

DISEQUAZIONI CON PRODOTTI E QUOZIENTI

Obiettivo : studiare il segno di espressioni del tipo

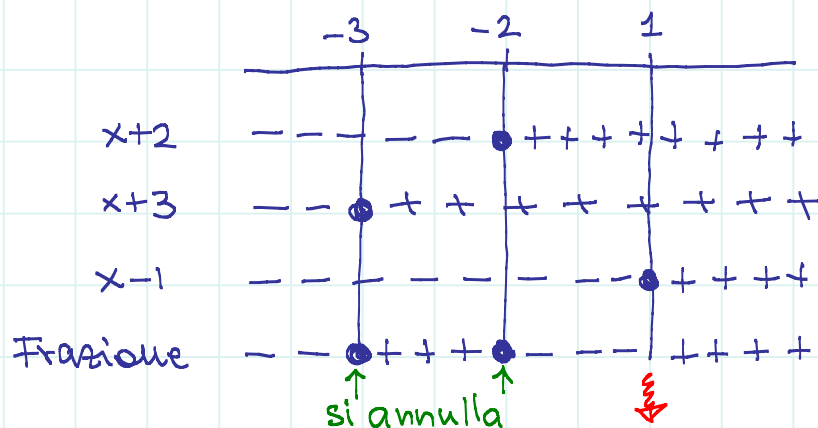
$$f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)$$

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_m(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_k(x)}$$

Metodo generale : studiare separatamente il segno dei diversi fattori, e poi trarre le conclusioni con la regola dei segni.

Esempio 1 $\frac{(x+2)(x+3)}{x-1} \leq 0$

In una prima fase ignoro la richiesta ≤ 0 e studio il segno in generale.



Ora, e solo ora, guardo la richiesta ≤ 0 e rispondo

$$(-\infty, -3] \cup [-2, 1) \quad \uparrow \text{escluso}$$

Esempio 2 $\frac{x+2}{x^2+1} > 0$
sempre > 0

Quindi è come se fosse $x+2 > 0 \leadsto x > -2$ $(-2, +\infty)$

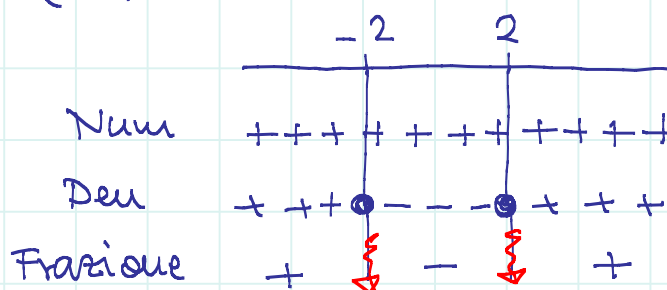
Esempio 3 $\frac{x^2+3}{x^2-4} \leq 0$

Numeratore sempre > 0 , quindi è come se fosse $x^2-4 \leq 0$

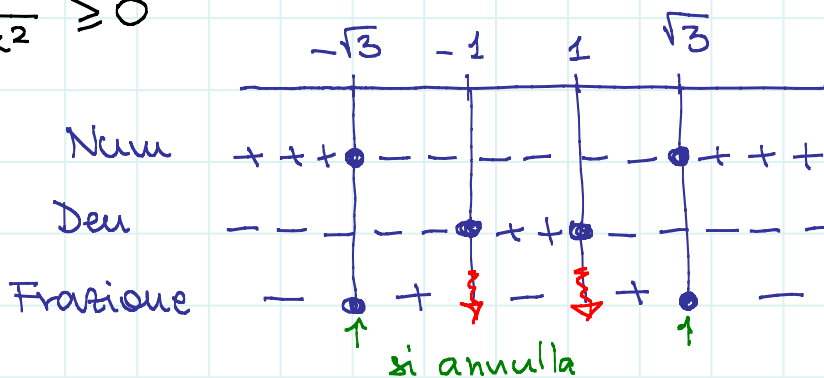
Radici: $\pm 2 \leadsto$ valori interni $[-2, 2]$

no! Agli estremi si annulla il denominatore

La soluzione vera è $(-2, 2)$



Esempio 4 $\frac{x^2-3}{1-x^2} \geq 0$



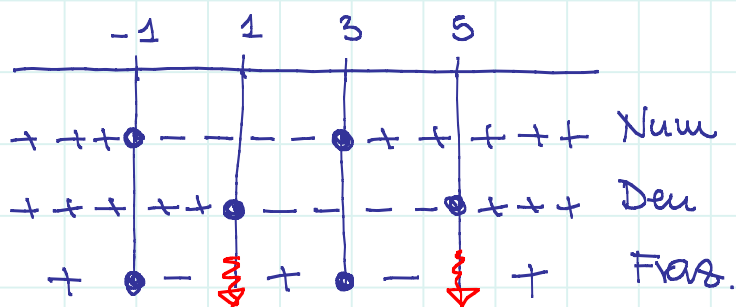
Soluzioni: $[-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}]$

Esempio 5 $\frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+5} \leq 0$

$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$

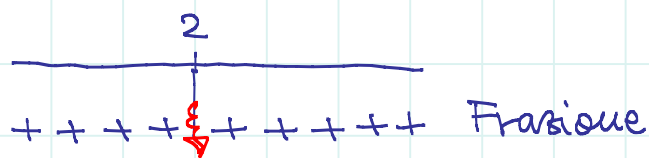
$x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)$

$[-1, 1) \cup [3, 5)$

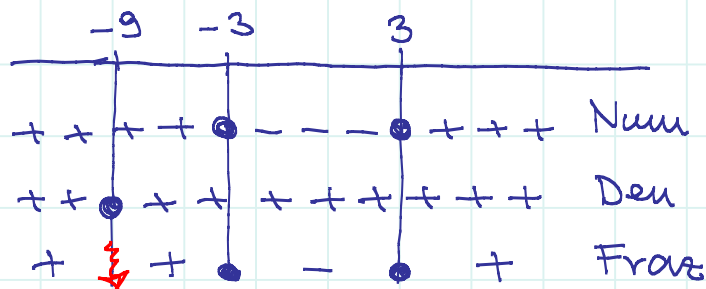


Esempio 6 $\frac{(x^2+4)(x^2+3)}{(x-2)^2} \geq 0$

$x \neq 2$
 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$



Esempio 7 $\frac{x^2-9}{(x+9)^2} \geq 0$



Soluzioni: $(-\infty, -9) \cup (-9, -3] \cup [3, +\infty)$

Esempio 8 $(x+2)^3 \geq 0$

Esponente dispari: $A^3 \geq 0 \Leftrightarrow A \geq 0$

È come dire $x+2 > 0 \leadsto x > -2$

$(x+2)^{30} \geq 0 \leadsto$ esponente pari $\leadsto$ sempre ≥ 0 $\mathbb{R}$

$\frac{1}{(x+2)^{30}} \geq 0 \leadsto x \neq -2$

$\frac{1}{(x+2)^{30}} > 0 \leadsto x \neq -2$

$\frac{1}{(x+2)^{33}} \geq 0 \leadsto x+2 > 0 \leadsto x > -2$
 (in $x = -2$ c'è il fulmine)

$\frac{1}{(x+2)^{33}} > 0 \leadsto x+2 > 0 \leadsto x > -2$

Esempio 9

$$x^4 - 3 \leq 0$$

Fatto generale: x^k con k pari positivo è "una specie di parabola"

→ valori interni all'intervallo delle radici $-\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$

2° modo $x^4 - 3 = \underbrace{(x^2 + \sqrt{3})}_{\text{sempre } > 0} (x^2 - \sqrt{3})$

Quindi il segno di $x^4 - 3$ è lo stesso di $x^2 - \sqrt{3}$, quindi ≤ 0 per valori interni all'intervallo delle radici che sono

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{3}} = \pm \sqrt[4]{3}$$

Con $x^8 - 3$ era uguale, se usi che cambia l'indice della radice

$$x^8 - 3 = (x^4 + \sqrt{3})(x^4 - \sqrt{3}) = \underbrace{(x^4 + \sqrt{3})}_{> 0} \underbrace{(x^2 + \sqrt[4]{3})}_{> 0} (x^2 - \sqrt[4]{3})$$

Con $x^6 - 3$ viene

$$\begin{aligned} x^6 - 3 &= (x^3 + \sqrt{3})(x^3 - \sqrt{3}) \\ &= (x^2 - \sqrt[3]{3}) \underbrace{(x^4 + x^2 \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})}_{\text{tutto } > 0} \end{aligned}$$

↑
il segno dipende solo da questo
— 0 — 0 —

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A = x^2 \quad B = \sqrt[3]{x}$$