

LOGARITMI

$\log_a b$ = esponente a cui devo elevare a per ottenere b .

Detto altrimenti, se $a^x = b$ allora $x = \log_a b$

Si intende che

b = numero reale positivo

a = numero reale positivo $\neq 1$

In particolare

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_a (a^b) = b$$

PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a (b^c) = c \log_a b$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_a (b+c) = \text{nulla di furbo}$$

$$\log_a b \cdot \log_a c = \text{nulla di furbo}$$

Tutte le formule per i logaritmi seguono dalle corrispondenti formule per le potenze

Dim. della prima $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

Pongo $x = \log_a b$, $y = \log_a c$.

Per definizione $a^x = b$ e $a^y = c$. Ma allora

$$bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

↑
proprietà potenze

Ma allora $x+y$ è l'esponente al quale elevare a per ottenere bc , quindi

$$\log_a(bc) = x+y$$

Dim. terza Devo dim. che $\log_a(b^c) = c \log_a b$

Come prima pongo $x = \log_a b$, quindi $b = a^x$

Ma allora

$$b^c = (a^x)^c = a^{cx}$$

↑
proprietà potenze

Ma allora cx è l'esponente a cui elevare a per ottenere b^c .

Cambio di base Devo calcolare $\log_a b$, cioè risolvere $a^x = b$.

Faccio a dx e sx il log in base c :

$$\log_c(a^x) = \log_c b$$
$$= x \log_c a$$

Ora non resta che ricavare $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

— o — o —

Casi speciali:

$$\log_a a = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$a^0 = 1$$

Esercizi ① $\log_2 16 = a$

$$\log_2 a = 3$$

$$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$$

$$\log_2 a = 3 \leadsto a = 8$$

$$\log_2 2^3 = 3$$

② $\log_a 4 = 2 \quad a = 2$

$\log_3 (2^4) = a \log_3 2 \quad a = 4$

$$\log_2 (2^2) = 2$$

③ $\log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2$

$\log_3 \sqrt{2} = \log_3 (2^{\frac{1}{2}})$

$$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 (2^{13}) = 13$$

④ $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 a$

$$a = 80$$

prodotto

$$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 a$$

$$a = 5$$

divisione

⑤ $\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 a$

$$a = \frac{3}{2}$$

Divisione

$$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$\log_2 a = 6 \leadsto a = 2^6 = 64$$

⑥ $2^{\log_2 a} = 9$

$$a = 9$$

$$\log_2 (2^a) = 9$$

$$a = 9$$

⑦ $2^{\log_4 a} = 9$

$$\log_2 (4^a) = 9$$

$\log_2 (4^a) = 9 \leadsto a \cdot \log_2 4 = 9 \leadsto 2a = 9 \leadsto a = \frac{9}{2}$

$2^{\log_4 a} = 9 \leadsto$ Faccio $\log_4$ a dx e sx

$\log_4 (2^{\log_4 a}) = \log_4 9 \leadsto \log_4 a \cdot \log_4 2 = \log_4 9$

$$\leadsto \left(\frac{1}{2}\right) \log_4 a = \log_4 9 \leadsto \log_4 \sqrt{a} = \log_4 9 \leadsto \sqrt{a} = 9 \\ \leadsto a = 81 \quad \checkmark$$

Alternativa: faccio $\log_2$ a dx e sx:

$$\log_2 (2^{\log_4 a}) = \log_2 9 \leadsto \log_4 a \cdot \log_2 2 = \log_2 9$$

$\leadsto \log_4 a = \log_2 9 \leadsto$ con il cambio base vado in una base comune

$$\textcircled{8} \quad 2^{\log_a 3} = 2 \qquad \log_2 (\log_3 a) = 2$$

$$2^{\log_a 3} = 2^1 \leadsto \log_a 3 = 1 \leadsto a = 3$$

$$\log_2 (\log_3 a) = 2 = \log_2 4 \leadsto \log_3 a = 4 \leadsto a = 3^4 = 81$$

$$\textcircled{9} \quad \log_3 9 = \log_2 a \\ \underset{2}{\parallel} \leadsto a = 4$$

$$\log_3 9 = \log_a 25 \\ \underset{2}{\parallel} \leadsto a = 5$$

$$\textcircled{10} \quad \log_3 \sqrt{2} = a \cdot \log_3 4$$

↓

Porto dentro a: $\sqrt{2} = 4^a$

$$\leadsto 2^{1/2} = 2^{2a} \leadsto a = \frac{1}{4}$$

$$\log_5 3^{1000} = \log_{25} a^{1000}$$

$$\cancel{1000} \cdot \log_5 3 = \cancel{1000} \cdot \log_{25} a$$

$$\log_5 3 = \frac{\log_5 a}{\log_5 25}$$

↑
cambio
base

$$= \frac{1}{2} \log_5 a = \log_5 \sqrt{a}$$

$$\leadsto \sqrt{a} = 3 \leadsto a = 9$$

Alternativa: porto fuori esponenti

$$\frac{1}{2} \log_5 2 = 2a \log_5 2$$

$$\text{Alternativa} \quad \underset{25}{25}^{\log_5 3} = \underset{25}{25}^{\log_{25} a} = a$$

$$(5^2)^{\log_5 3} = 5^{2 \log_5 3} = 5^{\log_5 9} = 9$$

$$(12) \log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a$$

$$a = 13$$

↓
porto in base 5

$$\frac{\log_5 13}{\log_5 7} \cdot \log_5 7$$

$$\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a \quad \leadsto \text{andiamo in base 2}$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a \quad \leadsto \frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{2 \cdot \log_2 7}{3} = \log_2 a$$

$$\leadsto \frac{2}{3} \log_2 3 = \log_2 a \quad \leadsto \log_2 3^{2/3} = \log_2 a$$

$$\leadsto a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$$

$$(11) \log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a \quad \leadsto \text{andiamo in base 7}$$

$$1000 \cdot \log_7 2 = \frac{\log_7 2^a}{\log_7 49} = \frac{1}{2} \log_7 2^a$$

$$\log_7 2^a = 2000 \log_7 2 = \log_7 2^{2000} \quad \leadsto a = 2000$$