

Esercizio Se $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ e siamo nel 3° quadrante, quanto vale $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{25}} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

↑
siamo nel
3° quadrante

Se siamo nel 3° quadrante e $\tan \alpha = 7$, quanto valgono $\sin$ e $\cos$?

1° modo Imposto il sistema

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 7 & \Rightarrow \sin \alpha = 7 \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$49 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{50} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{50}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

↑
terzo quadr.

$$\sin \alpha = 7 \cos \alpha = -\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

2° modo $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Se conosco $\tan$, trovo $\cos$

Analogamente

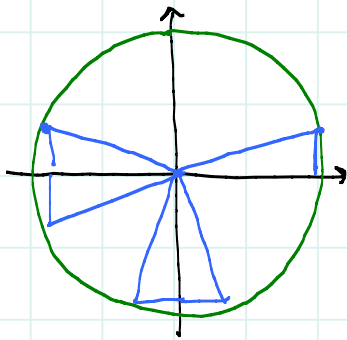
$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Esercizio

3 · 180
540 - 20
↑

$-\sin(200^\circ)$	$-\cos(-110^\circ)$	$\sin(20^\circ)$	$\cos(-70^\circ)$	$\sin(520^\circ)$	$-\cos(160^\circ)$
$\cos(179^\circ)$	$-\cos(181^\circ)$	$\sin(89^\circ)$	$\cos(359^\circ)$	$\cos(1^\circ)$	$\sin(91^\circ)$

In ogni riga ci sono 5 numeri uguali e 1 diverso



Riportare al 1° quadrante

$$\begin{aligned}\sin(263^\circ) &= -\sin 83^\circ \\ &= -\cos 7^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(129^\circ) &= -\cos(51^\circ) \\ &= -\sin(39^\circ)\end{aligned}$$

— o — o —

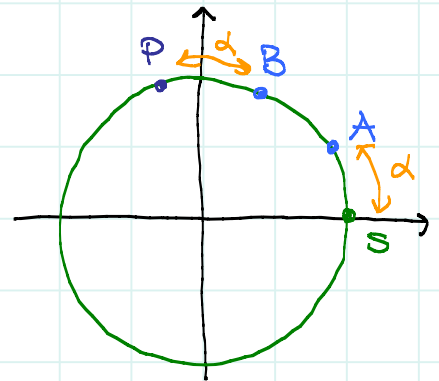
FORMULE DI ADDIZIONE - SOTTRAZIONE

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$



Idea della dim

Prendo $S = (1, 0)$, $A = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$B = (\cos \beta, \sin \beta)$, $P = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$

Imponiamo $PB^2 = AS^2$ e con qualche conto troviamo $\cos(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha + \beta)$.

NB: oltre alla relazione di sopra ho anche $\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) = 1$
... vedere che succede con i conti.

Oss. 1 Con $\alpha = \pi$ o $\frac{\pi}{2}$ vengono gli archi associati

Oss. 2 Così possiamo fare $\sin(15^\circ)$ e $\cos(15^\circ)$

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \dots\end{aligned}$$

Formule di duplicazione

(Mettere $\alpha = \beta$ in quelle di addizione)

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Esercizio

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1) \sin x \\ &= 4 \sin x \cos^2 x - \sin x\end{aligned}$$

Se da voglio di soli seni

$$\begin{aligned}&= 4 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x\end{aligned}$$

Formule product to sum

$$\cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Se sommo le due righe e poi divido per 2

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta)$$

Analogamente

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta)$$

Formule sum to product

$$\cos x + \cos y = ??$$

Riscrivo quella sopra come

Impongo

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{aligned} \alpha &= \frac{x+y}{2} \\ \beta &= \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \underbrace{(\alpha+\beta)}_x + \cos \underbrace{(\alpha-\beta)}_y = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

Come posso fare $\sin x + \cos y$?

Basta ricordare che $\sin x + \cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos y$
e usare la somma di 2 cos.

$\cos(80^\circ) = 1 - 2\sin^2(a)$	40°	$\cos(50^\circ) = 1 - 2\cos^2(a)$	65°
$2\cos(40^\circ) \cdot \cos(50^\circ) = \cos(a)$	10°	$2\sin(40^\circ) \cdot \sin(50^\circ) = \sin(a)$	50°

↑
In alternativa: product $\rightarrow$ sum

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \leadsto \quad x = 40^\circ$$

$$x = 25^\circ \quad \leadsto \quad \cos(50^\circ) = 1 - 2\underbrace{\sin^2(25^\circ)}_{\cos(65^\circ)} = 1 - 2\cos^2(65^\circ)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$x = 40^\circ \quad \leadsto \quad \sin(80^\circ) = 2\sin(40^\circ) \cdot \cos(40^\circ) = 2\sin(40^\circ)\sin(50^\circ)$$

$$2\cos(40^\circ) \cdot \cos(50^\circ) = 2\cos(40^\circ)\sin(40^\circ) = \sin(80^\circ) = \cos(10^\circ)$$

— o — o —