n+1}$$

↑
Uso ipotesi + fatto che $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

Fatto 7 L'insieme degli α per cui $a_n(\alpha) \rightarrow 0$ è aperto.

Dim. Se $a_n(\alpha) \rightarrow 0$, allora $\exists n_0$ t.c. $a_{n_0+1}(\alpha) < a_{n_0}(\alpha)$, allora per continuità la stessa cosa vale $\forall \beta$ in intorno U di α . Ma allora per il fatto 6 si ha che $a_n(\beta) \rightarrow 0$.

Fatto 8 Per ogni $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ si ha che $a_n(\alpha) \rightarrow 1$.

Dim. Sappiamo che per tali α si ha che $a_n(\alpha) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (se lo supera siamo in zona rossa) e che $a_{n+1}(\alpha) \geq a_n(\alpha)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (se ci fosse la disug. opposta, saremmo in zona verde). Quindi $a_n(\alpha) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ e l'unico limite possibile rimasto è $l = 1$.

Fatto 9 $\alpha_1 = \alpha_2$. Supponiamo $\alpha_1 > \alpha_2$. Allora $a_n(\alpha_1) > a_n(\alpha_2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$\begin{aligned}
 \underbrace{a_{n+1}(\alpha_1) - a_{n+1}(\alpha_2)}_{\text{Diff}_{n+1}} &= a_n(\alpha_1) \left[a_n(\alpha_1) + \frac{1}{n} \right] - a_n(\alpha_2) \left[a_n(\alpha_2) + \frac{1}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{n} [a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)] + [a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)] [\dots + \dots] \\
 &= \underbrace{[a_n(\alpha_1) - a_n(\alpha_2)]}_{\text{Diff}_n} \underbrace{\left[\frac{1}{n} + a_n(\alpha_1) + a_n(\alpha_2) \right]}_{\rightarrow 2}
 \end{aligned}$$

Ma allora definitivamente $\text{Diff}_{n+1} \geq \frac{3}{2} \text{Diff}_n$

Questo direbbe che $\text{Diff}_n \rightarrow +\infty$, mentre sappiamo che $\text{Diff}_n \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —

SSSUP 2011 -

LEZIONE 12

Titolo nota

06/04/2011

Esercizio $a_{n+1} = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n}$ $a_1 = \alpha \geq 0$

Possibili limiti reali: supponiamo $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Allora

$$a_{n+1} = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$l = 7 + \frac{l}{2} + 0 \Rightarrow l = 14$$

Fatto 1 a_n è limitata

Dimostro per induzione che $a_n \leq 100 + \alpha$

$n=1$: banale

$n \Rightarrow n+1$ Ipotesi: $a_n \leq 100 + \alpha$

$$a_{n+1} = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} \leq 7 + 50 + \frac{\alpha}{2} + 1 = 58 + \frac{\alpha}{2} \leq 100 + \alpha$$

uso Hp

Fatto 2 Se per un certo α esiste n_0 t.c. $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$, allora $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0$ (ovviamente per quel valore di α).

Dim.: induzione a partire da n_0 ...

$$a_{n+2} = 7 + \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{1}{n+1} \leq 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} = a_{n+1}$$

↑
uso ipotesi induttiva che $a_{n+1} \leq a_n$ e
il fatto che $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

Oss. Questo "conservarsi in futuro" vale per la monotonia decrescente ma non per la monotonia crescente.

Fatto 3 Per ogni α la successione a_n è definitivamente monotona

Dim. Ci sono due casi:

- o a_n è sempre crescente (e allora bene)
- o $a_{n+1} \leq a_n$ per un qualche n , ma allora da lì in poi è decrescente.

Fatto 4 In ogni caso il limite esiste e vale $1/4$.

Domanda: sicuramente esistono valori di α per cui è definitivamente (anzi sempre) decrescente: ad esempio $\alpha = 100$.
Ma esistono dei valori per cui è sempre crescente?

Tentativo: considero la successione $b_n = a_n - 1/4$. Cosa risolve?

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 1/4 = 7 + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{n} - 1/4 = \cancel{7} + \frac{b_n + 1/4}{2} + \frac{1}{n} - \cancel{1/4} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n}$$

quindi $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n}$. Ora a_n è crescente $\Leftrightarrow b_n$ è crescente

Esistono valori di b_0 , ovviamente negativi, per cui b_n risulta crescente?

Fatto 5 Non ne esistono. Infatti $b_n \rightarrow 0$. Se fosse crescente, sarebbe $b_n \leq 0$ sempre, ma allora

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n} \geq b_n + \frac{1}{n}$$

↑ perché $b_n \leq 0$.

ma allora per induzione

$$b_{n+1} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + b_0$$

↓
perché la serie diverge, il che è assurdo perché direbbe che $b_n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 2 $f(x) = \frac{\arctan x}{3 + \sin x} \quad x \rightarrow +\infty$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{8}$$

Per dimostrare un limsup servono 2 cose

→ una stima dall'alto

→ una successione dal basso

$$f(x) \leq \frac{\arctan x}{2}$$

metto qui qualcosa che abbia come LIMITE quello che voglio essere il limsup, poi uso confronto

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{2} = \frac{\pi}{4}$$

↑
confronto

dove sto facendo il limsup
↓

→ Successione dal basso: trovare una successione $x_n \rightarrow +\infty$

tale che $f(x_n) \rightarrow$ candidato limsup.

In questo caso basta fare in modo che $\sin x_n = -1$, cioè

$$x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$$

Per dimostrare un liminf servono:

→ una stima dal basso, in questo caso

$$f(x) \geq \frac{\arctan x}{4} \quad \text{da cui} \quad \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \dots = \frac{\pi}{8}$$

→ una successione dall'alto, in questo caso $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

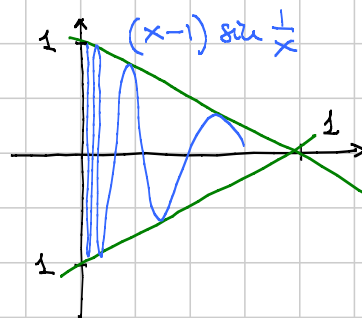
Esercizio 3 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Cosa posso dire di max e min?

Almeno uno dei due è obbligato ad esistere?

NO! Dopo un po' uno si convince che "sia il sup, sia l'inf devono essere assunti in 0"

Si tratta di porre

$f(x) = (x-1) \sin \frac{1}{x}$
e dimostrare che



① $-1 < f(x) < 1 \quad \forall x \in (0, 1]$

② $\limsup_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

Questi dimostrano in particolare che $\inf$ e $\sup$ sono -1 e $+1$.
— 0 — 0 —

Esercizio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(0) = 0 \quad f \text{ derivabile ovunque}$
 $f'(0) = 100$

È vero che esiste $\delta > 0$ b.c. $f(x)$ è monotona in $(-\delta, \delta)$.

SSSUP 2011 - LEZIONE 13

Titolo nota

08/04/2011

Moduli di continuità : LIPSCHITZIANITÀ, HÖLDERIANITÀ, UNIFORME CONTINUITÀ.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (vale anche con $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$)

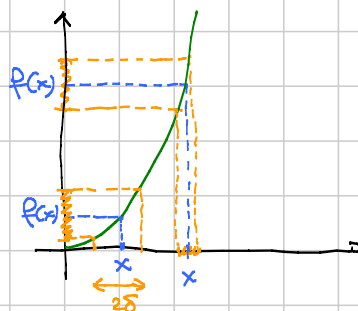
Continuità $\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.
 $y \in [a, b], |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

Uniforme continuità $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.
 $x \in [a, b], y \in [a, b], |y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$

Oss. Nella definizione di continuità δ dipende da ε e da x .
 Nell' uniforme continuità δ dipende solo da ε , cioè c'è un δ universale (uniforme in x) che va bene per tutti gli x (fissato ε)

Esempio 1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$. È continua ma NON unif. continua. Brutalmente: a parità di ε , più vado su x grandi (o molto negativi) più mi serve δ piccolo per avere $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ quadretto



Esempio 2 $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, ma non unif. continua, e limitata: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Teorema Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (estremi compresi e intervallo limitato), allora continua $\Rightarrow$ uniformemente continua.

Modulo di continuità È l'applicazione che lega ε e δ .

Sia $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che ω è un modulo di continuità per f in A se

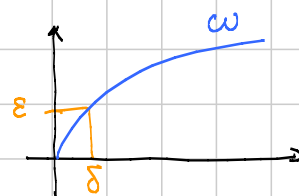
$$|f(y) - f(x)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

Caso interessante: quello in cui $\omega(0) = 0$ e ω è continua

Fissato $\varepsilon > 0$, scelgo $\delta > 0$ con $\omega(\delta) = \varepsilon$.

Allora se $|x - y| \leq \delta$ si ha che

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega(\delta) = \varepsilon$$



Lipschitzianità Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA in A se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

Questo è equivalente a dire che $\omega(\sigma) = L\sigma$ è un modulo di continuità (in questo caso lineare) per f .

Si dice costante di Lipschitz di $f(x)$ in A il più piccolo L per cui funziona la definizione.

Hölderianità Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice HÖLDERIANA in A con esponente $\alpha \in (0, 1)$ se esiste una costante $H \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^\alpha \quad \forall x \in A, \forall y \in A.$$

È come dire che un modulo di continuità è $\omega(\sigma) = H\sigma^\alpha$.

Si dice costante di Hölder il + piccolo H t.c. ...

Oss. Lipschitzianità = Hölderianità di esponente = 1.

Esempio $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $f(x) = \sqrt{x}$ è Hölderiana di esponente $\frac{1}{2}$, ma non Lipschitziana.

$$\text{Infatti } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \quad \forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0$$

Come si dimostra? wlog (without loss of generality)

$x \geq y$, quindi $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Mi riduco a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}, \text{ cioè } \sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y} \text{ e faccio il } \square.$$

Oss. Se una funzione è α -Hölderiana con $\alpha > 1$, allora è per forza (localmente) costante. Infatti la sua derivata è 0 ovunque in quanto

$$|f(x+h) - f(x)| \leq H |h|^\alpha$$

quindi

$$|f'(x)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} H \cdot |h|^{\alpha-1}$$

$\downarrow$ se $\alpha > 1$

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in A$, allora $f(x)$ è localmente costante, cioè costante sulle componenti connesse di A , cioè costante in ogni intervallo contenuto in A .

legami tra Lipschitzianità e derivata. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) f Lipschitziana $\not\Rightarrow f$ derivabile (esempio $f(x) = |x|$)

(2) f Lipschitziana con una certa costante $L \Rightarrow$ tutti i rapporti incrementali sono, in valore assoluto, $\leq L \Rightarrow$ il grafico ha "pendenza limitata"

(3) f Lipschitziana con costante L + esiste $f'(x_0) \Rightarrow |f'(x_0)| \leq L$

(4) Se f è derivabile in tutti i p.ti di A , e

$$\sup \{ |f'(x)| : x \in A \} < +\infty,$$

allora f è Lipschitziana e la sua costante di Lip. è proprio il sup di sopra (valida se A è connesso (1 pezzo solo)).

Dim (4). Sia L il sup. Per Lagrange abbiamo che

$$|f(y) - f(x)| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |y-x| \leq L \cdot |y-x|$$

Resta da dimostrare che L è la più piccola costante che va bene, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono 2 p.ti x e y t.c.

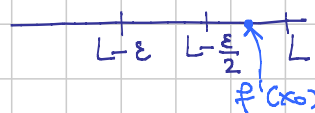
$$|f(y) - f(x)| > (L - \varepsilon) |y - x|.$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per definizione di sup esiste un p.to x_0 t.c.

$$|f'(x_0)| > L - \frac{\varepsilon}{2}$$

Ora

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0)|}{|h|}$$



Se il limite è $> L - \frac{\varepsilon}{2}$, c'è almeno un valore di h per cui la frazione è $> L - \varepsilon$. Questo produce i p.ti x e y richiesti.

Rapporti tra le definizioni Sia A un insieme limitato, e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora si hanno le seguenti implicazioni

f Lipschitziana in $A \Rightarrow f$ Hölderiana in A con ogni $\alpha \in (0, 1)$

$\Downarrow$

f uniformemente continua

$\Downarrow$

f continua

Inoltre dati $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$ si ha che

f α_2 -Hölderiana $\Rightarrow f$ α_1 -Hölderiana (sempre in A).

Dim. Se f è α_2 -Hölderiana, allora

$$|f(y) - f(x)| \leq H |y - x|^{\alpha_2} \quad \forall x \in A, \forall y \in A$$

$$\begin{aligned} \text{Ma allora } |f(y) - f(x)| &\leq H |y - x|^{\alpha_1} \cdot |y - x|^{\alpha_2 - \alpha_1} \\ &\leq H [\text{diametro}(A)]^{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot |y - x|^{\alpha_1} \end{aligned}$$

Il diametro (A) è $\sup A - \inf A$.

Oss. $f(x) = x$ non è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $[0, +\infty)$, quindi la limitatezza di A serve per avere le implicazioni.

SSSUP 2011 - LEZIONE 14

Titolo nota

08/04/2011

Proprietà delle derivate Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile (non sto dicendo che la derivata è continua).

Allora per ogni $x_0 \in (a,b)$, esiste una successione $x_n \rightarrow x_0$ (anzi ne esiste una che tende a x_0^+ ed una che tende a x_0^-) tale che $f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$.

Oss. Questo impedisce ad una derivata di avere discontinuità di tipo salto (cioè con limite destro e sinistro in x_0 che esistono e sono diversi)

Oss. La proprietà implica in particolare che per ogni $x_0 \in (a,b)$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \leq f'(x_0) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

e idem per $x \rightarrow x_0^-$.

Dim. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}$

Applico Lagrange tra x_0 e $x_0 + \frac{1}{n}$: $f'(x_0 + \frac{1}{n}) - f'(x_0) = f'(x_n) \cdot \frac{1}{n}$

Quindi $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n)$.

Esempio 1 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (estesa ponendo $f(0) = 0$).

È Lipschitziana in $[-1, 1]$? Quando

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

Questa NON è limitata (basta trovare una successione $x_n \rightarrow 0^+$ con $\cos \frac{1}{x_n} = 1$), anzi

$$\liminf_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \quad \limsup_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$$

Esempio 2 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (estesa ponendo $f(0) = 0$)

Questa è Lipschitziana in $[-1, 1]$. Infatti

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cancel{x^2} \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ da cui}$$

$|f'(x)| \leq 3$ per ogni $x \in [-1, 1]$, tranne al più $x = 0$.

In $x = 0$ la derivata si calcola con il rapp. increment. e viene $f'(0) = 0$.

Teorema Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che f^2 sia Lipschitz. Allora f è $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Dim. Per ipotesi sappiamo che $|f^2(x) - f^2(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y$.

Caso 1 Supponiamo che $0 \leq f(y) \leq f(x)$. Allora

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{f^2(x)} - \sqrt{f^2(y)}| \leq \sqrt{f^2(x) - f^2(y)} \leq \sqrt{L|x - y|}^{1/2}$$

$\uparrow$
 $\sqrt{A - B} \leq \sqrt{A - B}$

Idem se $f(y) \leq f(x) \leq 0$.

Caso 2 Supponiamo che $f(y) < 0 < f(x)$. Per continuità esiste z tra x e y t.c. $f(z) = 0$.
Ma allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f(z)| + |f(y) - f(z)| && \text{Applico caso 1} \\ &\leq \sqrt{L}|x - z|^{1/2} + \sqrt{L}|y - z|^{1/2} && (z \text{ sta tra } x \text{ e } y) \\ &\leq \sqrt{L}|x - y|^{1/2} + \sqrt{L}|x - y|^{1/2} \\ &= 2\sqrt{L}|x - y|^{1/2} \end{aligned}$$

Con più attenzione potrei ottenere $\sqrt{2L}$ invece di $2\sqrt{L}$.

Esempio 3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (estesa con $f(0) = 0$) è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $[-1, 1]$, anzi è α -Hölder $\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Motivo $f^2(x) = x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$ è Lip. (basta fare la derivata).

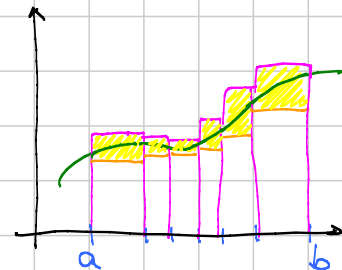
Achtung! f $\frac{1}{2}$ -Hölder $\nRightarrow f^2$ Lipschitz. Di conseguenza il criterio va bene per dimostrare l'Hölderianità, ma non per escluderla (questo va fatto a mano)

Controesempio: $f(x) = \sqrt{x} + 1$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder, ma f^2 non è Lip.

Esercizio Trovare $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ che sia continua, dunque uniformemente continua, ma non Hölderiana per nessun esponente $\alpha \in (0, 1)$. Se $f(0) = 0$, deve andare a 0 più velocemente di tutte le radici.

Integrabilità delle funzioni continue Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$.

Voglio, per ogni $\varepsilon > 0$, trovare 2 funzioni a gradino i cui integrali (definiti come somma algebrica delle aree dei rettangoli) differiscano per meno di ε .



Idea della dim. Fisso $\varepsilon > 0$, trovo il δ corrispondente, e suddivido $[a, b]$ in intervalli tutti di ampiezza $\leq \delta$. In ogni intervallo ho che $\max f - \min f \leq \varepsilon$ (è la differenza tra i valori assunti in 2 pti). In ogni intervallo definisco le 2 funzioni a gradino usando $\max f$ e $\min f$ ed è fatta.

Teorema di estensione Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.
Se f è uniformemente continua (in particolare se è Lip. o Hölder), allora esiste una funzione continua $g: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$
↑
chiusura di A

tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Detto altrimenti: le funzioni unif. continue si estendono alla chiusura dell'insieme.

"Non dimostrazione": bisogna far vedere che esiste il limite nei punti del bordo di A , escludendo che possa divergere o oscillare.

Esercizio Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua.

Allora f è sublineare, cioè esistono due costanti

A e B tali che

$$|f(x)| \leq A + Bx$$

SSSUP 2011 - LEZIONE 15

Titolo nota

15/04/2011

Equazioni differenziali $F(t, u, u') = 0$ Incognita $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ $u(t)$

insieme di definizione

è tra le incognite

 $F(t, u, u', \dots, u^{(k)}) = 0$ eq. diff. di ordine k ↑ autonoma / non autonoma a seconda che ci sia o no dipendenza da t .

Eq. in forma normale:

$$u^{(k)} = \Phi(t, u, u', \dots, u^{(k-1)})$$

Problema di Cauchy = equazione differenziale + cond. inizialiCond. iniziali: prescrivere i valori di u e di tutte le sue prime $k-1$ derivate in un certo pto t_0 :

$$u(t_0) = u_0$$

$$u'(t_0) = u_1 \dots$$

$$u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1}$$

 $\left. \begin{array}{l} u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \dots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{array} \right\} k \text{ condizioni iniziali se l'eq. ha ordine } k.$ TEOREMA DI ESISTENZA Consideriamo il pbm. di Cauchy per un'eq. del 1° ordine in forma normale

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(t_0, u_0) \in \Omega$. Supponiamo che f sia continua in Ω .Allora il problema ammette ALMENO una soluzione, cioè esiste $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ed esiste $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- u è derivabile per ogni $t \in (a, b)$;
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in (a, b)$;
- $t_0 \in (a, b)$;
- $u(t_0) = u_0$ e $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in (a, b)$.

TEOREMA DI UNICITÀ. Sia tutto come sopra.

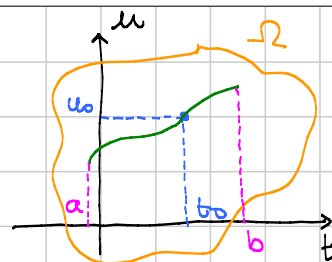
Supponiamo inoltre che f sia Lipschitziana

in u uniformemente rispetto a t , cioè che esista una costante L t.c.

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

per ogni (t, u_1, u_2) t.c. $(t, u_1) \in \Omega$, $(t, u_2) \in \Omega$.

Allora la soluzione è unica.



Oss. Cercando soluzioni locali (cioè definite solo in un intervallo (a, b) contenente t_0), posso sempre supporre $\Omega =$ rettangolo e quindi l'unif. Lip. può seguire, ad esempio, dalla limitatezza della derivata di f rispetto ad u .

Sistemi di equazioni diff.
$$\begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases}$$

sistema di 2 eq. del 1° ordine nelle incognite $u(t)$ e $v(t)$.

Posso considerare come incognita il vettore $U(t) = (u(t), v(t))$ e riscrivere il sistema nella forma

$$U'(t) = F(t, U(t))$$

dove F è una funzione a valori vettoriali.

La notazione per equazioni e sistemi è la stessa, solo che ora

$$U: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \leftarrow \text{numero di incognite}$$

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{con } \Omega \text{ aperto in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m.$$

La condizione iniziale per il problema di Cauchy diventa

$$U(t_0) = U_0, \quad \text{dove } t_0 \in \mathbb{R} \text{ e } U_0 \in \mathbb{R}^m.$$

I teoremi di esistenza ed unicità valgono anche per i sistemi.

Equazioni di ordine > 1 vs sistemi

Consideriamo l'equazione $u''' + \sin u'' + t \cos u' + u \cdot u'' = 0$

Pongo $u = u$, $u' = v$, $u'' = z$. Voglio scrivere un sistema nelle incognite u, v, z , del 1° ordine, equivalente all'eq. data:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = z \quad (\text{oss: } v' = u'') \\ z' = -\sin z - t \cos v - u \cdot z \quad (\text{ho ricavato } z' = u''' = \dots) \end{cases}$$

In generale un'eq. di ordine k in forma normale è sempre equivalente ad un sistema del 1° ordine in k incognite, sempre in forma normale. Stessa cosa per sistemi di ordine superiore. Conseguenza: basta fare la teoria per sistemi del 1° ordine.

Esempio 1 $[u']^2 = t^2$ Non si può portare in forma normale, almeno globalmente.

Se la condizione iniziale è $u(5) = 7$

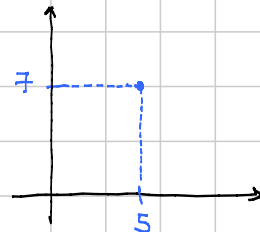
$$u' = t \quad \text{oppure} \quad u' = -t$$

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2 + \cos t$$

in modo che
sia $u(5) = 7$

$$u(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \cos t$$

da aggiustare



In questo caso ho 2 soluzioni che passano per lo stesso punto, e l'equazione era regolare.

Oss. A priori potrei avere $u' = t$ per certi valori di t
 $u' = -t$ per altri valori

Il cambio (tenendo conto che u' la voglio continua) può avvenire solo a $t=0$, ma lì può avvenire.

Esempio 2 $\begin{cases} u' = 3|u|^{2/3} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Eq. autonoma con secondo membro non Lipschitz (vicino a $u=0$)

Una soluzione è la funzione $u(t) \equiv 0$ (globale: definita per ogni $t \in \mathbb{R}$).

Un'altra soluzione è $u(t) = t^3$: basta sostituire

$$u'(t) = 3t^2 = 3|u(t)|^{2/3} = 3|t^3|^{2/3} \quad (\text{anche questa globale})$$

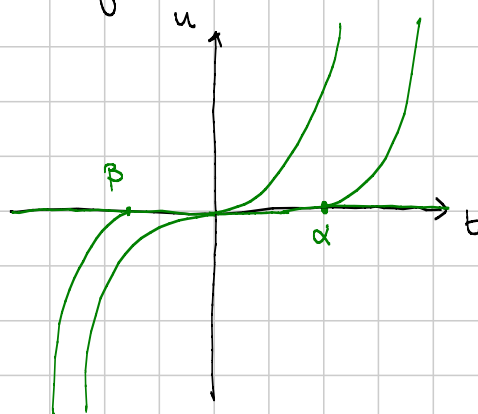
Ci sono quindi almeno 2 soluzioni con $u(0) = 0$.

In realtà ci sono infinite soluzioni che formano il PENNELLO DI PEANO, e sono date da

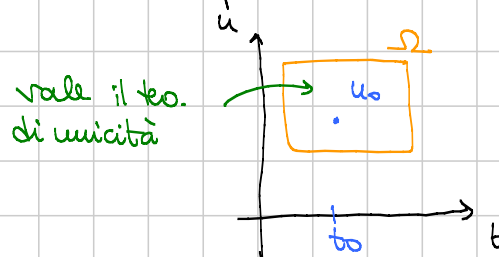
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t \leq \alpha \\ (t-\alpha)^3 & \text{per } t \geq \alpha \end{cases}$$

Una costruzione analoga vale per $t \leq 0$.

Oss. Si verifica facilmente che in questo modo si ottiene una famiglia di sol. dipendente da 2 parametri α e β ($u(t) \equiv 0$ e $u(t) \equiv t^3$ sono la più grande e la più piccola, in mezzo c'è il pennello).



Oss. Se il dato iniziale è $u(t_0) = u_0$ con $u_0 \neq 0$, allora la soluzione è LOCALMENTE unica, perché posso restringermi ad un rettangolo in cui il 2° membro è Lip. in u .



SSSUP 2011 - LEZIONE 16

Titolo nota

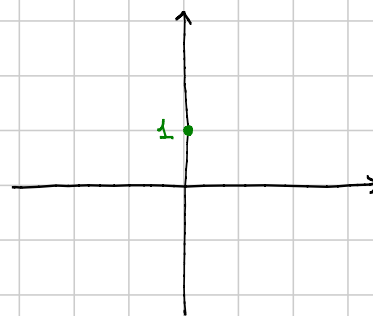
15/04/2011

Studio qualitativo = capire come è fatta la soluzione senza risolvere esplicitamente.

Esempio 1
$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

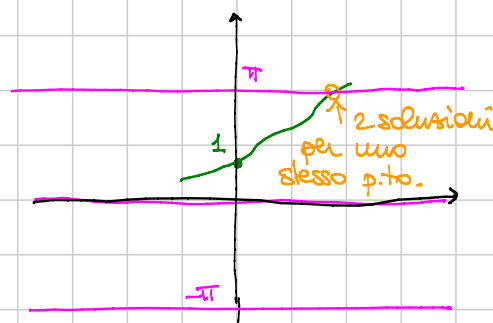
Fatto 1 Esistenza e unicità locali sono assicurate dal teorema generale.

Fatto 2 Tutte le funzioni del tipo $u(t) \equiv k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) sono soluzioni dell'equazione



[Fatto generale: se l'equazione è del tipo $u' = f(u)$, cioè autonoma, ogni valore u_0 b.c. $f(u_0) = 0$ corrisponde ad una soluzione stationaria $u(t) \equiv u_0$ dell'eq. Se f è Lip., quelle stationarie sono le uniche sol. con quei dati iniziali].

Fatto 3 La soluzione che stiamo cercando è sempre compresa tra 0 e π . Se non lo fosse, avrei una violazione al teorema di unicità a partire dal p.to di contatto.



Fatto 4 Sapendo che $0 < u(t) < \pi$, avendo che $u'(t) = \sin u(t) > 0$, quindi u è monotona crescente.

Fatto 5 Supponiamo di sapere che la soluzione è globale, cioè $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora per monotonia esistono

$$l_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$$

$$l_2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t).$$

Vorrei dire che $l_1 = \pi$ e $l_2 = 0$.

Brutalmente, se avessimo $l_1 < \pi$, avremmo che $u'(t) \rightarrow \sin l_1 > 0$, il che vorrebbe dire che $u(t)$ cresce linearmente con coeff. angolare positivo, il che è incompatibile con un limite finito.

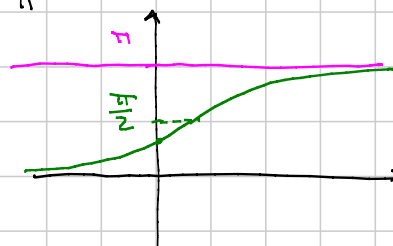
Idem a $-\infty$.

Fatto 6 Convessità e concavità di u . Calcolo

$$\begin{aligned} u''(t) &= [u'(t)]' = [\sin u(t)]' \\ &= \cos u(t) \cdot u'(t) \\ &= \cos u(t) \cdot \sin u(t) \end{aligned}$$

Quindi $u''(t) > 0$ quando $0 < u(t) < \frac{\pi}{2}$ e
 $u''(t) < 0$ quando $\frac{\pi}{2} < u(t) < \pi$

TEOREMA DELL'ASINTOTO



Sia $u: (A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che u sia derivabile e che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$$

Allora ci sono due possibilità (e ci sono entrambe)

- $u'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$
- $u'(t)$ non ha limite per $t \rightarrow +\infty$, ma in questo caso

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \geq 0.$$

Esempio 1 $u(t) = \frac{\sin t}{t}$ $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$

$$u'(t) = \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \rightarrow 0, \text{ quindi siamo nel 1° caso}$$

Esempio 2 $u(t) = \frac{\sin t^{20}}{t}$. Ora $u'(t)$ non ha limite ($\limsup = +\infty$, $\liminf = -\infty$).

Come si usa nello studio qualitativo?

Sappiamo per monotonia che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l_1 \in [1, \pi]$.

Dall'equazione deduciamo che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin u(t) = \sin l_1$$

↑
continuità di $\sin x$

Quindi ora sappiamo che il limite di $u'(t)$ esiste, ma allora per il teo dell'asintoto deve essere 0, quindi $\sin l_1 = 0$, che in $[1, \pi]$ ha come unica soluzione $l_1 = \pi$.

Dim. sbagliata $u(t) \rightarrow l_1$, quindi $u'(t) \rightarrow 0$, quindi $\sin l_1 = 0$,
quindi $l_1 = \pi$. ↑
NO!!!

Dim. teo. asintoto Se $u'(t)$ non ha limite c'è poco da fare.

Supponiamo quindi che $u'(t) \rightarrow m \in \overline{\mathbb{R}}$ per $t \rightarrow +\infty$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, applico Lagrange in $[n, m+1]$:

$$\begin{array}{ccccc} u(m+1) - u(n) & = & 1 \cdot u'(c_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & - & l & = & m \end{array}$$

$$\Rightarrow m = 0.$$

$$\begin{array}{c} c_n \\ | \quad | \quad | \\ n \quad \quad m+1 \end{array}$$

Quando $n \rightarrow +\infty$, anche
 $c_n \rightarrow +\infty$

Oss. In generale ho dimostrato che esiste $c_n \rightarrow +\infty$ tale che $u'(c_n) \rightarrow 0$. Questo basta per concludere che $u'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ solo se so già che il limite esiste.

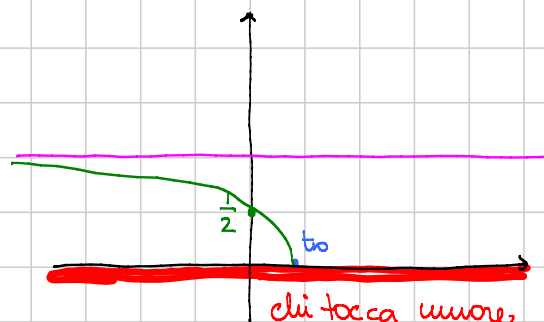
Essendo 0 un possibile limite, questo dimostra comunque che $\liminf \geq 0$ e $\limsup \leq 0$.

Secondo studio $\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$

$u(t) \equiv 1$ soluzione stazionaria.

Quindi $0 < u(t) < 1$ per ogni t per cui è definita la soluzione

Quindi $u'(t) < 0$ e pertanto u decrescente fino a quando è definita.



$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$. Infatti

→ per monotonia il limite esiste ed è un certo $l \in [\frac{1}{2}, 1]$

→ per l'equazione $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log u(t) = \log l$

→ poiché u' ha limite, per il te. dell'asintoto il limite deve essere 0, cioè $\log l = 0$, cioè $l = 1$.

Questo facendo dubita che la soluzione esista per ogni $t \geq 0$.

La soluzione non può essere definita per ogni $t \geq 0$. Se lo fosse per monotonia esisterebbe il limite $l \in [0, \frac{1}{2}]$ e ... per il teorema dell'asintoto dovrebbe essere $\log l = 0$, il che è impossibile.

Quindi la soluzione può essere definita solo fino ad un certo t e lì tende a 0 (se tendesse a $\frac{1}{10}$, risolverei il problema con $u(t_0) = \frac{1}{10}$ e continuerei la soluzione).

SSSUP 2011 - LEZIONE 17

Titolo nota

18/04/2011

Teoremi di confronto

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} v' = g(t, v) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Si intende che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Supponiamo che f e g siano continue e che

- $f(t, x) < g(t, x)$ per ogni $(t, x) \in \Omega$,
- $u_0 < v_0$

Allora $u(t) < v(t)$ per ogni $t \geq t_0$ per cui entrambe le soluzioni esistono.

Oss. Il tempo iniziale t_0 è lo stesso per tutte e 2.

Si assume la continuità di f e g e disuguaglianze strette nelle ipotesi.

L'enunciato vale anche assumendo solo che $u' \leq f(t, u)$ e $v' \geq g(t, v)$

Oss. Non posso dire, dalle ipotesi, che $u'(t) < v'(t)$ per ogni $t \geq t_0$ per cui le soluzioni esistono. Infatti

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \uparrow \quad g(t, v(t)) = v'(t)$$

questi 2 non li si confrontano se $u(t) \neq v(t)$

Dim.: Pongo $w(t) = v(t) - u(t)$. Al tempo t_0 ho che

$$w(t_0) = v_0 - u_0 > 0$$

Supponiamo per assurdo che $w(t) \leq 0$ per un qualche $t > t_0$.
Considero allora

$$t_* = \inf \{ t > t_0 : w(t) \leq 0 \}$$

Cosa succede in t_* ? Si ha che $w(t_*) = 0$, cioè

$$u(t_*) = v(t_*). \text{ Ma allora}$$

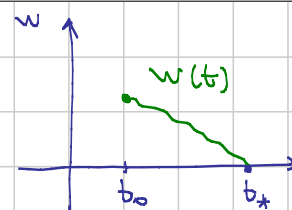
$$w'(t_*) = v'(t_*) - u'(t_*) = g(t_*, v(t_*)) - f(t_*, u(t_*)) \geq 0$$

$\xleftarrow{\text{uguali}} \quad \xrightarrow{\text{per ipotesi}} \quad \uparrow$
 STRETTA

Inoltre $w(t) > 0$ per ogni $t \in [t_0, t_*)$,
e questo implica che $w'(t_*) \leq 0$.

Infatti

$$w'(t_*) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{w(t_* - h) - w(t_*)}^{> 0}}{\underbrace{-h}_{< 0}} \leq 0$$



Dovendo contemporaneamente essere $w'(t_*) > 0$ e ≤ 0 , abbiamo
un assurdo, quindi $w(t) > 0$ finché esiste, quindi
 $v(t) > u(t)$ finché esistono entrambe (dopo t_0)
— o —

Soprasoluzioni e sottosoluzioni Se $u' > f(t, u)$ si dice che
 u è una soprasoluzione (stretta). Se $u' < f(t, u)$ si dice
che u è una sottosoluzione (stretta).

Teorema Sia (a, b) un intervallo, e siano $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e
 $v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

- u soprasoluzione stretta in (a, b)
- v sottosoluzione stretta in (a, b)
- $t_0 \in (a, b)$ e $u(t_0) > v(t_0)$
- f continua

Allora $u(t) > v(t)$ per ogni $t \in [t_0, b)$.

Dim.: esattamente come prima.

Oss. Se nella definizione di sopra e sottosoluzione cambiamo
 $>$ e $<$ con $\geq$ e $\leq$ in generale diventa tutto falso (pensare
agli esempi di non unicità).

Se però la f è lip. in u uniformemente in t , allora
diventa tutto vero (con $\geq$ e $\leq$ nelle ipotesi e nella tesi)

Motivo: se f è lip... con costante L e $u' \geq f(t, u)$, allora
 $u_\varepsilon(t) = u(t) + \varepsilon e^{2Lt}$ è soprasoluzione stretta. Infatti

devo dimostrare che $u'_\varepsilon > f(t, u_\varepsilon)$:

$$u'_\varepsilon(t) = u'(t) + 2\varepsilon L e^{2Lt} \stackrel{\text{ipotesi}}{\geq} f(t, u(t)) + 2\varepsilon L e^{2Lt} > f(t, u(t) + \varepsilon e^{2Lt})$$

spero $\nearrow$, ma è la def. di Lip. sostanzialmente.

Esistenza globale, blow-up, break-down

Esempio $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$

Esistenza locale: banale

Unicità: banale perché u^2 è

loc. Lipschitz

L'eq. è a variabili separabili e si risolve esplicitamente

$$\frac{du}{dt} = u^2 \quad \frac{du}{u^2} = dt$$

$$-\frac{1}{u} = t + c \quad u(t) = \frac{1}{c-t}$$



Sostituendo il dato iniziale ottengo $u(t) = \frac{u_0}{1 - u_0 t}$

(una verifica diretta mostra che è soluz.)

La soluzione "scoppia" per $t = \frac{1}{u_0}$, quindi non esiste globalmente.

Definizioni Intervallo massimale di esistenza: pezzo (componente connessa) dell'insieme di definizione della soluzione che contiene il tempo iniziale

Tempo di vita = sup dell'intervallo massimale di esistenza.

Teorema di alternativa Sia $u'(t) = f(t, u(t))$ con $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$). Sia T il tempo di vita della soluzione. Allora si hanno 3 possibilità (non è detto che si escludano a vicenda)

- ① $T = +\infty$ (la sol. ha esistenza globale nel futuro)
- ② $\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (la sol. ha blow-up per $t \rightarrow T^-$)
- ③ $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) = 0$ (break-down)

Oss. La terza possibilità dice che $(t, u(t))$ sta "uscendo" dalla zona in cui è definito il 2° membro dell'equazione.

In genere questo vuol dire che f sta diventando $\pm\infty$, quindi u' sta diventando $\pm\infty$

Esempio generalizzato

$$\begin{cases} u' = au^\alpha \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

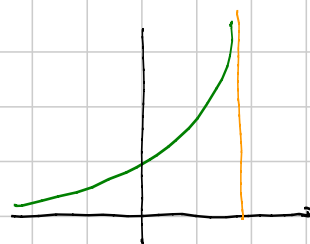
$$a > 0 \text{ e } \alpha > 1$$

Esercizio: L'equazione si risolve esplicitamente e si ottiene che

- c'è esistenza globale per $t \leq 0$;
- blow-up per $t \geq 0$

A parità di a ed α il tempo di vita

- tende a $+\infty$ quando $u_0 \rightarrow 0^+$
- tende a 0^+ quando $u_0 \rightarrow +\infty$.

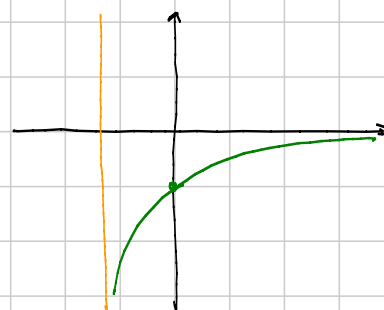


A sono diverse varianti: con $a < 0$ si scambiano tempi > 0 e < 0 .

Se l'equazione è $\begin{cases} u' = a|u|^\alpha \\ u(0) = u_0 < 0 \end{cases}$ $a > 0$ e $\alpha > 1$

allora la situazione è questa

Morale: potenze più alte di 1 = blow-up da qualche parte.



SSSUP 2011 - LEZIONE 18

Titolo nota

18/04/2011

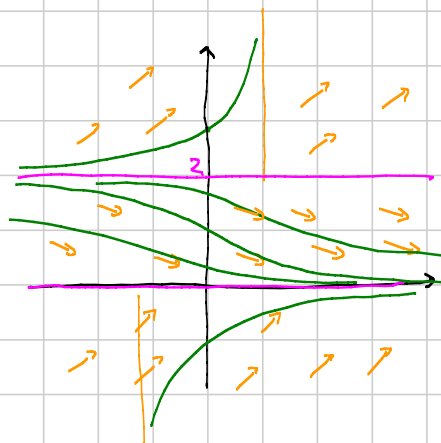
Esempio 1
$$\begin{cases} u' = u^2 - 2u = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Fatto 1 Soluzioni stazionarie: $f(u_0) = 0$
 $u(t) \equiv 2$ e $u(t) \equiv 0$

Fatto 2 La monotonia di u dipende dalla zona

Fatto 3 (Comune a tutte le equazioni autonome)

Se $u(t)$ è una soluzione (definita dove se pare), allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che $u(t+a)$ è ancora una soluzione (definita sull'insieme opportunamente traslato).
 In altre parole: la traslata di una soluzione è ancora una soluzione.



Dim. Pongo $v(t) = u(t+a)$

$$v'(t) = u'(t+a) = f(u(t+a)) = f(v(t))$$

$\uparrow$
 uso che u è
 soluzione.

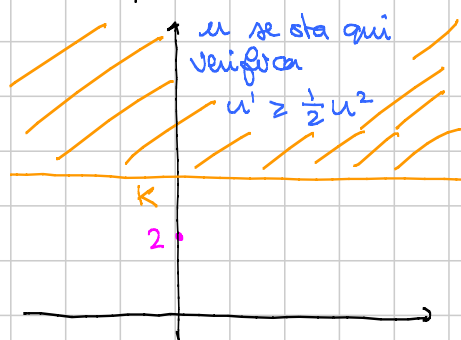
Fatto 4 Se u_0 è abbastanza grande, allora c'è blow-up (e questo per il discorso delle traslazioni dice che c'è blow-up per ogni $u_0 > 2$)
 Poiché f ha crescita quadratica, cioè

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^2} = 1$$

avremo che $f(u) \geq \frac{1}{2} u^2$ per ogni $u \geq k$
 Ma allora $u' = f(u) \geq \frac{1}{2} u^2$ se $u(t) \geq k$

cioè $u(t)$, se parte sopra k , è sopra soluzione di un'eq. che ha blow-up, quindi ha blow-up pure lei.

Se parte sopra k , la soluzione è monotona, quindi resta sopra k , dove posso usare il confronto.



Esempio 2
$$\begin{cases} u' = u^2 - e^t \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

Se u_0 è abbastanza grande, allora c'è blow-up.

Esercizio di allenamento
$$\begin{cases} u' = u^2 - 3000 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

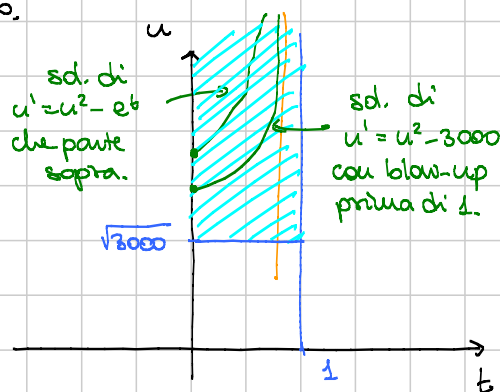
In questo caso c'è blow-up per $u_0 > \sqrt{3000}$. Inoltre il tempo di vita tende a zero quando $u_0 \rightarrow +\infty$.

Prendo un k con questa proprietà:

se $u_0 \geq k$, allora la soluzione di

$$\begin{cases} u' = u^2 - 3000 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

ha tempo di vita ≤ 1 .



Per $t \in [0, 1]$ ho che $u^2 - e^t \geq u^2 - 3000$. Quindi fino a quando resto nella zona tratteggiata le soluzioni di $u' = u^2 - e^t$ risolvono $u' \geq u^2 - 3000$, quindi sono sopra soluzioni dell'eq. con il 3000.

Occhio: posso usare il confronto fra $u' = u^2 - e^t$ e $u' = u^2 - 3000$ solo per $t \in [0, 1]$, ma se lo scoppio è già avvenuto, ho finito.

Teoremi di esistenza globale

Teorema 1 Se $u' = f(t, u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e limitata, cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(t, u)| \leq M$ per ogni $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, allora c'è esistenza globale.

Estensione: se f è definita per $(t, u) \in (a, b) \times \mathbb{R}$, e in questa striscia è limitata, allora la soluzione è definita per ogni $t \in (a, b)$.

Teorema 2 Se $u' = f(t, u)$ con f definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e sublineare, cioè esistono costanti A e B t.c.
 $|f(t, u)| \leq A + B|u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$,
 allora c'è esistenza globale.

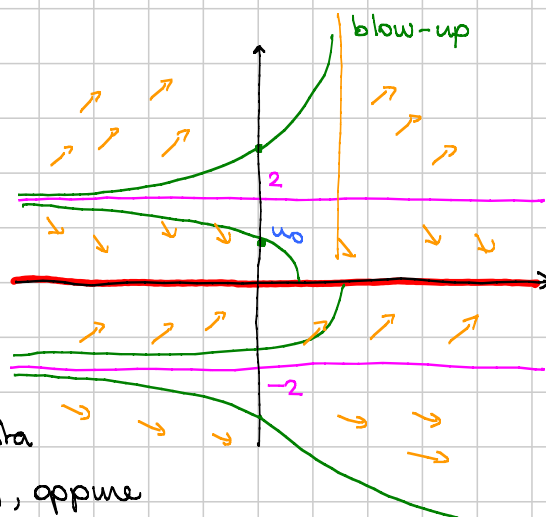
Estensione: $|f(t, u)| \leq A(t) + B(t)|u|$ con $A(t)$ e $B(t)$ continue.

Motivo per cui funziona: facendo il confronto con le soluzioni di $u' = A + Bu$ riesco ad escludere il blow-up.

Esempio 3 $u' = \frac{u^2 - 4}{u} \cdot e^u$

$u(t) \equiv \pm 2$ sol. stazionarie

$u = 0$ non si può toccare



$u(0) \in (0, 2)$ Esistenza globale per $t \leq 0$ e break-down per $t > 0$.
 Per l'esistenza globale per $t \leq 0$ basta che modifichi f fuori da $[u_0, 2]$, oppure osservo che la soluzione deve stare in quell'intervallo e lì f è limitata.

Per il break-down ragiono per assurdo: se avessi esistenza globale, per monotonia avrei un limite l per $t \rightarrow +\infty$, con $l \in [0, u_0]$, ma allora $u'(t) \rightarrow f(l)$ che dovrebbe essere $= 0$, il che è impossibile.

$u(0) \in (-2, 0)$ Stesso discorso.

$u(0) \in (2, +\infty)$ Esistenza globale per $t \leq 0$ (è costretta a stare tra 2 e u_0 , e lì f è limitata).
Blow-up per $t \geq 0$ in quanto $f(u) \geq u^2$ per u sufficientemente grandi.

$u(0) \in (-\infty, -2)$ Esistenza globale per tempi positivi e negativi in quanto $f(u)$ è limitata per $u \leq -2$, e la soluzione è costretta a stare lì.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(u(t))$$

$\uparrow$
 $[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Hôp}]$

$$= \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = 0.$$

SA 2011 - LEZIONE 19

Titolo nota

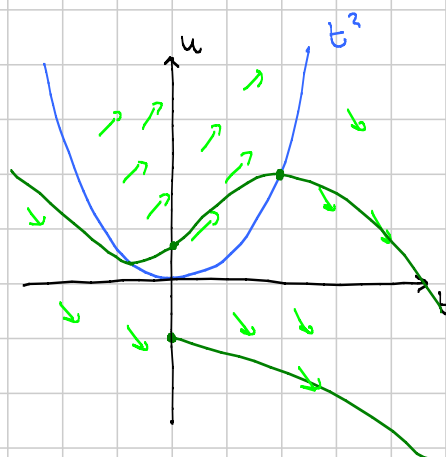
02/05/2011

Studi qualitativi di equazioni diff. non autonome

Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan(u - t^2) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

1° passo Cercare di capire segno di u'

$$u' > 0 \Leftrightarrow u - t^2 > 0 \Leftrightarrow u > t^2$$



0° passo $f(t, u)$ limitata $\Rightarrow$ c'è esistenza globale per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

2° passo Se $\alpha < 0$, la soluzione è decrescente per $t \geq 0$ e $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

Infatti

- per monotonia $u(t) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

- a quel pto

$$u' = \arctan(u - t^2) \rightarrow \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

- se fosse $\ell \in \mathbb{R}$ u' dovrebbe non aver limite oppure tendere a 0, il che non è. Quindi $\ell \in \mathbb{R}$ non può essere.

3° passo Se $\alpha > 0$ ci sono almeno 2 opzioni:

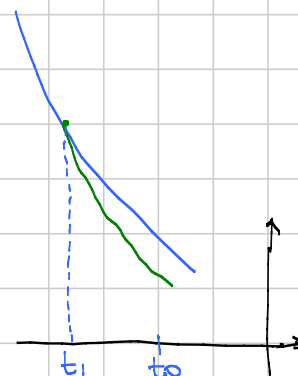
- * sempre crescente e tende a $+\infty$

- * cresce, tocca parabola, poi scende e tende a $-\infty$

Di sicuro ci sono degli α per cui il comportamento è il 2° (basta partire sulla parabola e "tornare indietro").

4° passo Punto con $\alpha > 0$ e vedo che succede per $t \leq 0$.

Ad un certo p.to tocca la parabola, poi cresce e non la può più toccare perché dovrebbe farlo con derivata nulla e non si può arrivare da sotto con derivata nulla



Dim. So che ad un certo tempo t_0 ho che $u(t_0) < t_0^2$, con $t_0 < 0$. Supponiamo per assurdo che $u(t) > t^2$ per un qualche $t < t_0$. Sia

$$t_1 = \sup \{ t < t_0 : u(t) = t^2 \}$$

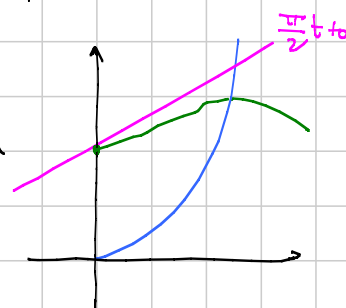
Ora so che $u(t) \leq t^2$ per ogni $t \in [t_1, t_0]$. Ma allora

$$0 = u'(t_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per l'eq. diff.}}}{=} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t_1+h) - u(t_1)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(t_1+h)^2 - t_1^2}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di } t^2}}{=} 2t_1 < 0$$

$\uparrow$ t_1 p.to contatto + $u(t) \leq t^2$

5° passo Per ogni $\alpha > 0$ la soluzione tocca la parabola anche per $t > 0$.

Infatti $u' \leq \frac{\pi}{2}$ sempre, quindi $u(t) \leq \alpha + \frac{\pi}{2}t$ e questa retta tocca la parabola in un tempo finito



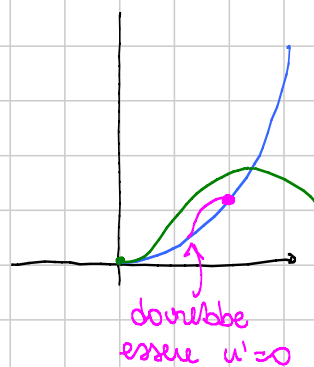
6° passo Per $\alpha < 0$ e $t \leq 0$ la soluzione va a $+\infty$ senza toccare (stesso motivo del passo 4 per il non contatto).

Il limite è $+\infty$ perché se fosse L la derivata tenderebbe a $-\frac{\pi}{2}$, il che non è possibile per...

3° passo $\alpha = 0$. Può toccare la parabola per $t \geq 0$?

Supponiamo per assurdo che la tocchi...

Ma allora una soluzione che parte in mezzo dovrebbe incontrare in mezzo la parabola dall'alto con derivata nulla: impossibile per il solito motivo (dimostrarlo rigorosamente con il rapporto incrementale).

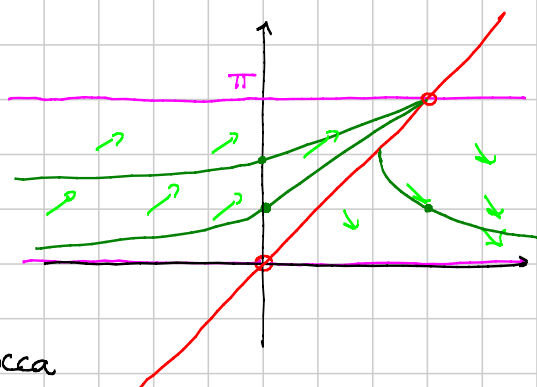


Osservazione 1 Per $t \geq 0$ si ha che $v(t) = t^2$ è sopra soluzione dell'equazione.

Osservazione 2 Nel passato sopra e sottosoluzioni si scambiano nei termini di confronto.

Esempio 2 $u' = \frac{\sin u}{u - t}$

$u(0) = \alpha \in (0, \pi)$



La soluzione stazionaria $u(t) \equiv \pi$ è definita solo fino a quando tocca la bisettrice, cioè in $(-\infty, \pi)$

Partendo con $\alpha \in (0, \pi)$ per $t \geq 0$ la soluzione esiste, resta > 0 , e tende ad un certo limite l . Il te. dell'asintoto non permette di escludere limiti > 0 .

Per $t \geq 0$ la soluzione non può toccare la soluzione stazionaria e non può toccare la bisettrice perché dovrebbe farlo con "derivata $+\infty$ " arrivandoci dall'alto.

L'unica possibilità è che arrivi nel p.to (π, π) (FOSSA COMUNE)

Le soluzioni non possono tendere a $l \neq 0$.

Dimostriamolo per la soluzione con $u(\pi) = \alpha \in (0, \pi)$ e $t \rightarrow +\infty$.

Supponiamo $u(t) \rightarrow l > 0$. Allora

$$u'(t) = \frac{\sin u}{u-t} \leq \frac{1}{l-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

$$u(t) - t \geq -t, \quad \text{quindi} \quad \frac{1}{u-t} \leq \frac{1}{-t}$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{3}$$

ma da questa non posso dedurre che $\frac{\sin u}{u-t} \leq -\frac{1}{t}$!!!

Quella vera è che

$$u' = \frac{\sin u}{u-t} \leq -\frac{\sin l}{t}$$

$$\text{Infatti} \quad \frac{\sin u}{u-t} \leq -\frac{\sin l}{t} \Leftrightarrow \frac{\sin u}{t-u} \geq \frac{\sin l}{t}$$

ora è tutto positivo e OK.

Ma allora

$$u(t) - u(\pi) = \int_{\pi}^t u'(s) ds = - \int_{\pi}^t \frac{\sin l}{s} ds \rightarrow -\infty$$

assurdo.

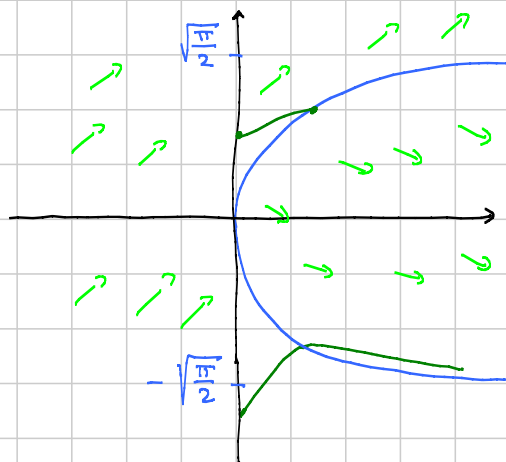
SSSUP 2011 - LEZIONE 20

Titolo nota

02/05/2011

Esempio 3 $\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

$$\begin{aligned} u' > 0 &\Leftrightarrow u^2 > \arctan t \\ &\Leftrightarrow u > \sqrt{\arctan t} \text{ oppure } u < -\sqrt{\arctan t} \end{aligned}$$



$\alpha < 0, t \geq 0$ Inizialmente cresce, poi tocca e decresce. Non può ritoccare perché dovrebbe farlo con derivata nulla e non si può da sopra

(Rigoroso: il rapporto incrementale

o dico che $v(t) = -\sqrt{\arctan t}$ è una sottosoluzione in quanto $\underbrace{v'}_{\text{neg.}} < \underbrace{v^2 - \arctan t}_0$

Domande: ① perché tutte toccano

② perché dopo aver toccato tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Risposte: ② l'co. asintoto. So che $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (monotonia)

Allora (equazione) $u' \rightarrow l^2 - \frac{\pi}{2}$

Allora esiste $\lim u'$

Allora $\lim u' = 0$, quindi $l = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ma il segno + è incompatibile con il decrescere.

① Per ora problema aperto...

$\alpha > 0, t \geq 0$ Opzioni: * tocca e va a $-\sqrt{\pi/2}$

* non tocca e va a $+\infty$

* non tocca e va a $\sqrt{\pi/2}$

* blow-up in tempo finito.

Esistono $\alpha > 0$ per cui tocca: basta partire dalla curva e tornare indietro. Se per un certo α tocca, allora tocca anche per tutti gli $\alpha_1 < \alpha$.

Esistono $\alpha > 0$ per cui si ha blow-up in tempo finito. Perché?

$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \quad (\text{in questo caso sempre, ma comunque almeno per } t \in [0, 1])$$

Quindi

$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

per $t \in [0, 1]$ e $u \geq u_0$

Quindi, FIN QUANDO RESTANO IN Ω , le soluzioni di

$$u' = u^2 - \arctan t \text{ stanno sopra quelle di } u' = \frac{u^2}{2}.$$

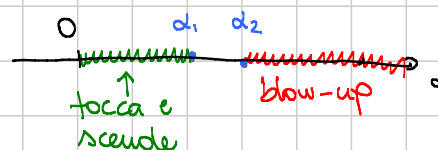
Ora esistono soluzioni di quest'ultima che hanno blow-up PRIMA di $t=1$



Se per un certo α c'è blow-up, allora c'è pure per gli α successivi.

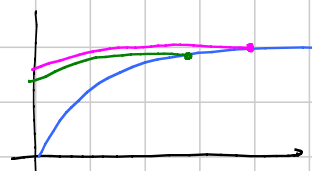
$\alpha_1 = \sup$ dati per cui tocca

$\alpha_2 = \inf$ dati per cui c'è blow-up.



Può toccare con partenza da α_1 ?

NO! Ce ne sarebbe una che tocca più in là, che per forza è partita sopra. Equivalentemente: l'insieme degli α per cui tocca è aperto.



Può esserci blow-up con partenza da α_2 ? NO!

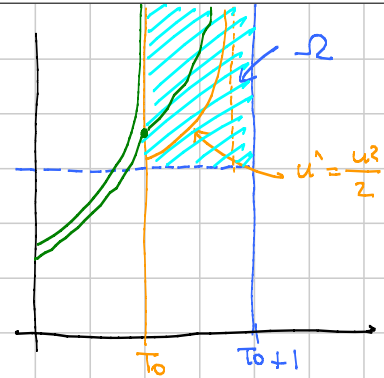
Supponiamo che ci sia blow-up.

Idea: se punto abbastanza in alto sull'asintoto, allora ho blow-up. Infatti abbiamo che

$$u' = u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

in $\Omega = [T_0, T_0+1] \times [u_0, +\infty)$

quindi in Ω posso confrontare le sol. di $u' = u^2 - \arctan t$ con quelle di $u' = \frac{u^2}{2}$.



Quindi gli α per cui c'è blow-up sono un aperto.

Quindi per ogni $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ (magari è un p.to solo) la soluzione resta sempre sopra, quindi cresce sempre, quindi tende a $+\infty$ oppure a $\sqrt{\pi/2}$.

Domande: ③ $\alpha_1 = \alpha_2$?

④ tende a $+\infty$ o $\sqrt{\pi/2}$?

Risposta a ④: tende a $\sqrt{\pi/2}$ perché se tendesse a $+\infty$

supererebbe il valore u_0 per cui

$$u^2 - \arctan t \geq u^2 - \frac{\pi}{2} \geq \frac{u^2}{2}$$

e a quel p.to il blow-up segue dal confronto.

Quindi tutte le soluzioni con $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ tendono a $\sqrt{\pi/2}$.

③ Sia u_1 la soluzione con $u(0) = \alpha_1$ e u_2 similmente. Pongo $w = u_2 - u_1$. Allora

$$w' = u_2' - u_1' = (u_2)^2 - \arctan t - (u_1)^2 + \arctan t > 0$$

Quindi w cresce, ma $w(0) > 0$ ed il limite a $+\infty$ sarebbe $\sqrt{\pi/2} - \sqrt{\pi/2}$. Assurdo.

Altro modo per dimostrare dei blow-up : sparare una sottosoluzione che abbia blow-up.

Provo

$$v(t) = \frac{1}{1-kt}$$

vedo se per qualche valore di k è sottosoluzione

$$v' = \frac{k}{(1-kt)^2} \stackrel{\text{però}}{<} \underbrace{\frac{1}{(1-kt)^2} - \arctan t}_{v^2 - \arctan t}$$

La voglio vera per ogni $t \leq \frac{1}{k}$

SSSUP 2011 - LEZIONE 21

Titolo nota

10/05/2011

Equazioni differenziali di ordine 2 $\ddot{u}$ = derivata 2^a = accelerazioneEsempio 1 $u'' = u$

$$u'' = -u$$

Lineari e si sanno risolvere esplicitamente. Trasformando in sistemi

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}$$

Il secondo membro del sistema è sublineare nelle variabili u e v . Detto meglio

$$\begin{cases} u' = f(u, v, t) \\ v' = g(u, v, t) \end{cases}$$

$$|f(u, v, t)| \leq A + B|u| + C|v|$$

$$|g(u, v, t)| \leq A + B|u| + C|v|$$

(volendo anche $A(t), B(t), C(t)$ continue)

Sotto queste ipotesi il sistema ha soluzioni globali nel tempo.

$$u(t) = c_1 \cosh t + c_2 \sinh t$$

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

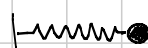
$$u'' = ku$$

$$u'' = -ku \quad (k > 0)$$

$$u(t) = c_1 \cosh(\sqrt{k}t) + c_2 \sinh(\sqrt{k}t),$$

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{k}t) + c_2 \sin(\sqrt{k}t)$$

(oscillatore armonico)



soluzioni NON periodiche

Soluzioni PERIODICHE

Esempio 2 $u'' = -u^3$

In questo caso l'esistenza globale non è garantita.

METODO DELL'ENERGIAPrendo l'equazione e moltiplico per u'

$$u'' \cdot u' = -u^3 \cdot u'$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{4} u^4 \right]'$$

cioè $\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 \right]' = 0$

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2}_{\substack{\uparrow \text{energia} \\ \text{cinetica}}} + \underbrace{\frac{1}{4} u^4}_{\uparrow \text{potenziale}}$$

Sappiamo che $E(t) = E(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, quindi l'energia si conserva.

Essendo l'energia costante $u(t)$ e $\dot{u}(t)$ saranno per forza limitate

$$|\dot{u}(t)| \leq \{2 E(0)\}^{1/2}$$

$$|u(t)| \leq \{4 E(0)\}^{1/4}$$

Queste limitatezza escludono blow-up e break-down, per cui c'è esistenza globale.

perché anche la derivata 2^a risulta limitata

SPAZIO DELLE FASI lo spazio delle fasi è l'insieme che descrive lo stato del sistema. In questo caso è descritto dalla coppia

$$(u, \dot{u}) \in \mathbb{R}^2$$

Il teorema di unicità dice che per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola soluzione.

Come vedere le soluzioni nello spazio delle fasi?

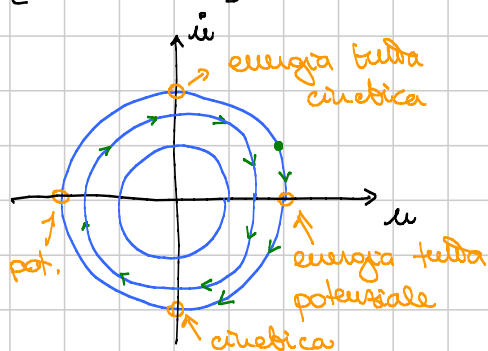
$$u'' = -u$$

$$u'' \cdot u' = -u \cdot u'$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{2} u^2 \right]'$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 \right]' = 0$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = E(0) \geq 0.$$



Il raggio del cerchio è $2 E(0)$ e dipende dall'ampiezza. θ_0 = p.to del cerchio per $t=0$.

$$(\cos t, \sin t)$$

$$c_1 \cos t + c_2 \sin t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t + \theta_0) = A \sin(t + \theta_0)$$

$$u(t) = \underbrace{\alpha}_{\sin \theta_0} \cos(\omega t) + \underbrace{\beta}_{\cos \theta_0} \sin(\omega t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\omega t) \right]$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left[\tilde{a} \cos(\omega t) + \tilde{b} \sin(\omega t) \right] = \boxed{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\omega t + \boxed{\theta_0})$$

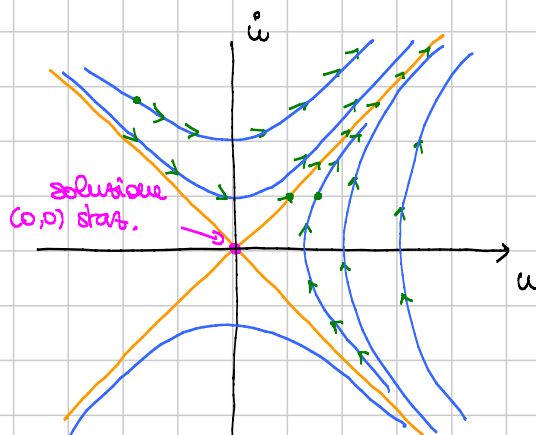
↑ ampiezza oscillazione ↑ fase iniziale

$$u'' = u \quad \ddot{u} \cdot \dot{u} = u \cdot \dot{u}$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]'$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{2} u^2 = E(0) \in \mathbb{R}$$

In particolare le soluzioni di $\ddot{u} = u$ non sono periodiche tranne il caso banale di partenza da $(0,0)$.



$$\ddot{u} = -u^3 \quad \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = E(0)$$

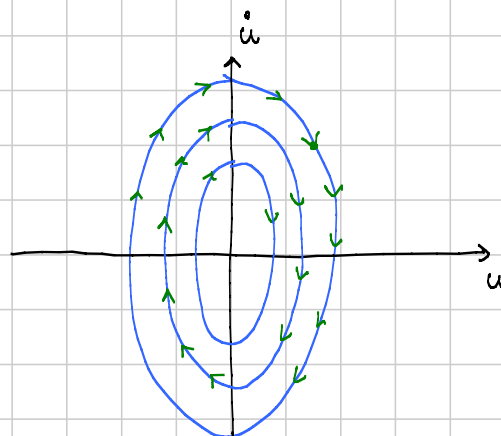
Queste sono una famiglia di curve limitate nel piano $(u, \dot{u})$.

Ci aspettiamo ancora soluzioni periodiche.

Dalla conservazione dell'energia posso ricavare

$$\dot{u} = \pm \sqrt{2E(0) - \frac{1}{2} u^4}$$

↑ dipende dal quadrante



Fissato il semipiano, diventa un'eq. del 1° ordine autonoma, cioè teoricamente risolvibile! Mettiamoci con $\dot{u} > 0$, cioè seguiamo +.

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2} u^4}} = 1$$

ora integro tra $\pm \sqrt[4]{4E(0)}$, cioè i valori max e min per $u(t)$.

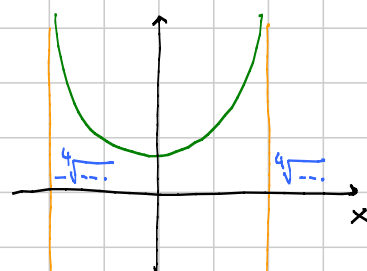
$$u(t_1) = \min \quad u(t_2) = \max$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2} u^4}} dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 dt = \frac{1}{2} \text{ Periodo}$$

b₂ - t₁

$$\int_{u(t_1)}^{u(t_2)} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2} x^4}} = \int_{-\sqrt[4]{4E(0)}}^{\sqrt[4]{4E(0)}} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - \frac{1}{2} x^4}}$$

|| ← x = u(t)



↑ integrale improprio conv. (convergent).

SSSUP 2011 - LEZIONE 22

Titolo nota

10/05/2011

Esempio 1 $\ddot{u} = -ku$ $\dot{u}\ddot{u} = -ku\dot{u}$ $\left[\frac{1}{2}\dot{u}^2\right]' = \left[-\frac{k}{2}u^2\right]'$

$$E(t) = \frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{k}{2}u^2 = E(0) \quad \dot{u} = \pm \sqrt{2E(0) - ku^2}$$

Prendo il segno +, cioè la parte di soluzione con $\dot{u} > 0$, cioè il tratto di soluzione tra il min ed il max.

$$\text{min, max} = \pm \sqrt{\frac{2E(0)}{k}}$$

Procedendo come prima trovo che

$$\frac{\text{Periodo}}{2} = \int_{\min}^{\max} \frac{dx}{\sqrt{2E(0) - kx^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}(t)}{\sqrt{2E(0) - ku^2(t)}} dt = t_2 - t_1$$

$u(t) = x$
 $dx = \dot{u}(t) dt$

Calcolo l'integrale al LHS.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}}^{+\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E(0)}{k} - x^2}}$$

Pongo $x = \sqrt{\frac{2E(0)}{k}} \cdot y$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{2E(0)}{k}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{2E(0)}{k}} dy}_{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

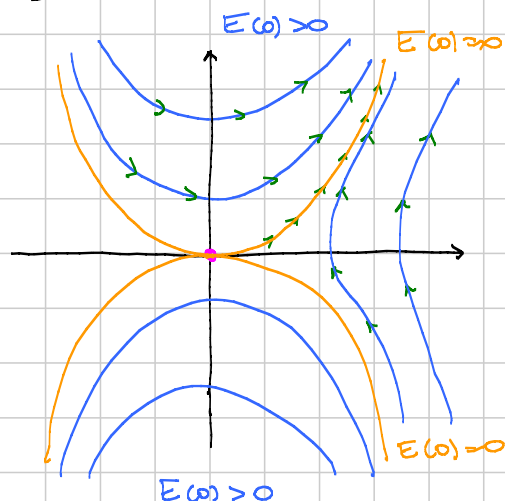
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} [\arcsin y]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \Rightarrow \text{Periodo} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \text{ indipendente da } E(0)$$

come si vedeva dalla formula esplicita.

Esercizio Capire, nel caso di $\ddot{u} = -u^3$, come il periodo varia in funzione dell'energia.

Esempio 2 $\ddot{u} = u^3$ $\ddot{u} \dot{u} = u^3 \dot{u}$ $\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2\right]' = \left[\frac{1}{4} u^4\right]'$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{4} u^4 = E(u) \quad \dot{u} = \pm \sqrt{2E(u) + \frac{1}{2} u^4}$$

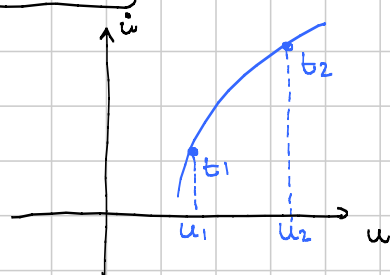


In questo caso non ci sono soluzioni periodiche tranne quella stazionaria banale $(0,0)$.

Le soluzioni lungo le parabole si possono trovare esplicitamente

Domanda: c'è blow-up oppure no?

1° modo



$$\dot{u} = \sqrt{2E(u) + \frac{1}{2} u^4}$$

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dots}} = 1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dots}} dt = t_2 - t_1$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{\sqrt{2E(u) + \frac{1}{2} x^4}}$$

Poiché l'integrale improprio, ottenuto mandando $u_2 \rightarrow \infty$, converge, so che $t_2 - t_1$ tende ad un numero e quindi la soluzione tende a ∞ in un tempo finito, che siamo con l'integrale improprio.

2° modo

(In realtà è lo stesso) Prendo l'equazione del 1° ordine risolto da u ed osservo, studiandola qualitativamente, che c'è blow-up (il secondo membro cresce quadraticamente all'infinito).

Esercizio Capire $\ddot{u} = |u|^p$ $\ddot{u} = -|u|^p$ al variare di $p > 0$.

Esempio 3 $\ddot{u} = -\sin u$

($\ddot{u} = -k \sin u$ è l'eq. vera del pendolo, senza fare ipotesi che $u =$ angolo con la verticale sia piccolo).

$$\ddot{u} \dot{u} = -\dot{u} \sin u$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = [\cos u]'$$

$$E(u) = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - \cos u = E(u)$$

Come sono fatte le curve nel piano $(u, \dot{u})$?

1^a oss $\dot{u}$ è limitato. Questo già implica esistenza globale. Infatti u non può scappare in tempo finito (è lip.), quindi no blow-up, e anche $\ddot{u}$ non può scappare, quindi no break-down.

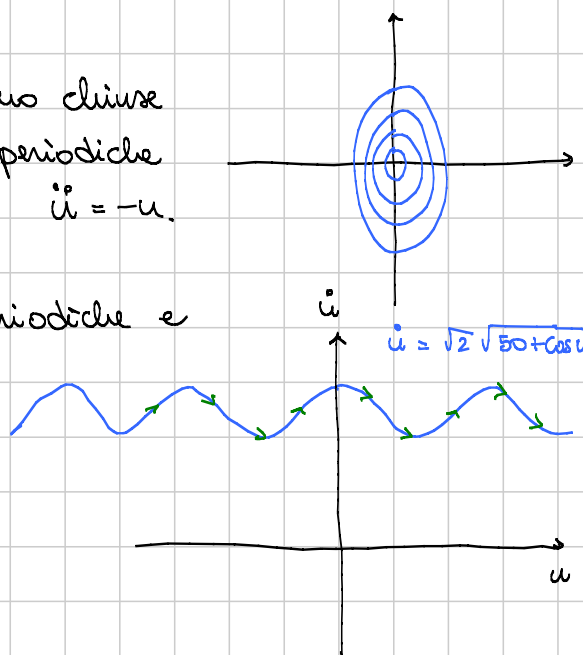
Visto come sistema $\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\sin u \end{cases}$ le 2 funzioni al RHS sono sublineari in u e v .

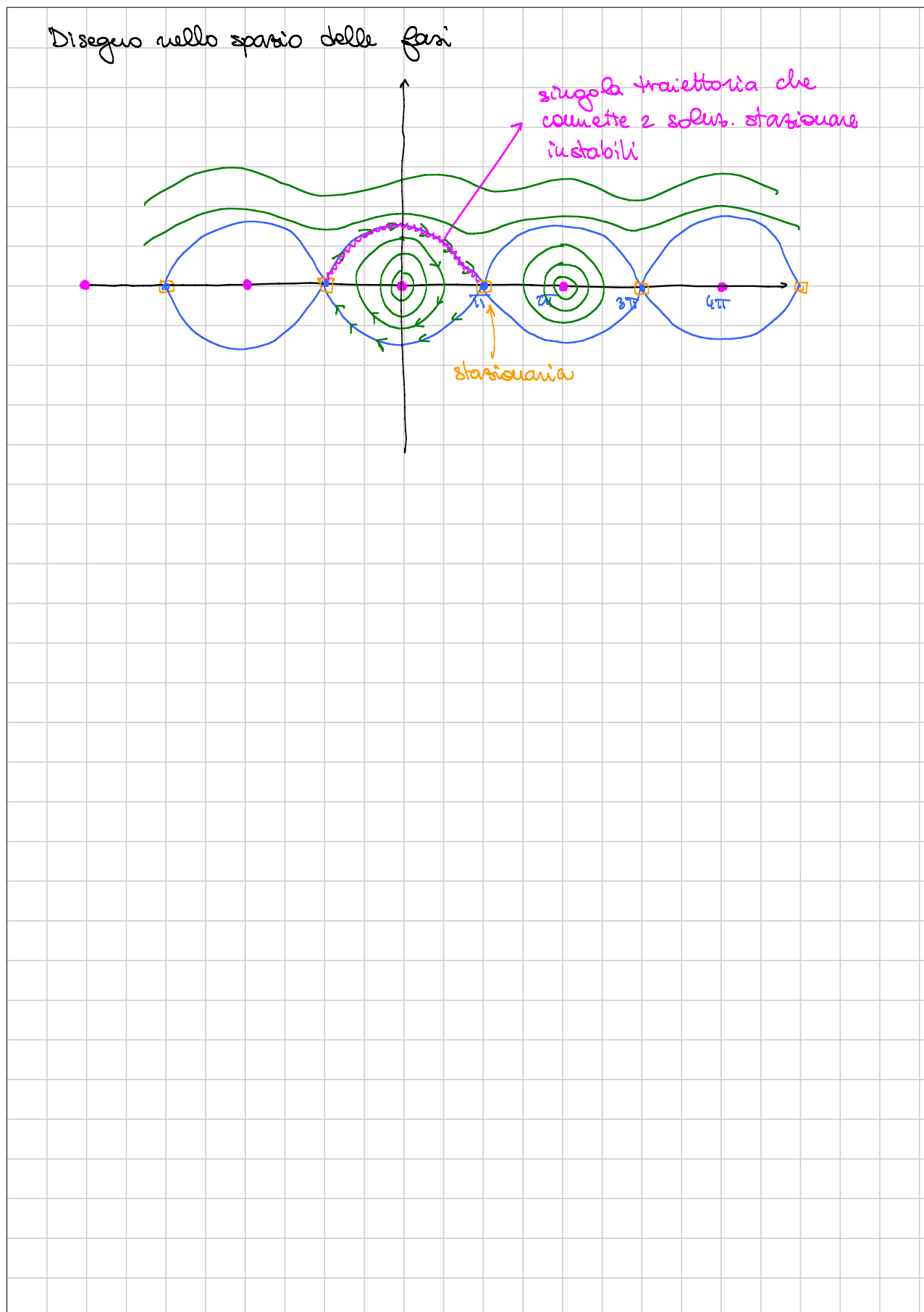
Curve: $\dot{u} = \pm \sqrt{2} \sqrt{E(u) + \cos u}$ (oss. $E(u) \geq -1$)

- Se $E(u) = -1$, la curva si riduce ad un pto $(2k\pi, 0)$: si tratta delle soluzioni stazionarie in cui il pendolo parte qui e fermo...

- Se $E(u) \in (-1, 1)$ le curve sono chiuse e limitate. Ottengo soluzioni periodiche sostanzialmente come nel caso $\ddot{u} = -u$.

- Se $E(u) > 1$, le curve sono periodiche e illimitate





SSSUP 2011 - LEZIONE 23

Titolo nota

31/05/2011

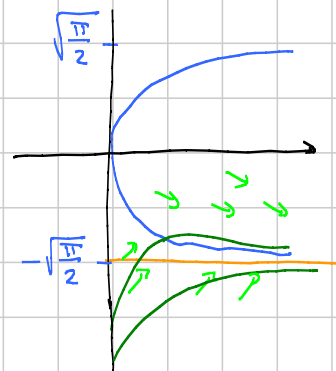
Back to Lesson 20

$$u' = u^2 - \arctan t$$

$$u(0) < 0$$

$$u(t) \rightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ sempre (con } u(0) < 0)$$

Lo può fare in modo monotono? NO!



Fatto 1 Se esiste $t > 0$ t.c. $u(t) \geq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, allora u dopo tocca e diventa monotona decrescente.

Fatto 2 Supponiamo (per assurdo) che $u(t) \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ per ogni $t \geq 0$. Allora

Uso Hp

$$u'(t) = u^2(t) - \arctan t \geq \frac{\pi}{2} - \arctan t = g(t) \quad \forall t \geq 0$$

quindi
$$u(t) - u(0) = \int_0^t u'(s) ds \geq \int_0^t g(s) ds$$

Se dimostro che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} g(s) ds = +\infty$, allora ho trovato un assurdo perché

$$\text{LHS} \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}} - u(0)$$

Fatto 3 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan t \right) \cdot \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow$ l'integrale diverge.

Per calcolare il limite ci sono 2 possibilità:

1ª - l'Hôpital

2ª - Usare l'uguaglianza $\frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan \frac{1}{t} \sim \frac{1}{t}$

L'uguaglianza, a sua volta, si dimostra o partendo da

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x} \quad \text{o studiando la funzione } \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

Sistemi di equazioni differenziali

Caso di 2 equazioni lineari autonome omogenee del 1° ordine

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases}$$

Esempio 1

$$\begin{aligned} u' &= 4u + v \\ v' &= 3u + 2v \end{aligned}$$

Metodo terra-ferra: cerco di ottenere una equazione nella sola u .
Prendo la 1ª equazione e la derivo

$$u'' = 4u' + v' = 4u' + 3u + 2v = 4u' + 3u + 2u' - 8u = 6u' - 5u$$

$\uparrow$ prendo v' da 2ª equazione $\uparrow$ prendo v da 1ª eq.

Ho ottenuto l'equazione $u'' - 6u' + 5u = 0$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad x = 1, 5 \quad \boxed{u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t}}$$

Una volta ottenuta u , ricavo v dalla 1ª equazione

$$v = u' - 4u = c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - 4c_1 e^t - 4c_2 e^{5t} = \boxed{-3c_1 e^t + c_2 e^{5t}}$$

La soluzione $(u(t), v(t))$ dipende da 2 parametri c_1 e c_2 , univocamente determinabili sulla base di $u(t_0)$ e $v(t_0)$

Esercizio Provare a fare una procedura analoga con un sistema 3×3 (senza strada facendo la risoluzione di sistemi lineari 2×2).

— 0 — 0 —

Passo successivo: 1 e 5 sono autovalori di una matrice e

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$\uparrow$ autovettori relativi agli autoval. 1 e 5, rispettivamente.

Matrice associata al sistema: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ traccia = somma autov. = 6
det = prod. autov. = 5

Per un sistema $n \times n$ ci aspettiamo una soluzione generale della forma

$$U(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n v_n e^{\lambda_n t}$$

↑
vettore di componenti
 $u_1(t), u_2(t), \dots$

- dove
- $c_1, \dots, c_n$ sono parametri reali
 - $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice (supposti reali e distinti)
 - $v_1, \dots, v_n$ sono i corrispondenti autovettori (linearmente indipendenti perché relativi ad autovalori distinti).

Se gli autovalori sono tutti reali, ma alcuni hanno molteplicità > 1 , allora "si mettono le t davanti", ma non basta perché bisogna anche guardare gli autovettori ... (le t servono solo quando l'autospazio ha dimensione inferiore alla molteplicità).
— o — o —

Perché tutto ciò funziona?

Fatto 1 Una matrice con n autovalori reali distinti è diagonalizz.

Fatto 2 Se invece di usare la base canonica uso la base di autovettori il sistema diventa diagonale.

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = u_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + u_n(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \hat{u}_1(t) v_1 + \hat{u}_2(t) v_2 + \dots + \hat{u}_n(t) v_n$$

dove $v_1, \dots, v_n$ sono gli autovettori e $\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_n(t)$ sono i coeff. rispetto alla nuova base (si ottengono con la matrice di

cambio di base a partire da $u_1, \dots, u_n$.

Osservazione: la matrice che mi fa passare

$(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_n)$ è quella che ha i v_i come colonne (so come deve agire quando c'è un 1 e tutti 0).

La matrice che fa il passaggio inverso è la matrice inversa.

Chiamo M la matrice le cui colonne sono i v_i . Allora

$$\hat{U}(t) = M^{-1} U(t), \text{ ma allora}$$

$$\hat{U}'(t) = M^{-1} U'(t) = M^{-1} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice sistema}}}{A} U(t) = \underbrace{M^{-1} A M}_{\substack{\uparrow \\ \text{matrice nella} \\ \text{nuova base}}} \hat{U}(t) = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{matrice} \\ \text{diagonale}}}{D} \hat{U}(t)$$

Il sistema con matrice diagonale vuol dire

$$\hat{u}_1'(t) = \lambda_1 \hat{u}_1(t)$$

$$\hat{u}_2'(t) = \lambda_2 \hat{u}_2(t)$$

$\vdots$

$$\hat{u}_n'(t) = \lambda_n \hat{u}_n(t)$$

è un sistema disaccoppiato, cioè sono n equazioni singole

La sua soluzione banalmente è

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

scrittura nelle
base $v_1, \dots, v_n$

Oss. Se per ogni autovalore la molteplicità algebrica e geometrica coincidono, allora la matrice si diagonalizza ugualmente, ed il procedimento funziona ed il termine $e^{\lambda t}$ compare (senza t aggiunta) tante volte quante è la sua molteplicità (e davanti compare una qualunque base dell'autospazio).

SSSUP 2011 - LEZIONE 24

Titolo nota

31/05/2011

Stabilità per sistemi di equazioni differenziali

$$u' = au + bv$$

$$v' = cu + dv$$

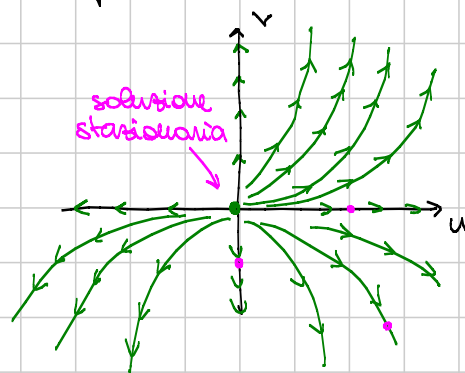
$$U' = AU \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Il sistema ha la soluzione banale $(u(t), v(t)) = (0,0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

La soluzione di un sistema si rappresenta graficamente come traiettorie nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^2$, pensato come coppie (u, v)

Se il sistema è diagonale è facile rappresentare le soluzioni

$$\begin{aligned} u' &= u & u(t) &= c_1 e^t \\ v' &= 5v & v(t) &= c_2 e^{5t} \end{aligned}$$



Moralmente $v(t) = c[u(t)]^5$

Tutte le traiettorie tendono a $(0,0)$ per $t \rightarrow -\infty$ e tendono all'infinito per $t \rightarrow +\infty$

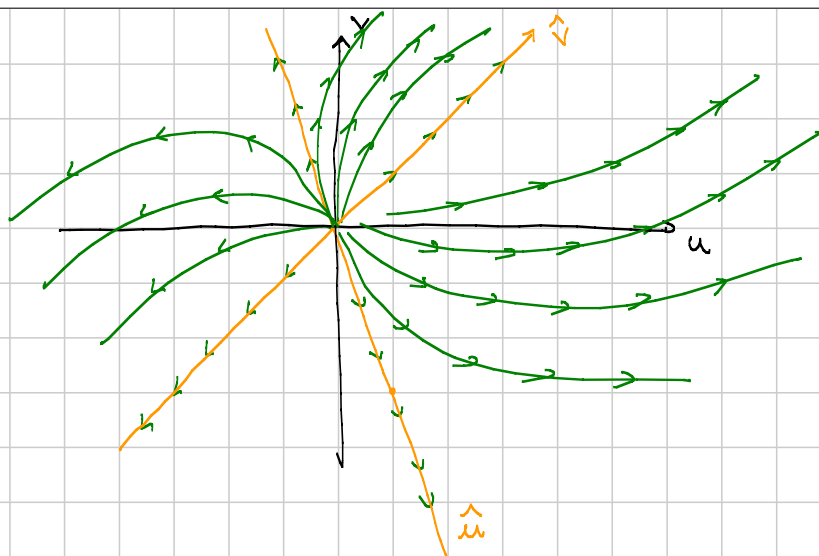
Cosa succede se il sistema è

$$\begin{aligned} u' &= 4u + v \\ v' &= 3u + 2v \end{aligned}$$

La soluzione è

$$u(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Quindi ho la stessa figura con $(1,0)$ che diventa $(1,-3)$ e $(0,1)$ che diventa $(1,1)$



Problema della stabilità: se punto vicino all'origine, resterà vicino all'origine?

Quali sono i possibili comportamenti delle traiettorie?

Si tratta di capire le FORME CANONICHE della matrice.

AUTOVALORI REALI DISTINTI = matrice diagonale

$$\hat{u}' = \lambda_1 \hat{u}$$

$$\hat{v}' = \lambda_2 \hat{v}$$

$$\hat{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

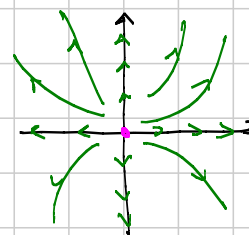
$$\hat{v}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$

Tutte le traiettorie tendono a (0,0) per $t \rightarrow -\infty$ e "scappano" per $t \rightarrow +\infty$

INSTABILITÀ

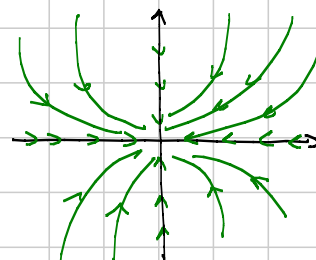
L'essere $\nearrow$ o $\searrow$ dipende dal rapporto λ_1/λ_2 .



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$

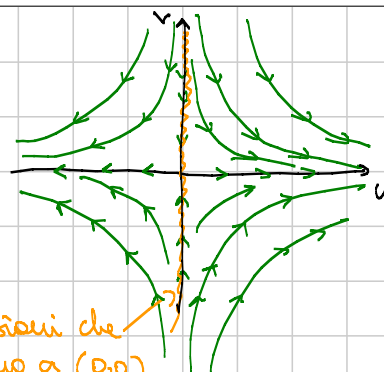
Stessa cosa invertendo i versi

STABILITÀ



$$\boxed{\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0} \quad \text{esempio} \quad \begin{aligned} u &= c_1 e^{2t} \\ v &= c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Allora $v = c \frac{1}{\sqrt{u}}$



soluzioni che tendono a $(0,0)$ per $t \rightarrow +\infty$.

Se $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$ sono nulli, allora le traiettorie sono rette, a meno che non siano entrambi nulli, nel qual caso le traiettorie sono punti (tutto sta fermo).

Tutto questo funziona anche se gli autovalori sono coincidenti ma la molteplicità geometrica è 2.

AUTOVALORE REALE DI MULT. ALG. 2 e GEOM. 1 la matrice non è diagonale, ma si può sempre portare nella forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

che corrisponde ad un sistema del tipo

$$\begin{cases} \hat{u}' = \lambda \hat{u} + \hat{v} \\ \hat{v}' = \lambda \hat{v} \end{cases}$$

È disaccoppiato nella 2ª equazione, quindi risolvo la 2ª: $\hat{v}(t) = c_2 e^{\lambda t}$ e vado a sostituire nella 1ª: $\hat{u}' = \lambda \hat{u} + c_2 e^{\lambda t}$, la cui soluzione è del tipo

$$\hat{u}(t) = c_1 e^{\lambda t} + (\text{cost. dip. da } c_2) t e^{\lambda t}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(t) \\ \hat{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

AUTOVALORI COMPLESSI CONIUGATI $\alpha \pm i\beta$

La matrice si può portare nella forma (fatto generale di algebra lineare)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

il che corrisponde ad un sistema della forma (eliminando i $\wedge$)

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

Passo in coordinate polari, cioè scrivo

$$u(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$v(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

$$u'(t) = \rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \sin \theta(t) \theta'(t) \quad \cdot \cos \theta(t)$$

$$v'(t) = \rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \cos \theta(t) \theta'(t) \quad \cdot \sin \theta(t)$$

$$u'(t) \cos \theta(t) = \rho' \cdot \cos^2 - \rho \theta' \sin \cos$$

$$v' \sin \theta = \rho' \sin^2 + \rho \theta' \cos \sin$$

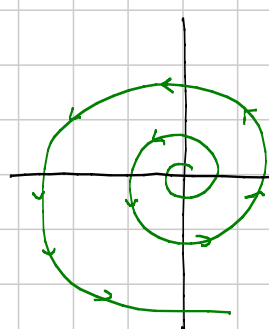
$$u'(t) \cos \theta(t) + v'(t) \sin \theta(t) = \rho'(t)$$

$$= [\alpha u(t) + \beta v(t)] \cos \theta(t) + [-\beta u(t) + \alpha v(t)] \sin \theta(t)$$

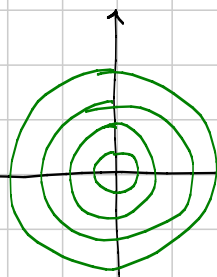
$$= [\alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta] \cos \theta + [-\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta] \sin \theta$$

Ho ottenuto che $\rho'(t) = \alpha \rho(t) \Rightarrow \rho(t) = c e^{\alpha t}$

Esercizio: ottenere l'equazione per $\theta'(t)$ (risulta pulitissima)

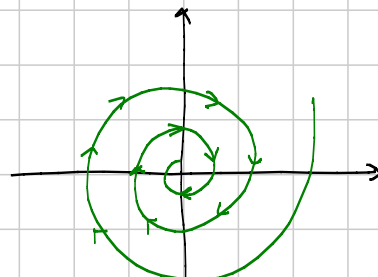


$\alpha > 0$



$\alpha = 0$

orario o antiorario
a seconda del segno
di θ'



$\alpha < 0$

SSSUP 2011 - LEZIONE 25

Titolo nota

08/06/2011

Sistemi di equazioni differenziali lineari

$$U' = A U$$

↑
matrice

$$U(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$$

L'origine è sempre un p.to stazionario.

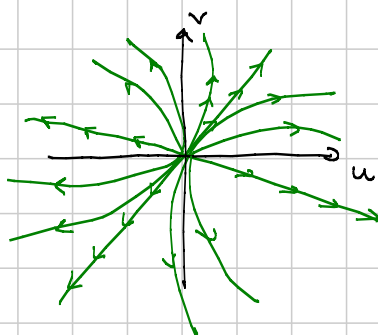
Problema della stabilità:

- ① se punto vicino all'origine, resto vicino all'origine?
- ② " " " " , la soluzione tende all'origine?
- ③ se punto da qualunque parte, tendo all'origine?

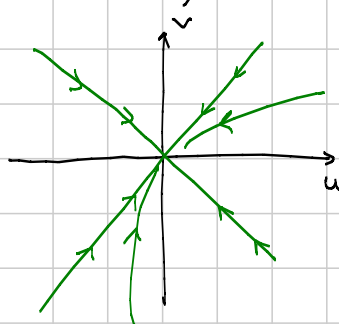
Nel caso lineare si risponde grazie alle formule esplicite per le soluzioni.

Nel caso 2×2 ci sono pochi casi.

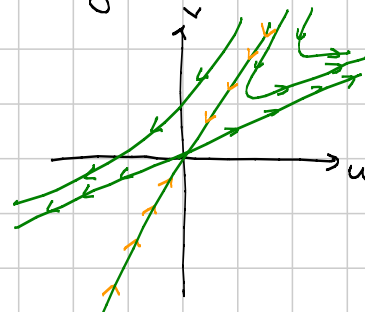
- Matrice con 2 autovalori $\lambda \neq \mu$ reali $\Rightarrow$ diagonalizzabile



$\lambda > 0, \mu > 0$
instabile



$\lambda < 0, \mu < 0$
stabile



$\lambda > 0, \mu < 0$
instabile

(caso speciale: quando uno degli autovalori è nullo. Qui le traiettorie sono rette parallele tra di loro: pensare al sistema diagonalizzato !!!)

- Matrice con 2 autovalori reali coincidenti
 - se mult. geom. = 2, allora matrice diagonalizzabile, quindi come sopra a seconda del segno di λ : traiettorie = rette

- se mult. geom. = 1, allora non diagonalizzabile, quindi ancora come sopra ma le curve non sono potenze.

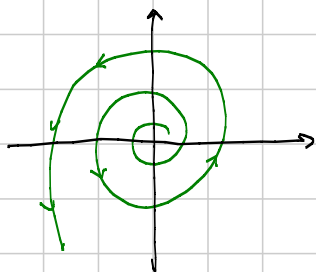
La matrice si può sempre mettere nella forma $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

• Matrice con 2 autovalori complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$. La matrice si può mettere nella forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

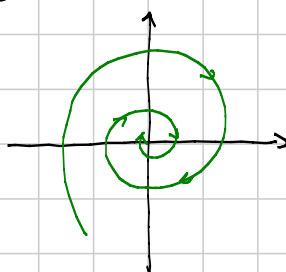
Passando in coordinate polari, il sistema diventa $\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha \rho \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}$

$$\rho(t) = \rho(0) \cdot e^{\alpha t} \quad \theta(t) = \theta(0) + \beta t$$

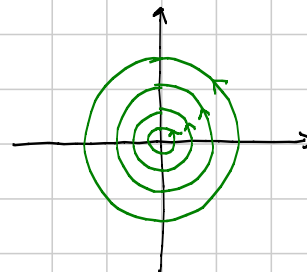
Tutto dipende dal segno di α



$\alpha > 0$
instabile



$\alpha < 0$
stabile



$\alpha = 0$
stabile in senso ①,
ma non in senso ②

— o — o —

Ragionamento energetico Prendiamo un sistema diagonale con autovalori $-\lambda < 0$ e $-\mu < 0$

$$\begin{cases} u' = -\lambda u \\ v' = -\mu v \end{cases} \quad E(t) = \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} v^2(t)$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= u(t) u'(t) + v(t) v'(t) \\ &= -\lambda u^2(t) - \mu v^2(t) \end{aligned}$$

Se $\lambda < 0$ e $\mu < 0$ so che $E'(t) \leq 0$. Questo porta stabilità nel senso ①. In realtà posso dire anche che

$$E'(t) \leq -\min\{\lambda, \mu\} E(t), \quad \text{cioè} \quad E'(t) \leq -c E(t).$$

Questo dice che $E(t)$ è una sottosoluzione di $y' = -cy$ quindi sta sotto la soluzione di questa equazione che parte con

Lo stesso dato iniziale, quindi $E(t) \leq E(0) e^{-ct}$.

Questo dà stabilità nei sensi ② e ③, e anzi dice che la convergenza all'origine è almeno esponenziale.

Esercizio Vedere cosa accade se i 2 autovalori sono > 0 .

I ragionamenti energetici valgono anche per sistemi NON LINEARI

$$u' = -3u + u^2 - v^3$$

$$v' = -2v - u^6$$

L'origine è un p.to stazionario.

Limitandoci alla parte lineare saprei tutto sulla stabilità

Ragionamento energetico: $E(t) = \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} v^2(t)$

$$\begin{aligned} E'(t) &= u(t) \cdot u'(t) + v(t) \cdot v'(t) \\ &= -3u^2 + u^3 - uv^3 - 2v^2 - u^6 v \\ &= -3u^2 - 2v^2 + (u^3 - uv^3 - u^6 v) \end{aligned}$$

Fatto misterioso: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno dell'origine in cui $|u^3 - uv^3 - u^6 v| \leq \varepsilon (u^2 + v^2)$

Per dim. formalmente, basta passare in coord. polari e ottenere che

$$| \rho^3 \cos^3 \theta - \rho^4 \dots - \rho^7 \dots | = \rho^2 \underbrace{| \rho \dots + \rho^2 \dots + \rho^3 \dots |}_{\leq \varepsilon \text{ se } \rho \text{ è piccolo}} \leq \varepsilon \rho^2$$

vera fino a quando sono abbastanza vicino all'origine

$$\begin{aligned} \text{Quindi } E'(t) &\leq -3u^2 - 2v^2 + \varepsilon (u^2 + v^2) \\ &\leq -(u^2 + v^2) \leq -E(t) \end{aligned}$$

qui vale la disug.

Fino che resto nel cerchio vale disug

Fino che vale disug ho $E' \leq -E$

Fino che $E' \leq -E$ ho che E decresce

Se E decresce non posso uscire dal cerchio



SSSUP 2011 - LEZIONE 26

Titolo nota

08/06/2011

Teorema di linearizzazione Supponiamo che l'origine sia un p.to stazionario per un sistema.

Allora vicino all'origine le traiettorie si comportano come le traiettorie del sistema linearizzato, TRANNE se siamo in presenza di autovalori con parte reale nulla.

[Idea: nei casi di autovalori con parte reale >0 o <0 tutti si può usare un ragionamento energetico. Il caso di segno diverso è più complicato].

Se il p.to non è l'origine, con una traslazione posso fare in modo che lo sia.

Esempio 1 (Pendolo smorzato)

$$u'' + u = 0 \quad \text{oscillatore armonico}$$

$$u'' + \sin u = 0 \quad \text{pendolo}$$

$$u'' + \oplus u' + \sin u = 0 \quad \text{pendolo smorzato}$$

segno giusto: l'attrito si oppone al moto.

Trasformo in sistema

$$u' = v$$

$$v' = u'' = -u' - \sin u = -v - \sin u$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -v - \sin u \end{cases}$$

L'origine è un p.to stazionario. Linearizzo il sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u - v + o(u) \end{cases}$$

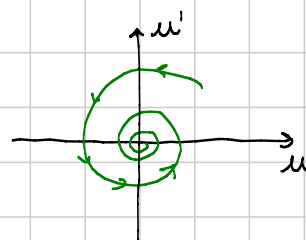
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S: -1 \quad P: 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta < 0$$

radici complesse coniugate con $\alpha = -\frac{1}{2} < 0$

Per il teo. di linearizzazione le soluzioni del pendolo vicino a $(0,0)$ si comportano allo stesso modo.



Il p.to $(u, v) = (\pi, 0)$ è pure lui stazionario.

Ponendo $u = \pi + w$ sposto il problema in $(w, v) = (0, 0)$

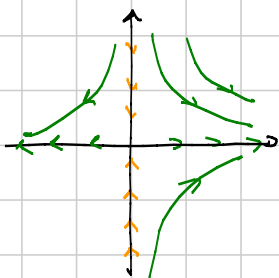
$$w' = u' = v$$

$$v' = -v - \sin u = -v - \sin(\pi + w) = -v + \sin w$$

Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = -v + \sin w \end{cases} \quad \text{linearizzo} \quad \begin{cases} w' = v \\ v' = w - v + o(w) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad S = -1 \quad P = -1 \Rightarrow 2 \text{ radici reali, una + e una -}$$



Parti reali degli autovalori $\neq 0$

$\Rightarrow$ posso usare teo. linearizzazione

$\Rightarrow$ vicino a $(\pi, 0)$ le traiettorie hanno lo stesso comportamento.

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$u' = u - 6uv$$

$$v' = -5v + 3uv$$

Modello PREDATOR-PREDATORE

"v mangia u"

v = leoni

u = pecore

Situazioni stazionarie: $(0, 0)$ oppure $(\frac{5}{3}, \frac{1}{6})$

Sono stabili?

Guardo $(0, 0)$: linearizzando ottengo $\begin{cases} u' = u \\ v' = -5v \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

L'origine è instabile (trauma in una direzione).

Vediamo $(\frac{5}{3}, \frac{1}{6})$. Pongo $u = \frac{5}{3} + z$ $v = \frac{1}{6} + w$

$$\begin{aligned} z' = u' &= u - 6uv = \frac{5}{3} + z - 6\left(\frac{5}{3} + z\right)\left(\frac{1}{6} + w\right) \\ &= \cancel{\frac{5}{3}} + \cancel{z} - \cancel{\frac{5}{3}} - \cancel{z} - 10w - 6zw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w' = v' &= -5v + 3uv = -\frac{5}{6} - 5w + 3\left(\frac{5}{3} + z\right)\left(\frac{1}{6} + w\right) \\ &= -\cancel{\frac{5}{6}} - 5w + \cancel{\frac{5}{6}} + \cancel{5w} + \frac{z}{2} + 3zw \end{aligned}$$

Sistema linearizzato: $z' = -10w$ $\begin{pmatrix} 0 & -10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$
 $w' = \frac{z}{2}$

S: 0 P: +5 $\Rightarrow$ radici immaginarie pure
 $\Rightarrow$ il linearizzato è così  ma questo non si conserva
 per passaggio al non-lineare.

Altro approccio: $\frac{du}{dt} = u - 6uv$ $\frac{dv}{dt} = -5v + 3uv$

"Quindi" $\frac{dv}{du} = \frac{-5v+3uv}{u-6uv} = \frac{v(-5+3u)}{u(1-6v)}$
 $\downarrow$ derivata della
 traiettoria

Ho derivato $v(u'(t)) \dots$

Ho ottenuto che $v' = \frac{-5+3u}{u} \frac{v}{1-6v}$

Quindi v , come funzione di u , risolve un'eq. a variabili separabili. Con questo sistema si può vedere che le traiettorie sono effettivamente curve chiuse.
 — o — o —

Esercizio $u' = u - 3uv$ Due specie in competizione
 $v' = 5v - 7uv$

Calcolare i p.ti stazionari e vedere che tipo di stabilità hanno.
 — o — o —

Esempio 3 Sistema $\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{5}{2}v - u + u^2 \end{cases}$

- ① Trovare p.ti stazionari: $(0,0)$ e $(1,0)$
- ② Studiarne la stabilità per linearizzazione:
 - $(0,0)$ 2 autov. positivi
 - $(1,0)$ un autov. + e un autov. -

- ③ Sarebbe bello avere una soluzione che parte da $(0,0)$ e arriva in $(1,0)$

$$\frac{dv}{du} = \frac{5}{2} - \frac{u(1-u)}{v}$$

equazione che posso studiare qualitativ.

- ④ Faccio lo studio con partenza da $\frac{1}{2}$
Ci sono soluzioni che uniscono
e altre che toccano e vanno su...
Quindi --- soglia---

- ⑤ Tutte le soluzioni che passano per
il tratto crescente di parabola tornando indietro vanno a
finire nell'origine.
Basta osservare che $v = 2u$ è sottosoluzione dell'equazione

