

EQUAZIONI DI PRIMO / SECONDO GRADO E RICONDUCEBILI

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad -x-3 &= 0 \quad \leadsto x = -3 \\ 2x-8 &= 0 \quad \leadsto 2x=8 \quad \leadsto x=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad 2x^2-8x &= 0 \quad 2x^2=8x \quad \leadsto x^2=4x \quad \leadsto x=4 \quad \text{NO!} \\ \leadsto x^2-4x &= 0 \quad \leadsto x(x-4)=0 \quad \leadsto x=0 \quad \leadsto x=0 \\ &\quad \leadsto x-4=0 \quad \leadsto x=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad x^2-7x+12 &= 0 \quad \leadsto (x-3)(x-4)=0 \quad \leadsto x=3 \text{ opp. } x=4 \\ 2x^2+5x-3 &= 0 \quad \leadsto x^2+\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0 \end{aligned}$$

$$\text{Somma} = -\frac{5}{2} \quad \text{Prodotto} = -\frac{3}{2} \quad x = -3 \text{ e } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alternativa} \quad x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{12}{4} = -3 \end{cases} \quad \therefore$$

$$\textcircled{4} \quad -4x^2+12x-9=0 \quad \leadsto 4x^2-12x+9=0 \quad \leadsto (2x-3)^2 \quad \leadsto x=\frac{3}{2}$$

Radice di molteplicità 2 $\leadsto$ discriminante = 0

$$\begin{aligned} x^2-4x+2025 &= 0 \quad x = 2 \pm \sqrt{4-2025} \\ &\leadsto \text{nessuna radice reale} \end{aligned}$$

Eq. di 2° grado

$$ax^2+bx+c=0$$

$$a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Versione ridotta

$$ax^2 + 2\beta x + c = 0$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$$

Dim

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightsquigarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\rightsquigarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$\rightsquigarrow$ faccio la radice e poi ricavo x

$$\textcircled{5} \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 2 \\ \rightsquigarrow x^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow x = \pm 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{array}} \right\} 4 \text{ soluzioni}$$

$$\textcircled{6} \quad x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{array}{ll} \rightsquigarrow x^2 + 4 = 0 & \rightsquigarrow x^2 - 1 = 0 \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{nulla in } \mathbb{R} & \underline{x = \pm 1} \\ & 2 \text{ soluz. reali} \end{array}$$

$$\textcircled{7} \quad x^4 - 3x^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2(x^2 - 3) \\ \downarrow \rightsquigarrow \underline{x = 0 \quad x = \pm \sqrt{3}} \\ 3 \text{ radici reali} \end{array}$$

(di cui una di molteplicità 2)

$$(8) \quad x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = 0$$

$x = \pm\sqrt{2}$ (ciascuna delle 2 ha molteplicità 2)

$$(9) \quad (x^4 + 1)(x^2 + 2x) = 0$$

↑
non si annulla

$$\leadsto x(x+2) = 0$$

$$\leadsto x = 0 \text{ e } x = -2$$

$$(10) \quad x^6 + 5x^3 + 6 = 0$$

$$(x^3 + 2)(x^3 + 3) = 0$$

$$\leadsto x^3 + 2 = 0 \quad \leadsto x^3 = -2 \quad \leadsto x = -\sqrt[3]{2}$$

$$\leadsto x^3 + 3 = 0 \quad \leadsto x^3 = -3 \quad \leadsto x = -\sqrt[3]{3}$$

Fattorizzare $x^3 + 2$

$$x^3 + 2 = (x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$$

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a = x \quad b = \sqrt[3]{2}$$

$$(11) \quad x^3 - 2x + 1 = 0$$

Si vede ad occhio la radice $x = 1$. Ruffini: posso dividere per $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x + 1 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 - 2x + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -x + 1 & \\ x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{Quindi } x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$$

$$\sqrt{x - 1} = 0 \leadsto x = 1$$

$$\leadsto x^2 + x - 1 = 0 \leadsto x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Quindi 3 radici reali

$$(12) \quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

Possibili radici razionali: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Se uno di questi è radice, divido e scendo di grado

Altrimenti ☹ non è più percorso

FATTO GENERALE (Criterio della radice razionale)

Se un polinomio $P(x)$ a coeff. interi ha una radice razionale $\frac{m}{n}$ con m ed n interi (già semplificata) allora

→ m divide il termine noto

→ n divide il coeff. del termine di grado max.

Nell'esempio le radici sono $-1, 2, +3$.

⑬ $x^{100} + x^2 + 1 = 0$ è sempre ≥ 1 per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi
NO radici reali

⑭ $x^4 - x^3 + 1 = 0$ Le uniche razionali possibili sono ± 1
e non vanno bene $\therefore$

Dico che non ha radici reali.

1° modo Può essere $x \leq 0$? NO, perché $P(x) \geq 1$ per ogni $x \leq 0$
Può essere $x \geq 1$? NO, perché

$$x^4 - x^3 + 1 = \underbrace{x^3}_{+} \underbrace{(x-1)}_{\geq 0} + 1 \geq 1 \text{ per ogni } x \geq 1$$

Può essere $x \in (0, 1)$? NO, perché $x^4 + (1 - x^3) \geq x^4 > 0$
 $= x^4 + \underbrace{(1-x)}_{+} \underbrace{(1+x+x^2)}_{+}$

In realtà non c'è un secondo modo immediato

— 0 — 0 —