

DIVISIONE DI POLINOMI

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$,
esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$
tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 quoziente resto

e $\deg(R(x)) < \deg(B(x))$

I polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ si calcolano con la divisione di polinomi

CASO SPECIALE: TEOREMA DI RUFFINI

Se $B(x) = (x-a)$, allora (il resto avrà grado 0, quindi sarà
un numero, e questo numero è $A(a)$)

$$A(x) = (x-a)Q(x) + A(a)$$

Dim. Per le proprietà della divisione deve essere

$$A(x) = (x-a) \cdot Q(x) + \text{numero}$$

$\uparrow$
 pol. di grado 0

Sostituendo $x = a$ trovo numero = $A(a)$

Conseguenza: se $P(a) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per $x-a$

Morale: trovare le radici e fattorizzare sono parenti.

Esercizi sulla divisione

① Dividere $x^4 + 3x^3 + 1$ per $x^2 - 2$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x^3 + 1 & x^2 - 2 \\
 \underline{-x^4 + 2x^2} & \underline{x^2 + 3x + 2} \\
 3x^3 + 2x^2 + 1 & \text{Q(x)} \\
 \underline{-3x^3 + 6x} & \\
 2x^2 + 6x + 1 & \\
 \underline{-2x^2 + 4} & \\
 6x + 5 & \\
 \text{R(x)} &
 \end{array}$$

Se ho fatto bene i conti:

$$(x^4 + 3x^3 + 1) = (x^2 - 2)(x^2 + 3x + 2) + 6x + 5$$

↑ verificare moltiplicando

② $x^4 + 3x + 7$ diviso $x^2 + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 3x + 7 & x^2 + 1 \\
 \underline{-x^4 - x^2} & \underline{x^2 - 1} \\
 -x^2 + 3x + 7 & \\
 \underline{x^2 + 1} & \\
 3x + 8 &
 \end{array}$$

[Riascoltare tra 2 mesi]

Questo vuol dire che $x^4 + 3x + 7 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 3x + 8$

③ $x^4 + 3x + 7$ diviso $x + 2$ Quanto fa il resto?

Fa 17! RUFFINI: $\underline{x^4 + 3x + 7} = (x + 2)Q(x) + A(-2)$
A(x)

1 $x^2 - 1$ diviso $x + 1$

$$(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1) + 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$

2 $x^4 - 1$ diviso $x + 1$

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= \underbrace{(x^2 + 1)(x - 1)}_{\mathbb{Q}(x)}(x + 1)$$

3 $x^4 + 1$ diviso $x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 + 1 \mid x^2 + 1 \\ -x^4 - x^2 \quad \underline{x^2 - 1} \\ \hline -x^2 + 1 \quad \uparrow \mathbb{Q} \\ x^2 + 1 \\ \hline 2 \leftarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$$(x^4 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + 2$$

4 $x^3 + 1$ diviso $x + 1$

$$x^3 + 1 = (x + 1) \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\mathbb{Q}} + \underbrace{0}_{\mathbb{R}}$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

e così via su tutti i gradi dispari

Con gli esponenti pari funziona solo quella con il segno -

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Esercizio: provare a moltiplicare bovinamente

$$x^2 + 1$$

$$x^4 + 1 \quad \leadsto \text{NULLA DI FURBO}$$

$$x^6 + 1$$

5 $x^5 + 1$ diviso $x^3 + 2x^2$

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 1 \\
 - x^5 - 2x^4 \\
 \hline
 -2x^4 + 1 \\
 + 2x^4 + 4x^3 \\
 \hline
 4x^3 + 1 \\
 - 4x^3 - 8x^2 \\
 \hline
 -8x^2 + 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

$Q(x)$

$R(x)$

~ FARE LA VERIFICA

6 $x^6 - 1$ diviso $x - 1$

$x^2 - 1$

$x^3 - 1$

$x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ $\leadsto$ scomposizioni sopra

$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

$A = x^2$ e $B = 1$

$x^{2025} - 1$ diviso $x^{405} - 1$... $y = x^{405}$

$$\begin{array}{l}
 x^{2025} - 1 = (x^{405} - 1)(x^{1620} + x^{1215} + x^{810} + x^{405} + 1) \\
 y^5 - 1 = (y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)
 \end{array}$$

7 $3x^6 + 2x^4$ diviso $x^3 - 3x^2$

$$\begin{array}{r}
 3x^6 + 2x^4 \\
 - 3x^6 + 9x^5 \\
 \hline
 9x^5 + 2x^4 \\
 - 9x^5 + 27x^4 \\
 \hline
 29x^4 \\
 - 29x^4 + 87x^3 \\
 \hline
 87x^3 \\
 - 87x^3 + 261x^2 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 3x^3 + 9x^2 + 29x + 87 \\
 \hline
 \end{array}$$

$Q(x)$

$R(x)$

Potero raccogliere x^2
ovunque e poi
moltiplicare alla fine