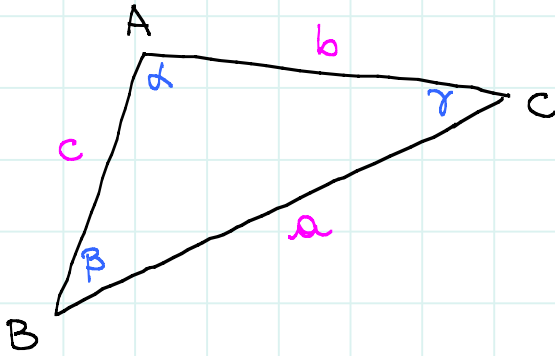


TRIGONOMETRIA E TRIANGOLI RETTANGOLI

Notazioni standard per un triangolo

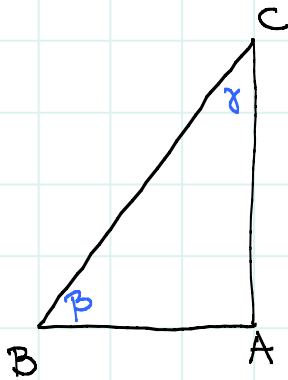


A, B, C $\rightsquigarrow$ vertici

α, β, γ $\rightsquigarrow$ angoli corrispondenti

a, b, c $\rightsquigarrow$ lunghezze dei lati opposti

Caso speciale: triangolo rettangolo in A



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Pitagora

[Se $BC = 1$, allora $AB = \cos \beta$, $AC = \sin \beta$]

Più in generale

$$AB = BC \cdot \cos \beta \quad AC = BC \cdot \sin \beta$$

A parole: cateto = ipotenusa $\cdot$ $\cos$ (angolo adiacente)
 = ipotenusa $\cdot$ $\sin$ (angolo opposto)

$$AB = BC \cdot \sin \gamma \quad AC = BC \cdot \cos \gamma$$

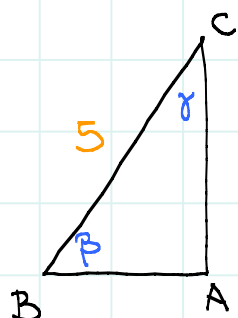
Oss. $\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$ quindi γ e β hanno $\sin$ e $\cos$ scambiati

$$\frac{AC}{AB} = \tan \beta$$

$$\frac{AB}{AC} = \tan \gamma$$

Fatto generale: noti due lati, oppure un lato e una funzione trigonometrica di un angolo, posso trovare tutto il resto.

AB	AC	BC	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$	$\tan \gamma$
3	4	5	$4/5$	$3/5$	$4/3$	$3/5$	$4/5$	$3/4$
3	$\sqrt{7}$	4	$\sqrt{7}/4$	$3/4$	$\sqrt{7}/3$	$3/4$	$\sqrt{7}/4$	$3/\sqrt{7}$
	3	4						



$$BC = 5 \quad \sin \beta = \frac{1}{3}$$

$$\leadsto \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

$$AC = BC \cdot \sin \beta = \frac{5}{3}$$

$$\tan \gamma = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{AB}{AC} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{5} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = 5 \quad \tan \beta = \frac{1}{3}$$

1° modo $\frac{AC}{AB} = \tan \beta = \frac{1}{3} \leadsto AB = 3AC$

$$AB^2 + AC^2 = 25 \leadsto 10AC^2 = 25 \leadsto AC^2 = \frac{25}{10} \leadsto AC = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

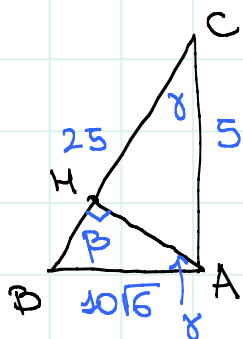
2° modo Ricordiamo che $1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}$

$$1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\leadsto \cos^2 \beta = \frac{9}{10} \leadsto \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} \leadsto \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$AC = 5 \cdot \sin \beta = \frac{5}{\sqrt{10}} \quad \ddot{\smile}$$

$$\text{NB} \quad \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$



$$AC = 5$$

$$\sin \beta = \frac{1}{5}$$

$$AC = BC \cdot \sin \beta \leadsto 5 = BC \cdot \frac{1}{5} \leadsto BC = 25$$

Pitagora $\leadsto$ AB

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta = 25 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 10\sqrt{6} \quad \therefore$$

Se volessi l'altezza AH?

1° modo: calcolo l'area e poi divido per BC $\leadsto AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

2° modo: guardando il triangolo HAB, rettangolo in H, scopriamo che $AH = AB \cdot \sin \beta$

$$= 10\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = 2\sqrt{6}$$

— o — o —

TRIANGOLO GENERALE

Tre scenari: $\rightarrow$ conosco i 3 lati

$\rightarrow$ conosco 2 lati e angolo compreso

$\rightarrow$ conosco 1 lato e gli angoli

Oss. Se conosco il sin di un angolo, ho incertezza tra 2 valori per l'angolo (uno acuto, uno ottuso)

Se conosco il cos, allora conosco l'angolo.

Due strumenti fondamentali

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

↑
raggio circ.
circoscritta

TEOREMA DEL COSENO

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (\text{e cicliche})$$

Scenario 1

Conosco i 3 lati

→ con il teorema del coseno trovo i 3 cos, e quindi i 3 angoli (se un cos viene negativo, c'è un angolo ottuso)

Scenario 2

Conosco 2 lati e l'angolo compreso

→ con il teorema del coseno trovo il terzo lato, e sono nello scenario precedente

Scenario 3

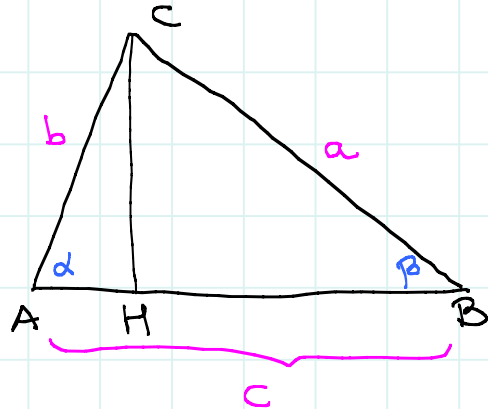
Conosco un lato e i due angoli adiacenti

In realtà conosco anche il terzo angolo, poi faccio il teorema dei seni.

Mi serve il sin del terzo angolo... supponiamo di sapere α e β , il terzo angolo è $\pi - (\alpha + \beta)$, quindi
 $\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$ = si calcola facilmente

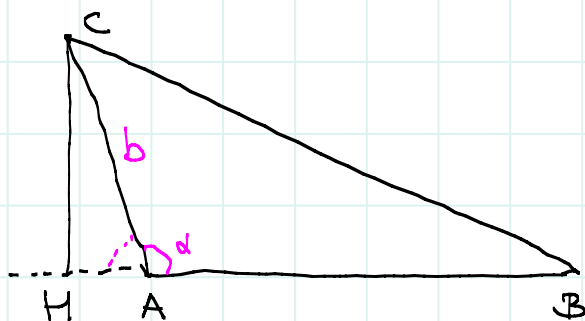
FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (\text{e cicliche})$$



$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} AB \cdot CH \\ &= \frac{1}{2} c \cdot b \sin \alpha \end{aligned}$$

Cosa succede se cambio α con $\pi - \alpha$?



L'altezza non cambia perché
 $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$

— 0 — 0 —