

GEOM. ANALITICA: CIRCONFERENZA

Dato un centro $C = (x_0, y_0)$ ed un raggio $R > 0$, la circ. di centro C e raggio R è il luogo dei p.ti P tali che $\text{dist}(P, C) = R$
 Posto $P = (x, y)$, l'eq. diventa

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Espandendo i quadrati diventa

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

Quindi se la vediamo scritta come

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

→ Se x^2 e y^2 hanno lo stesso coeff. posso sempre ridurmi a questa forma

allora

$$x_0 = -\frac{a}{2}$$

$$y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

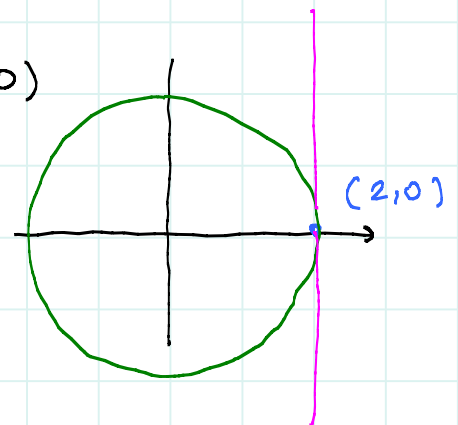
Questo deve essere > 0

ES 1 Centro in $(0, 0)$ e passante per $P = (2, 0)$

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \uparrow R^2$$

Retta tang. alla circ. in P : $x = 2$

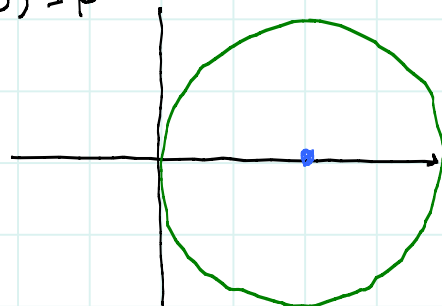
↑ retta per P e $\perp$ al raggio che passa per P



ES 2 Centro in $(2,0)$ e passante per $(0,0) = P$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \rightsquigarrow x^2 - 4x + y^2 = 0$$

↑ Quando passa per l'origine non c'è il termine noto

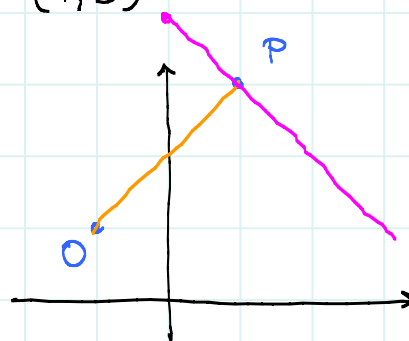


Retta tang. in P: $x=0$

Es 3 Centro $O = (-1, 1)$ e passa per $P = (1, 3)$

Gleichung: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$$



Retta tangente in P : $y = -x + 4$ (dal disegno $m = -1$ e $n = 4$)

Altra interpretazione: $y = 3 + m(x-1) \leftarrow$ retta generica per P

Impongo che l'intersezione con la circ. sia unica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \rightsquigarrow x^2 + [ux + (3-u)]^2 + 2x - 2[ux + (3-u)] - 6 = 0 \\ y = ux + (3-u) \end{cases}$$

→ uso formula per l'eq. di 2° grado e
impongo $\Delta = 0$

Verifichiamo che succede nel vostro caso

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (-x+4)^2 + 2x - 2(-x+4) - 6 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 + 2x + 2x - 8 - 6 = 0 \rightsquigarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\leadsto x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\leadsto (x-1)^2=0 \leadsto x=1 \quad \therefore$$

ES 4 $A = (5, 1)$ $B = (1, 4)$

→ Circ. di diametro AB

Centro $C = (3, \frac{5}{2})$

$$R^2 = \text{dist}^2(C, A) = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

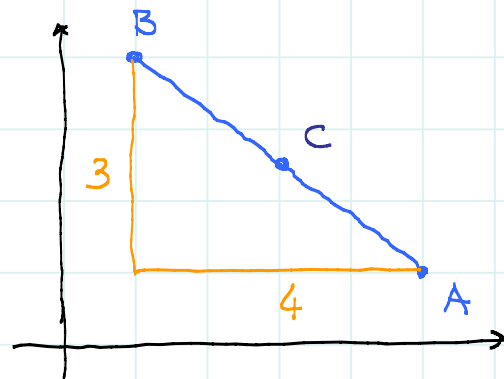
(Potrebbe fare $R = \frac{\text{dist}(A, B)}{2}$) $(x-3)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$

$$\leadsto x^2 - 6x + 9 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \leadsto x^2 + y^2 - 6x - 5y + 9 = 0$$

Retta tangente in A: $y = 1 + m(x-5) = 1 + \frac{4}{3}(x-5)$

→ forma implicita

↑ retta AB ha
coeff. ang. = $-\frac{3}{4}$

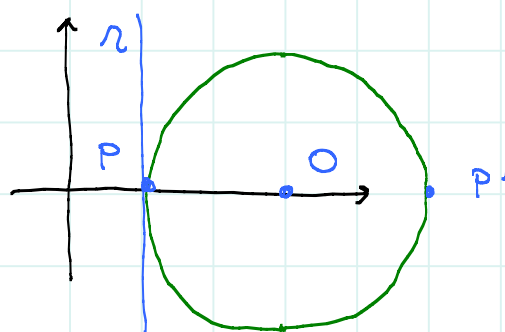


ES 5 $O = (3, 0)$ $r: x=1$

→ circ. per O e tang. ad r

$$(x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \leadsto \text{controlla}$$

→ retta tang. in P' : $x=5$



ES 6 $O = (2, 3)$ $r: 3x+y=5$

→ circ. per O e tang. ad r

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = R^2 \quad \text{dove } R = \text{dist}(O, r) = \frac{|6+3-5|}{\sqrt{9+1}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

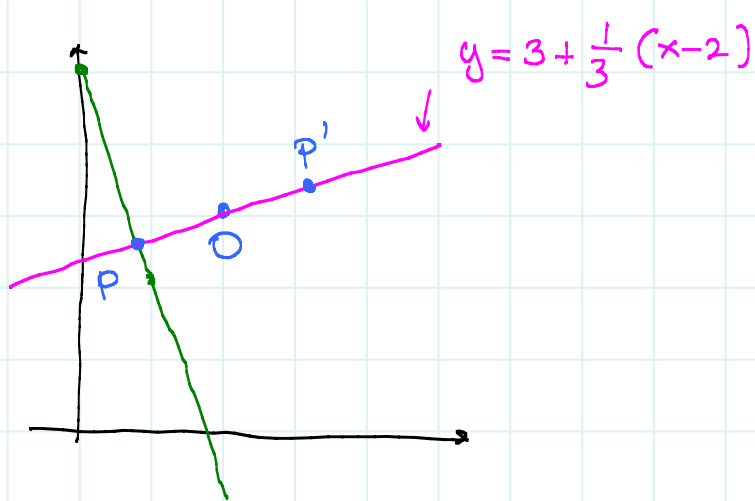
$$= \frac{8}{5}$$

→ per fare la tangente in P'

→ trovo P intersecando r con la $\perp$ passante per O

→ trovo P' in modo che il p.to medio di PP' sia O

→ retta per P' e $\parallel$ ad r



Es: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + a = 0$
 $\uparrow$ parametro

(1) Quando è davvero una circonferenza
1° modo uso formula per il raggio

2° modo Provo a completare i $\square$:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 + a = 0$$

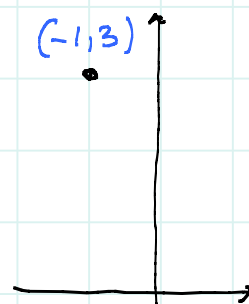
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + a - 10 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = \underline{10-a}$$

$= R^2$ e deve essere > 0

Quindi è una circ. se e solo se $a < 10$

Si vede anche che il centro è $(-1, 3)$



(2) Quando passa per l'origine? $\Leftrightarrow a = 0$

(3) Raggio = 4? $\Leftrightarrow 10 - a = 16 \Leftrightarrow a = -6$

(4) tangente all'asse x? $\Leftrightarrow R = 3 \Leftrightarrow 10 - a = 9 \Leftrightarrow a = 1$

(5) tangente a $x + 2y + 3 = 0$?

1° modo: metto a sistema e impiego $\Delta = 0$

2° modo: $R = \text{dist}(\text{centro}, \text{retta})$
 $\text{---} \quad \circ \quad \text{---} \quad \circ \quad \text{---}$