

Schema generale con potenze grandi (k intero)

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{espressione}}}{[\text{Mostro}]}^k \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero}}}{A}$$

$$[\text{Mostro}]^k \leq A$$

$$\boxed{k \text{ dispari}} \quad \text{Mostro} \geq A^{\frac{1}{k}} \quad \text{Mostro} \leq A^{\frac{1}{k}}$$

$\boxed{k \text{ pari}}$ Se $A < 0$ la prima è sempre verificata, la seconda mai
 Se $A = 0$ " , la seconda
 solo se Mostro = 0

Se $A > 0$ la seconda è verificata se e solo se

$$-A^{\frac{1}{k}} \leq \text{Mostro} \leq A^{\frac{1}{k}}$$

la prima per i corrispondenti valori estremi.

[Volendo tutti i casi si dimostrano per fattorizzazione]

Esempio 1 $\frac{(x+6)^3}{x+1} \leq 0$

$[-6, -1)$

	-6	-1	
Num	---	+	+
Den	---	+	+
Frazione	+	-	+

Esempio 2 $x^7 + 3 \geq 0 \quad x^7 \geq -3 \quad \leadsto x \geq (-3)^{\frac{1}{7}} = -\sqrt[7]{3}$

Stessa cosa con la fattorizzazione: per semplicità sia $a = \sqrt[7]{3}$

$$x^7 + 3 = x^7 + a^7 = (x+a) \underbrace{(x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6)}_{\text{sarebbe bello se fosse sempre } > 0}$$

Esempio 3

$$(x^5 + 7)^{70} (x^7 + 5)^{60} \leq 0$$

È tutta roba > 0 o nulla. L'unica caso buono è quando è nulla, cioè

$$x = -\sqrt[5]{7}$$

$$x = -\sqrt[7]{5}$$

Esempio 4

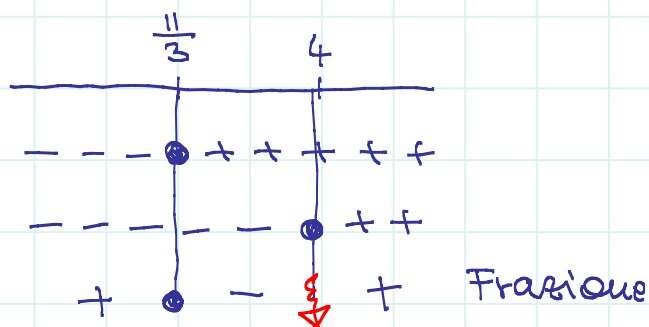
$$\frac{1}{x-4} \geq -3$$

Non pensare nemmeno di moltiplicare per $x-4$!!

Infatti a seconda del suo segno dovrei cambiare o no il verso.

SLOGAN: portare tutto dalla stessa parte!

$$\frac{1}{x-4} + 3 \geq 0 \rightsquigarrow \frac{1+3x-12}{x-4} \geq 0 \rightsquigarrow \frac{3x-11}{x-4} \geq 0$$



Soluzione:

$$(-\infty, \frac{11}{3}] \cup (4, +\infty)$$

2° modo: VOGLIO MOLTIPLICARE

$$\begin{cases} x-4 > 0 \\ 1 \geq -3x+12 \end{cases}$$

↑
moltiplico e
conservo i versi

$$\begin{cases} x-4 < 0 \\ 1 \leq -3x+12 \end{cases}$$

↑
moltiplico e
cambio i versi

$$\boxed{1^\circ \text{ sistema}} \quad x > 4$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \geq \frac{11}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x \leq \frac{11}{3} \end{cases}$$

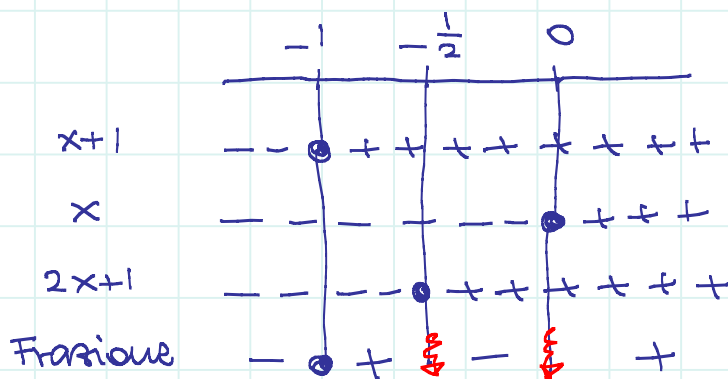
$$\boxed{2^\circ \text{ sistema}} \quad x \leq \frac{11}{3}$$

Esempio 5

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{2x+1}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+1} > 0 \rightsquigarrow \frac{2x+1-x}{x(2x+1)} > 0 \rightsquigarrow \frac{x+1}{x(2x+1)} > 0$$

$$(-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$$



Esempio 6

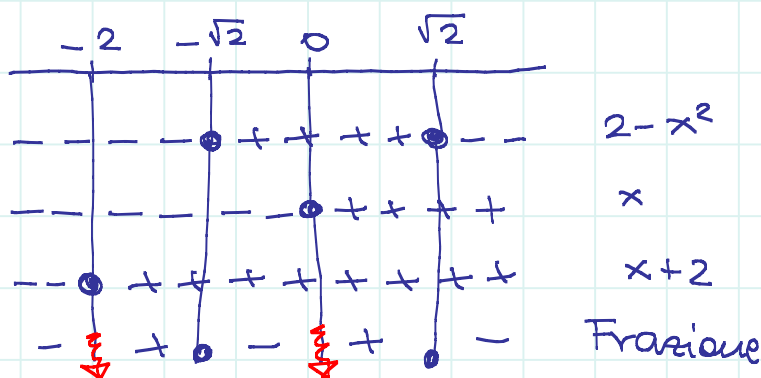
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x+2+x-x^2-2x}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2-x^2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$(-2, -\sqrt{2}] \cup (0, \sqrt{2}]$$



Esempio 7

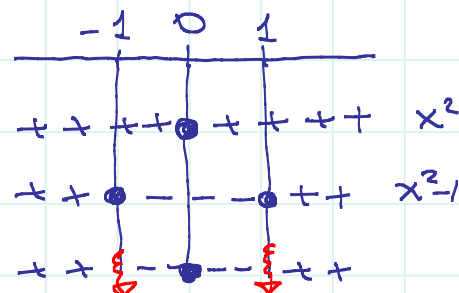
$$\frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x^2}{x-1}$$

Se tolgo gli x^2 , rischio di perdere $x=0$, che è una soluzione

$$\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x-1} \leq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2(x-1)-x^2(x+1)}{x^2-1} \leq 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{-2x^2}{x^2-1} \leq 0 \rightsquigarrow \frac{x^2}{x^2-1} \geq 0$$

↑
tolgo -2 e
cambio il
verso
(quindi moltiplico
per $-\frac{1}{2} < 0$)



La risposta è

$$(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, +\infty)$$

↑ togliendo x^2 si perdeva
la soluzione

Esempio 8 $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^3}$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \leq 0$$

$$[0, 1]$$

$$\frac{x-1}{x^3} \leq 0$$

