

# **Precorso di Matematica 2009**

**Stampato integrale delle lezioni**

Massimo Gobbino



# Indice

|                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Lezione 1.</b> Potenze e radici: esercizi . . . . .                                                                | 4  |
| <b>Lezione 2.</b> Potenze e logaritmi: esercizi . . . . .                                                             | 9  |
| <b>Lezione 3.</b> Disequazioni di primo e secondo grado e con prodotti e quozienti: esercizi .                        | 14 |
| <b>Lezione 4.</b> Disequazioni fratte, sistemi di disequazioni e disequazioni con esponenziali:<br>esercizi . . . . . | 21 |
| <b>Lezione 5.</b> Disequazioni logaritmiche: esercizi . . . . .                                                       | 30 |
| <b>Lezione 6.</b> Disequazioni con potenze e valori assoluti: esercizi . . . . .                                      | 35 |
| <b>Lezione 7.</b> Trigonometria ed equazioni trigonometriche: esercizi . . . . .                                      | 40 |
| <b>Lezione 8.</b> Trigonometria, triangoli rettangoli e disequazioni trigonometriche: esercizi                        | 45 |
| <b>Lezione 9.</b> Equazioni della retta e della circonferenza: esercizi . . . . .                                     | 50 |
| <b>Lezione 10.</b> Insiemi del piano descritti mediante disequazioni: esercizi . . . . .                              | 57 |

## PRECORSO 2009

## 1.1

Titolo nota

21/09/2009

Esercizi su potenze - radici - logaritmi

①  $x = 10^{100}$ . Quanto fa  $\frac{x}{100}$ . Ridurre tutto in base 10

$$\frac{x}{100} = \frac{10^{100}}{10^2} = 10^{98} \quad \left( \text{Applico } \begin{array}{l} A^x : A^y = A^{x-y} \\ A^x \cdot A^y = A^{x+y} \end{array} \right)$$

$$\text{Quanto fa } \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = (10^{100})^{\frac{1}{2}} = 10^{100 \cdot \frac{1}{2}} = 10^{50}$$

$$\left( \text{Ho applicato la potenza di potenza: } (A^x)^y = A^{xy} \right)$$

$$\text{Attenzione: } 2^{\binom{2}{3}} = 2^9; \quad (2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$$

$$x^5 = (10^{100})^5 = 10^{100 \cdot 5} = 10^{500} = 100^a \quad \text{Quanto vale } a?$$

$$\text{Mi riduco alla stessa base: } 10^{500} = (10^2)^a = 10^{2a}$$

$$2a = 500, \text{ quindi } a = 250. \quad 10^{500} = 100^{250}$$

$$\text{② } 1000^{1000} = 100^a. \text{ Vado in base 10: } (10^3)^{1000} = (10^2)^a$$

$$10^{3000} = 10^{2a}, \quad 2a = 3000, \quad a = 1500$$

$$\text{③ } 1000^a = \frac{1}{100}, \quad (10^3)^a = 10^{-2}, \quad 10^{3a} = 10^{-2}, \quad a = -\frac{2}{3}$$

$$\text{In generale } A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p} \quad 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$$

$$10^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$\text{④ } 100^{100} + 100^{101} = 100^{201} \text{ NO!!! } (A^x + A^y \neq A^{x+y})$$

$$= 101 \cdot 100^{100}$$

$$100^{100} + 100^{101} = 100^{100} + 100 \cdot 100^{100} = 100^{100} (1 + 100) = 101 \cdot 100^{100}$$

$$\text{CANE} + 100 \cdot \text{CANE}$$

$$= 101 \cdot \text{CANE}$$

$$\textcircled{5} \quad a^{3/2} = 27$$

$$a = 27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2 = 9$$

$$a = 9$$

$$9^{3/2} = 27$$

$a^b = c$  se voglio a elevo dx e sx alla  $\frac{1}{b}$

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = c^{\frac{1}{b}}, \quad a^{b \cdot \frac{1}{b}} = c^{\frac{1}{b}}, \quad a = c^{\frac{1}{b}}$$

Se invece voglio b, allora  $b = \log_a c$

definizione di logaritmo

$$\textcircled{6} \quad a^{-1/2} = \frac{1}{4}$$

$$a^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{Quindi} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{4}, \quad \sqrt{a} = 4, \quad a = 16$$

In alternativa; elevo tutto alla -2

$$(a^{-1/2})^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \quad a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = (2^{-2})^{-2} = 2^4 = 16$$

$$\textcircled{7} \quad 8^a = 4 \quad \text{Vado in base 2: } (2^3)^a = 2^2, \quad 2^{3a} = 2^2, \quad 3a = 2, \quad a = \frac{2}{3}$$

In alternativa: faccio a dx e sx il log in base 2:

$$\log_2 (8^a) = \log_2 4$$

$$a \log_2 8 = \log_2 4$$

$$a \cdot 3 = 2 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

[Proprietà dei logaritmi:  $\log_a B^c = c \log_a B$ ]

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$$

$$\textcircled{8} \quad 2^{20} - 2^{19} = 2^a$$

$$2^{20} = 2 \cdot 2^{19}, \quad \text{quindi} \quad 2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19} \quad (a = 19)$$

$$2^{20} - 2^{19} = 2^{20-19} = 2^1 \quad \text{NO!!!!}$$

$$\textcircled{9} \quad 2^{20} - 2^{18} = 2^2 \cdot 2^{18} - 2^{18} = 4 \cdot 2^{18} - 2^{18} = 3 \cdot 2^{18}$$

Proprietà potenze:  $A^x \cdot B^x = (AB)^x$

$$\textcircled{10} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\textcircled{11} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{a} \quad \text{1° modo: } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = \sqrt[4]{a}; \quad 6^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$$

Elevo alla 4ª:

$$(6^{\frac{1}{2}})^4 = (a^{\frac{1}{4}})^4 \Rightarrow a = 6^2 = 36$$

2° modo: scrivo direttamente le radici come potenze frazionarie:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{a} ; 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}, \text{ elevo alla quarta}$$

$$(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}})^4 = a, (2^{\frac{1}{2}})^4 \cdot (3^{\frac{1}{2}})^4 = a, 2^2 \cdot 3^2 = a, 36 = a$$

$$(12) \quad \sqrt[3]{\sqrt{27}} = (27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$(13) \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{a}, (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}, 2^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{8}} \text{ elevo alla 8:}$$

$$(2^{\frac{1}{6}})^8 = (a^{\frac{1}{8}})^8, 2^{\frac{1}{6} \cdot 8} = a, a = 2^{\frac{4}{3}}, a = \sqrt[3]{16}$$

$$(14) \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^a, 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^a, 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^a$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$$

$$(15) \quad \sqrt[9]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2, 2^{\frac{1}{9}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^1, \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = 1, \frac{1}{9} = \frac{2}{3}, a = \frac{3}{2}$$

$$(16) \quad \sqrt{2\sqrt{2}} \quad 1^\circ \text{ modo: } \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

(stessa base) ↓

$$= 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$$

$$2^\circ \text{ modo: (stesso esponente): } \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8}$$

$$(17) \quad \sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{\sqrt{12}}} =$$

$$= \sqrt{3\sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{3^4 \sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{3^4 \sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 12} = \sqrt[8]{3^4 \cdot 12}$$

$$= \sqrt[8]{81 \cdot 12} = \sqrt[8]{972}$$

L'esercizio chiedeva:  $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{a}$ ; elevo al quadrato:

$$3\sqrt{2\sqrt{3}} = (a^{\frac{1}{8}})^2 = a^{\frac{1}{4}}; \text{ elevo nuovamente al quadrato:}$$

$$(3\sqrt{2\sqrt{3}})^2 = (a^{\frac{1}{4}})^2; \quad 9 \cdot 2\sqrt{3} = a^{\frac{1}{2}}; \text{ devo ancora al } \square:$$

$$81 \cdot 4 \cdot 3 = a \quad \Rightarrow \quad a = 81 \cdot 12 = 972$$

$$\textcircled{18} \quad \sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{32-2} = \sqrt{30} \quad \text{NO!!!!} \quad (A^x - B^x \overset{\text{NO}}{\neq} (A-B)^x)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{32} &= \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \\ &= \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{18} \quad (3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18})$$

Equazioni con potenze:

$$\textcircled{1} \quad 2^{x+5} = 4^{2x+1} \quad [ \text{Idea fondamentale: stessa base. Si arriva a} ]$$

Audiamo in base 2:

$$A^{f(x)} = A^{g(x)} \quad \text{da cui } f(x) = g(x)$$

$$2^{x+5} = (2^2)^{2x+1}$$

$$\underbrace{x+5}_{f(x)} = \underbrace{4x+2}_{g(x)}$$

$$2^{x+5} = 2^{4x+2}$$

$$x+5 = 4x+2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

$$\textcircled{2} \quad 4 \cdot 2^{x^2} = 8^x \quad \text{Vado in base 2; } 2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$$

$$\underbrace{2+x^2}_{f(x)} = \underbrace{3x}_{g(x)}$$

$$2^{2+x^2} = 2^{3x}, \quad x^2+2 = 3x, \quad x^2-3x+2=0, \quad (x-2)(x-1)=0$$

quindi  $x=2$  oppure  $x=1$ .

$$[ \quad x^2 + Ax + B = 0 \quad (\text{è importante che il coeff. di } x^2 \text{ sia } 1!!!) ]$$

Allora  $B = \text{Prodotto delle radici}$ ,  $A = -\text{Somma radici}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad P = 2 \quad S = 3 \quad \text{Radici} = 1, 2$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} 2^{x^2} &= 4 \\ 2^{x^2} &= 2^2 \end{aligned}$$

$$x^2 = 2 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$(2^x)^2 = 4$$

$$2^{2x} = 2^2$$

$$2x = 2, \quad x = 1$$

$$\textcircled{4} \quad 4^x - 2^{x+2} + 3 = 0 \quad 2^{2x} - 2^2 \cdot 2^x + 3 = 0$$

$$(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = \begin{matrix} / & 1 \\ & \backslash \\ & 3 \end{matrix}$$

Toruo in  $x$ :

Pongo  $y = 2^x$  e ottengo

(Prodotto: 3 Somma: 4  $\Rightarrow$  Radici: 1, 3)

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

$$2^x = 3$$

$$x = \log_2 3$$

$$\textcircled{5} \quad x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \quad \text{Pongo } y = x^2 \text{ e diventa } y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$\text{Quindi } y = \begin{matrix} / & 1 \\ & \backslash \\ & 3 \end{matrix}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

4 soluzioni

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\textcircled{6} \quad x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \quad \text{Pongo } y = x^2 \text{ e diventa } y^2 - 2y - 3 = 0$$

( $P = -3$ ,  $S = 2$ , Radici: 3, -1). Quindi

$$y = \begin{matrix} & 3 \\ / & \\ & \backslash \\ & -1 \end{matrix}$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

2 soluzioni (reali)

$$x^2 = -1$$

NULLA

$$\textcircled{7} \quad x^6 - 2x^3 - 3 = 0 \quad \text{Pongo } y = x^3 \text{ e diventa } y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$y = \begin{matrix} & 3 \\ / & \\ & \backslash \\ & -1 \end{matrix}$$

$$x^3 = 3$$

$$x = \sqrt[3]{3}$$

2 soluzioni

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\textcircled{8} \quad x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{Pongo } y = x^2 \text{ e diventa } y^2 + 5y + 4 = 0$$

(Prodotto: 4, Somma: -5, Radici: -4, -1)

$$y = \begin{matrix} & -4 \\ / & \\ & \backslash \\ & -1 \end{matrix}$$

$$x^2 = -4$$

NULLA

$$x^2 = -1$$

NULLA

Si poteva vedere subito !!

$x^4 + 5x^2 + 4 \geq 4$  quindi non sarà mai zero!

$\geq 0 \geq 0$

## PRECORSO 2009

## 1.2

Titolo nota

21/09/2009

Esercizi su logaritmi e potenze

$$\textcircled{1} \log_2 16 = 4 \quad (\text{volendo: } \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4)$$

$$\textcircled{2} \log_2 a = 3 \quad \log_2 a = 3 \log_2 2 = \log_2 2^3, \log_2 a = \log_2 2^3$$

$$a = 2^3 = 8$$

$$\textcircled{3} \log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = 1^\circ \text{ modo } [\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B]$$

$$= \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3 + 4 + 6 = 13$$

2° modo: uso proprietà potenze:

$$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 2^{13} = 13$$

$$\textcircled{4} \log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$$

$$\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 (20 : 4) = \log_3 5$$

$$[\log_a (A : B) = \log_a A - \log_a B]$$

$$\textcircled{5} \log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a \quad [\log_a A \cdot \log_a B = \text{NULLA DI FURBO}]$$

$$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{Devo risolvere } 6 = \log_2 a, a = 2^6 = 64$$

$$\log_2 a = 6 = 6 \log_2 2 = \log_2 2^6 \quad a = 2^6$$

$$\textcircled{6} 2^{\log_2 a} = 9 \Rightarrow a = 9. \text{ Se uno non lo vede: pongo } y = \log_2 a$$

$$2^y = 9 \Rightarrow y = \log_2 9. \text{ Torneo nella variabile } a!$$

$$\log_2 a = \log_2 9 \Rightarrow a = 9$$

$$\textcircled{7} \log_2 (2^9) = 9 \quad a \cdot \frac{\log_2 2}{1} = 9 \Rightarrow a = 9$$

$$\textcircled{8} \log_2 (\log_3 a) = 2 \quad \text{Pongo } y = \log_3 a$$

$$\log_2 y = 2, y = 4 \quad \text{Tornando in } a: \log_3 a = 4 \Rightarrow a = 3^4 = 81$$

$$[\log_3 a = 4 = 4 \log_3 3 = \log_3 3^4]$$

$$\textcircled{9} \text{ Cambio di base: } \left[ \log_a C = \frac{\log_b C}{\log_b a} \quad \text{FORMULA DI CAMBIO DI BASE} \right]$$

$\log_a C = x$ , cioè  $a^x = C$ . Risolvo prendendo a dx e s x i log in base b:

$$\log_b (a^x) = \log_b C, \quad x \log_b a = \log_b C, \quad x = \frac{\log_b C}{\log_b a}$$

Idea fondamentale: risolvere  $a^x = C$  prima "in base a" poi "in base b"

$$\textcircled{10} \log_3 9 = \log_2 a \quad 2 = \log_2 a \Rightarrow a = 4$$

$$\log_3 9 = \log_a 25 \quad 2 = \log_a 25$$

Passo dalla base a alla base 5

$$\log_a 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 a} = \frac{2}{\log_5 a} = 2 \Rightarrow \log_5 a = 1 \Rightarrow a = 5$$

$$\textcircled{11} \log_{125} 64 = \log_5 a \quad \text{Passo il primo log in base 5}$$

$$\log_{125} 64 = \frac{\log_5 64}{\log_5 125} = \frac{\log_5 64}{3} = \frac{1}{3} \log_5 64 = \log_5 64^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_5 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} = \log_5 4 \Rightarrow a = 4$$

$$\textcircled{12} \log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a$$

$$\log_{49} (2^a) = \frac{\log_7 (2^a)}{\log_7 49} = \left(\frac{1}{2}\right) \log_7 (2^a) = \log_7 2^{\frac{a}{2}}$$

$$2^{1000} = 2^{\frac{a}{2}} \Rightarrow a/2 = 1000 \Rightarrow a = 2000$$

$$\textcircled{13} \log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a. \text{ Porto tutto in base 2:}$$

$$\log_7 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 7} ; \log_8 49 = \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \frac{1}{3} \log_2 49 = \frac{2}{3} \log_2 7$$

$$\text{Moltiplico: } \log_7 3 \cdot \log_8 49 = \frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log_2 7 = \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$\text{Voglio: } \frac{2}{3} \log_2 3 = \log_2 a ; \log_2 3^{2/3} = \log_2 a ; a = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9}$$

### EQUAZIONI

$$\textcircled{1} \log_2 (5x+3) = 3 ; \log_2 (5x+3) = \log_2 8$$

$$5x+3 = 8 \Rightarrow x=1$$

$$\textcircled{2} \log_2 (5x+3) = \log_2 (1-x) \Rightarrow 5x+3 = 1-x \Rightarrow 6x = -2$$

$$\Rightarrow x = -1/3 \Rightarrow 1 \text{ soluzione} \quad \text{SI}$$

$$\textcircled{3} \log_2 (2x+1) = \log_2 (3x+2) \Rightarrow 2x+1 = 3x+2$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}$$

ASSOLUTAMENTE NO

BISOGNA SEMPRE VERIFICARE CHE L'ARGOMENTO DEL  
log SIA > 0

[  $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$  Ok, ma bisogna  
poi controllare che nei valori trovati di  $x$  si abbia  $f(x) > 0$   
dunque anche  $g(x) > 0$  ]

[ Caso particolare:  $\log_a f(x) = \log_a A$ , se  $A > 0$  non serve  
controllo ]

$$\textcircled{4} \quad \cancel{\log_5 (x^2+9)} = 2 = \cancel{\log_5 25} \quad x^2+9=25, \quad x^2=16, \quad x=\pm 4$$

$$\textcircled{5} \quad \cancel{\log_5 (x^2+5)} = \cancel{\log_5 (4x)} \quad x^2+5=4x \\ x^2-4x+5=0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-5} \Rightarrow \text{NULLA} \quad (\text{nessuna radice reale per colpa dell'eq. di 2° grado})$$

$$\textcircled{6} \quad \cancel{\log_5 (x^2-5)} = \cancel{\log_5 (4x)} \quad x^2-5=4x, \quad x^2-4x-5=0 \\ (x-5)(x+1)=0 \quad x = \begin{cases} 5 \rightarrow \text{OK} \\ -1 \rightarrow \text{NO} \end{cases} \quad \log_5 20 = \log_5 20 \\ \log_5 (-4) = \log_5 (-4)$$

L'unica soluzione dell'equazione è  $x=5$ .

$$\textcircled{7} \quad \log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) = 3; \quad \log_2 [(x-1)(x+1)] = 3$$

$$\cancel{\log_2 (x^2-1)} = 3 = \cancel{\log_2 8} \quad x^2-1=8, \quad x^2=9, \quad x=\pm 3$$

Il controllo va fatto nell'eq. iniziale !!!

$$\text{Controllo } x=3: \quad \log_2 2 + \log_2 4 = 1+2=3 \quad \text{OK!}$$

$$\text{Controllo } x=-3: \quad \log_2 (-4) + \log_2 (-2) \quad \text{NON HA SENSO}$$

Quindi: UNICA SOLUZIONE  $x=3$ .

$$\textcircled{8} \quad 3 \log_3 x + 2 \log_3 x^2 = 21; \quad 3 \log_3 x + 4 \log_3 x = 21; \quad 7 \log_3 x = 21 \\ \log_3 x = 3, \quad x = 27$$

$$\textcircled{9} \quad (\log_2 (x+2))^2 + 3 \log_2 (x+2) = 4. \quad \text{Pongo } y = \log_2 (x+2): \\ y^2 + 3y = 4; \quad y^2 + 3y - 4 = 0; \quad (y+4)(y-1) = 0$$

$$y = \begin{cases} -4 \leadsto \log_2 (x+2) = -4 = \log_2 \frac{1}{16} \leadsto x+2 = \frac{1}{16} \leadsto x = -\frac{31}{16} \\ 1 \leadsto \log_2 (x+2) = 1 = \log_2 2 \leadsto x+2 = 2 \leadsto x = 0 \end{cases}$$

$$-3 = -3 \underbrace{\log_3 3}_1 = \log_3 3^{-3} = \log_3 \frac{1}{27}$$

11  $3^x - 5 \cdot 3^x = 6$  ;  $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 6$  ; Pongo  $y = 3^x$  ;  
 $y^2 - 5y - 6 = 0$  ;  $(y-6)(y+1) = 0$

$$y = \begin{cases} 6 & \leadsto 3^x = 6 \leadsto x = \log_3 6 = 1 + \log_3 2 \\ -1 & \leadsto 3^x = -1 \leadsto \text{NULLA} \end{cases} \quad \begin{aligned} & \hookrightarrow \log_3(3 \cdot 2) = \\ & = \log_3 3 + \log_3 2 \end{aligned}$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = \underbrace{(x+2)}_{-2} \underbrace{(x-2)}_{2} \underbrace{(x^2+1)}_{\text{NULLA}}$$
 Avere la fattorizzazione = avere le radici

Torus in  $X$ :

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 3)(x^2 - 2) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

⑭  $(x^2+2)(x^3+3)(x^4+4) = 0$

$\downarrow$  NULLA  $\downarrow$  NULLA

$x^3 = -3$

$x = -\sqrt[3]{3}$

$$(x^2-2)(x^3-3)(x^4-4) = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \leadsto x^2 = 2 \leadsto x = \pm \sqrt{2}$$

$$x^3 - 3 = 0 \leadsto x^3 = 3 \leadsto x = \sqrt[3]{3}$$

$$(x^4 - 4) = 0$$

$$\underbrace{(x^2+2)}_{\text{NULLA}} \underbrace{(x^2-2)}_{\downarrow} = 0 \quad \downarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

The solutions:  $x = \pm\sqrt{2}, x = \sqrt[3]{3}$

Titolo nota

22/09/2009

## 1) Diseguaglianze

$$2 \leq 3 \quad \text{Si} \quad 2 < 3 \quad \text{Si} \quad 2 \leq 2 \quad \text{Si}$$

$$2 < 2 \quad \text{No.}$$

$$x + 3 \leq 0 \quad x \leq -3 \quad ]-\infty, -3]$$

$$\begin{array}{lll} x + 3 < 0 & x < -3 & ]-\infty, -3[ \\ -x + 3 < 0 & x > 3 & ]3, +\infty[ \\ \text{oppure } -x < -3 & \rightarrow & x > 3 \end{array}$$

Moltiplicare per  $-1$  cambia il segno!

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\leq 2(x - 1) \rightarrow 2x + 3 \leq 2x - 2 \\ \rightarrow 0 &\leq -5 \quad \text{impossibile} \quad \text{Soluzione} = \emptyset \end{aligned}$$

## Diseguaglianze di secondo grado

$$x^2 + 3x - 4 \leq 0 \quad , \quad -x^2 + 3x + 4 > 0$$

↓

$$\text{radici} \quad \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

soluzione

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$[-4, 1]$$

$$x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 4$$

valori interi  $-1 < x < 4 \rightarrow ]-1, 4[$

Cosa succede se c'è solo una radice

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \text{una sola radice } x_1 = 1$$

Soluzione

$$x \neq 1 \rightarrow ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

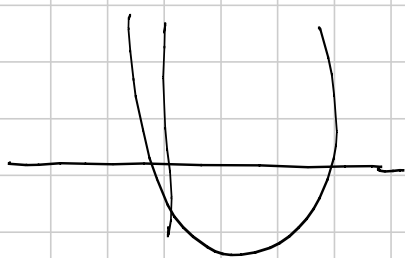
$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{Sempre soluzione } \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0 \quad \text{Soluzione } x = 1, \{1\}$$

$$x^2 - 2x + 1 < 0 \quad \text{Mai } \emptyset$$

Se non ci sono radici reali

$$\begin{array}{ll} x^2 + x + 1 > 0 & \text{Sempre } \mathbb{R} \\ x^2 + x + 1 \geq 0 & \text{" } \mathbb{R} \\ x^2 + x + 1 \leq 0 & \text{Mai } \emptyset \\ x^2 + x + 1 < 0 & \text{" } \emptyset \end{array}$$

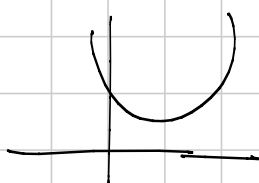


$$y = ax^2 + bx + c \quad a > 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ha 2 radici}$$



$$\text{ha una sola radice}$$



$$\text{non ci sono radici reali}$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = 1$$

$$x < 1 \cup x > 5 \rightarrow ]-\infty, 1[ \cup ]5, +\infty[$$

$$x^2 \leq 4$$

$$[-2, 2], ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[, \text{ mai,}$$

~~$$x \leq 2$$~~ NON HA SENSO

$$x^2 - 4 \leq 0 \quad \text{valori interi, naturali sono } 2, -2$$

$$\text{Soluzione } x \in [-2, 2]$$

Di disequazioni con prodotti.

$$(x+3)(x-1)(x+5) \geq 0$$

①

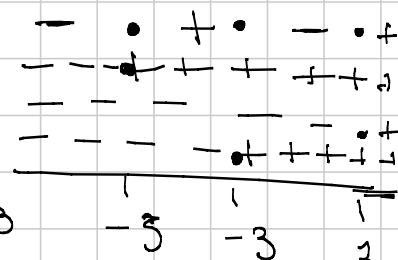
②

③

⑤

②

①



$$\textcircled{1} \quad x+3 > 0 \quad \text{e} \quad x > -3 \quad \text{e} \quad = 0 \quad \text{e} \quad x = -3$$

$$\textcircled{2} \quad x-1 > 0 \quad \text{e} \quad x > 1 \quad \text{e} \quad = 0 \quad \text{e} \quad x = 1$$

$$\textcircled{3} \quad x+5 > 0 \quad \text{e} \quad x > -5 \quad \text{e} \quad = 0 \quad \text{e} \quad x = -5$$

$$\text{Soluzione} \quad [-5, -3] \cup [1, +\infty[$$

$$(x+3)(x-1)(x+5) < 0$$

$$]-\infty, -5[ \cup ]-3, 1[$$

$$x^2(x-1)(x-3) \leq 0$$

①

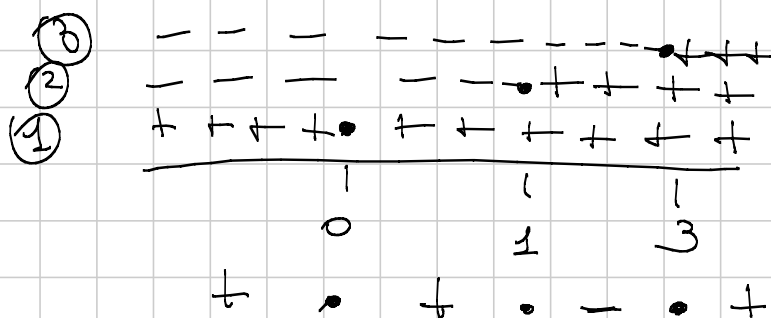
②

③

$$\textcircled{1} \quad x^2 > 0 \quad \text{e} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad = 0 \quad \text{e} \quad x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad x-1 > 0 \quad \text{e} \quad x > 1 \quad \text{e} \quad = 0 \quad \text{e} \quad x = 1$$

③  $x - 3 > 0$   $x > 3$   $e = 0$   $x = 3$



$$[2, 3] \cup \{0\}$$

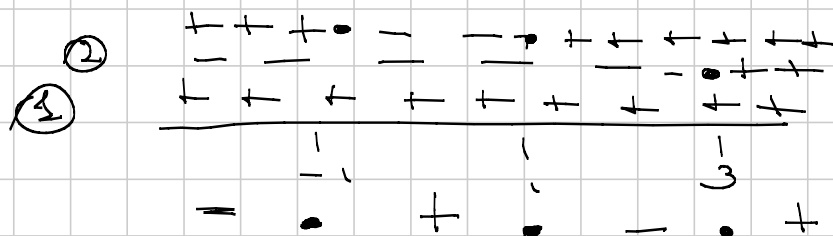


$$\underbrace{(x^2+1)}_{(1)} \underbrace{(x-3)}_{(2)} \underbrace{(x^2-1)}_{(3)} > 0$$

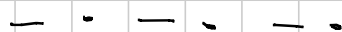
①  $\chi^2_1 > 0$  sempre

②  $x - 3 > 0$   $\Leftrightarrow x > 3$  e  $= 0$   $\Leftrightarrow x = 3$

③  $x^2 - 1 > 0$  da  $x < -1$  oppure  $x > 1$  e  $= 0$   $x = 1$  oppure  $x = -1$



$$]_{-1,1}[ \cup ]_{3,4}[$$



$$x^4 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

$$x^2 = y$$

$$y^2 - 3y + 4$$

$$\Delta = 9 - 16 < 0$$

more to achieve real

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 + 4 > 0$  pour les valeurs réelles  
toujours

$$v^2 = g$$

$$y^2 - 3y - 4$$

$$(y-4)(y+1)$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$y_1 = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 1) > 0$$

2

②

②  $x^2 - 4 > 0$   $x < -2 \cup x > 2$   $e = 0$   $x = 2, x = -2$

(2)  $n^2 \in \mathbb{N}$  therefore

$$J_{-8, -2} \cup J_{2, 20}$$

① + + + - - - + + +  
② + + + + + + +  
-----  
          1      1  
        -2      2  
+       -       +       +

$$x^4 - 5x^2 + 6 \leq 0$$

$[1, 5], [2, 3]$

$$[-2, 3],$$

$$u^2 = y$$

$$y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2)$$

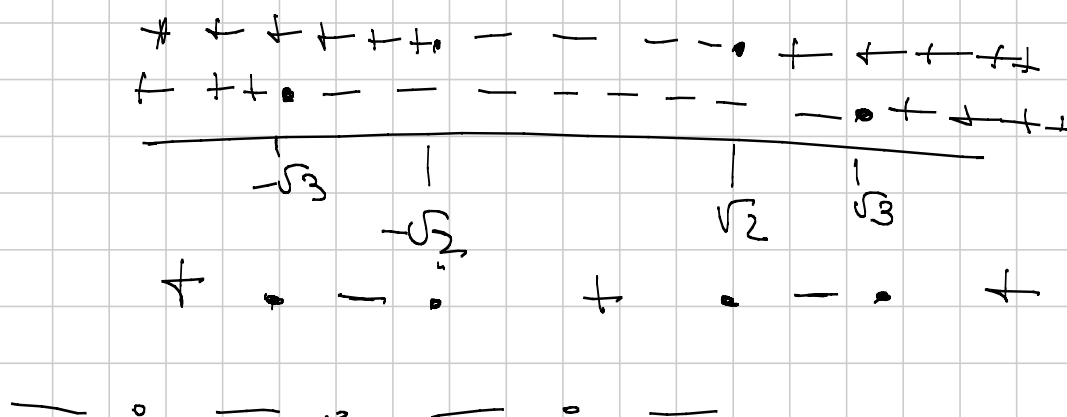
$$x^4 - 3x^2 + 6 = (x^2 - 3)(x^2 - 2) \leq 0$$

(1)

②

①  $x^2 - 3 > 0$  а  $x < -\sqrt{3}$  oppure  $x > \sqrt{3}$  e  $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

②  $x^2 - 2 > 0$  se  $x < -\sqrt{2}$  u  $x > \sqrt{2}$  e  $= 0$   $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$



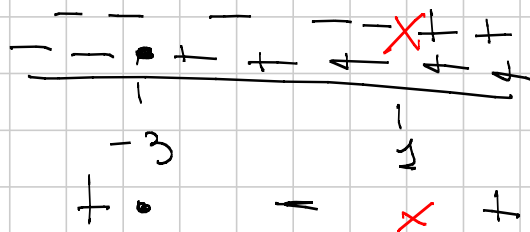
### Diseguaglianze con quozienti

$$\frac{x+3}{x-1} > 0$$

①  $x+3 > 0$  &  $x > -3$  e  $= 0$   $x = -3$

②  $x-1 > 0$  &  $x > 1$  e  $= 0$   $x = 1$

il denominatore  
non può mai essere  
 $= 0$ !!



$$]-\infty, -3[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\frac{x+3}{x-1} \leq 0$$

$$[-3, 1[$$

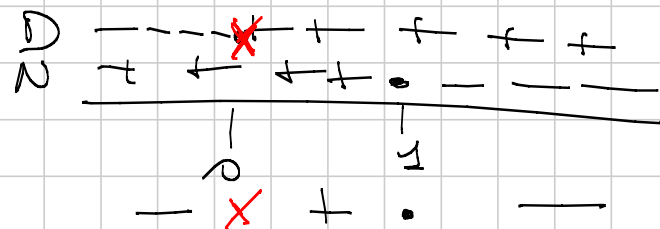
$$\frac{1}{x} > 1$$

$$x > 1, x < 1, \text{ mai,}$$

$$]0, 1[$$

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-x}{x} > 0$$

$$\begin{array}{l} 1-x > 0 \quad x < 1 \quad \Rightarrow 0 < x < 1 \\ x > 0 \quad x > 0 \quad \Rightarrow 0 < x < 1 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} x^2 > x \\ x^2 - x > 0 \end{array}$$

$$x < 0 \vee x > 1$$

$$x > 1 \quad \text{No}$$

Non si può sempre fare così!

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$$

$$x \neq 0 \quad \text{e per } x^2 > 0 \Rightarrow \text{si può moltiplicare}$$

$$\frac{x^2}{x} > 1 \rightarrow x > 1$$

oppure

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0 \quad \frac{x-1}{x^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{A}}$$

Titolo nota

22/09/2009

## Sistemi di disequazioni di primo grado

$$\begin{cases} x + 3 > 0 & \textcircled{1} \text{ cerchiamo gli } x \text{ che} \\ x - 1 \leq 0 & \textcircled{2} \text{ verificano tutte e 2} \\ & \text{le disequazioni} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$\textcircled{2} \quad x - 1 \leq 0 \rightarrow x \leq 1$$

$$]-3, 1]$$

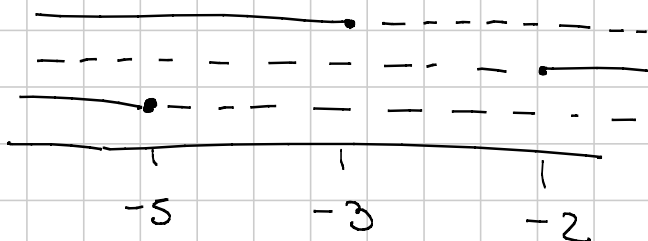
 $\textcircled{1}$ 

$$\begin{cases} x + 5 \leq 0 & (1) \\ -x \leq 2 & (2) \\ -x \geq 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad x \leq -5$$

$$(2) \quad x \geq -2$$

$$(3) \quad x \leq -3$$

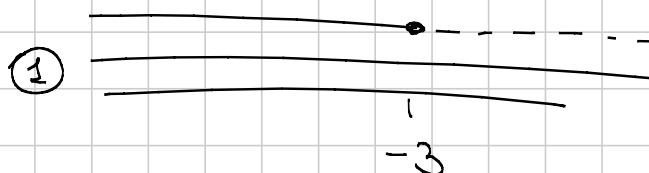


Soluzioni  $\emptyset$

$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 1 & (1) \\ x - 3 \geq 2x & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 \geq 0 \text{ sempre}$$

$$(2) \quad x \leq -3$$

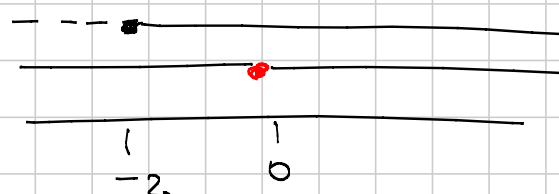


Soluzioni  $]-\infty, -3]$

$$\begin{cases} x^2 + 1 > 1 & (1) \\ x - 2 \leq 2x & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 > 0 \quad x \neq 0$$

$$(2) \quad x \geq -2$$



$[-2, +\infty[$

$$\begin{cases} x^2 < x & (1) \\ x < 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x^2 - x < 0 \quad \rightarrow \quad ]0, 1[$$

$x(x-1)$

(valori dove  $x=0, x=1$ )

(2)  $x < 0$

Soluzione



$$\begin{cases} x^2 \leq x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

nel disequo i punti  
negativi diventano veri,  
cioè sono compresi

Soluzione  $x=0$

N  $\frac{x^2-3}{x^2-1}$  Studiare il segno

N  $x^2-3 > 0$  e  $x < -\sqrt{3} \cup x > \sqrt{3}$  e  $x=0$   $x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$

D  $x^2-1 > 0$  e  $x < -1 \cup x > 1$  e  $x=0$   $x=1, x=-1$



$\frac{x^2-3}{x^2-1} \geq 0$

$]-\infty, -\sqrt{3}] \cup ]-1, 1[ \cup [\sqrt{3}, +\infty[$

$x^8 + 3x^4 \geq 0 \rightarrow x^4(x^4 + 3) \geq 0$

sempre  $x^4 \geq 0$  sempre  
 $x^4 + 3 > 0$  sempre

$$x^3 + x \geq 0 \rightarrow x(x^2 + 1) \geq 0$$

①                  ②

②  $x^2 + 1 > 0$  sempre

①  $x \geq 0$  se  $x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

$$x^6 - 2x^3 + 1 > 0 \quad x^3 = y$$

$$y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$$

↓  $(x^3 - 1)^2 > 0$  Soluzioni:  $x^3 \neq 1$

ma  $x^3 = 1$  se e solo se  $x = 1$

Soluzioni:  $x \neq 1$ ,  $] -\infty, 1[ \cup ] 1, +\infty[$

$$(x+2)^3 \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad x+2 \geq 0$$

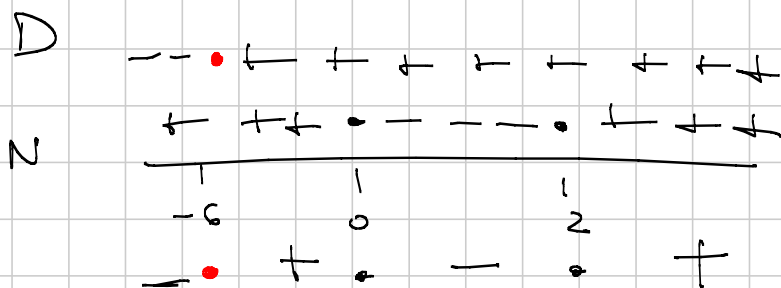
Soluzioni  $[-2, +\infty[$

$$(x+2)^{2009} \geq 0 \quad \text{se e solo se} \quad x+2 \geq 0.$$

In generale  $(f(x))^n \geq 0$  con  $n$  dispari  
 se e solo se  $f(x) \geq 0$



$$N \quad x > 0 \quad \& \quad x < 0 \vee x > 2 \quad \& \quad x = 0 \text{ opp. } x = 2$$



$$]-6, 0] \cup [2, +\infty[$$

— • —

$$\frac{1}{x} \geq 10$$

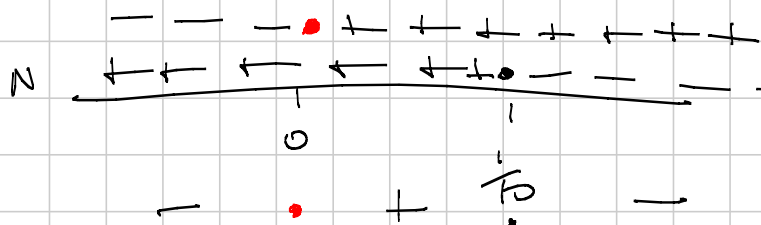
$$x \leq \frac{1}{10}, \quad x \leq -\frac{1}{10}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{x} - 10 \geq 0 \rightarrow \frac{1-10x}{x} \geq 0$$

$$N \quad 1-10x \geq 0 \quad \& \quad x < \frac{1}{10} \quad \& \quad x = \frac{1}{10}$$

$$D \quad x > 0 \quad \& \quad x > 0 \quad \& \quad x \leq 0$$



Soluzioni  $\left[0, \frac{1}{10}\right]$

$$\frac{x}{x+1} > 2$$

$$x > -\frac{2}{3}, \quad ]-\frac{2}{3}, -1[ ,$$

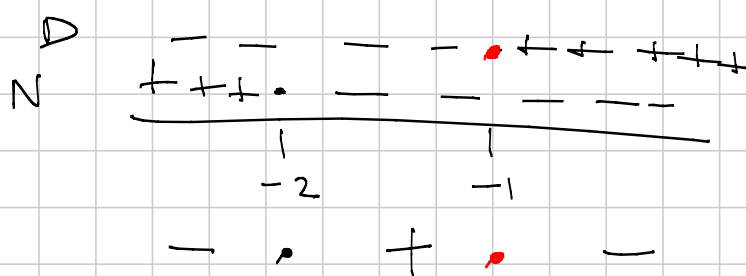
$$[-2, -1[ , \quad ]-1, 1[ ,$$

$$\frac{x}{x+1} - 2 > 0 \rightarrow \frac{x - 2(x+1)}{x+1} > 0 \rightarrow$$

$$\frac{x - 2x - 2}{x+1} > 0 \rightarrow \frac{-x - 2}{x+1} > 0$$

$$N \quad -x - 2 > 0 \rightarrow x < -2, \text{ e } x = -2$$

$$D \quad x+1 > 0 \text{ se } x > -1 \text{ e } x = -1$$



Soluzioni  $] -2, -1[$

$$x^{1000} + x^{1000} - 2 < 0.$$

$$\mathbb{R}, x \neq 1, ]-1, 1[, ]-2, 1[, ]-\infty, 1[$$

$$]1, \infty[$$

$$x^{1000} = y \quad y^2 + y - 2 = (y+2)(y-1)$$

$$(x^{1000} + 2)(x^{1000} - 1) < 0$$

(1)                      (2)

①  $x^{1000} + 2 > 0$  sempre

②  $(x^{1000} - 1) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 1$

Soluzione

$$]-1, 1[$$

$$x^n < a$$

(a > 0), n pari

vero se  $x \in ]-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}[$

$$x^n > a \quad x < -\sqrt[n]{a} \quad \text{oppure} \quad x > \sqrt[n]{a}$$

$$x^{10} < 2 \quad ]-\sqrt[10]{2}, \sqrt[10]{2}[$$

$$3^x \leq 3^2 \rightarrow x \leq 2$$

$$3^{2x} \leq 3^{x+1} \rightarrow 2x \leq x+1 \rightarrow x \leq 1$$

$$3^{x^2+x} \leq 1$$

$$1 = 3^0$$

$$3^{x^2+x} \leq 3^0 \rightarrow x^2+x \leq 0$$

$$\rightarrow x(x+1) \leq 0 \rightarrow [-1, 0]$$

$$3^x \leq 2 = 3^{\log_3 2} \rightarrow x \leq \log_3 2$$

$$4^x \geq 2$$

$$4^x = 2^{2x}$$

↓

$$(2^2)^x$$

$$2^{2x} \geq 2$$

$$2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 3$$

1° metodo in base 3

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$$

$$3^{-x} \geq 3^1$$

$$\rightarrow -x \geq 1 \rightarrow x \leq -1$$

2° metodo in base  $\frac{1}{3}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \rightarrow x \leq -1$$

in generale

$$a^x \geq a^y$$

$$\text{e } a > 1$$

se e solo se

$$x \geq y$$

$$a^x \geq a^y$$

$$\text{e } a < 1$$

se e solo se

$$x \leq y$$

# DISEQUAZIONI

Titolo nota

23/09/2009

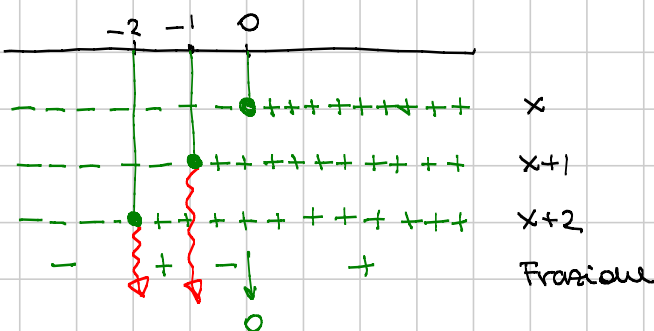
$$\textcircled{1} \quad \frac{x}{x+1} \geq \frac{x}{x+2}$$

Cosa NON fare; moltiplicare "in croce"

Tutto dalla stessa parte:  $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+2} \geq 0$

$$\frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} - x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \text{per un po' non lo considero}$$

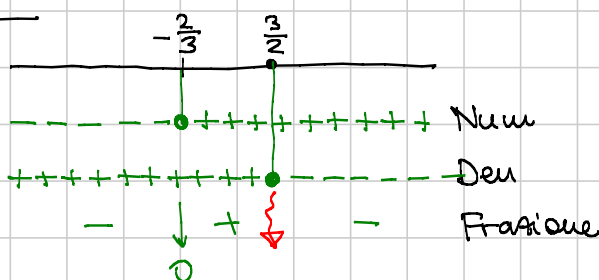


Poiché chiedeva  $\geq 0$  la soluzione è  $(-2, -1) \cup [0, +\infty)$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3x+2}{3-2x} \leq 0 \quad \text{Non lo guardo}$$

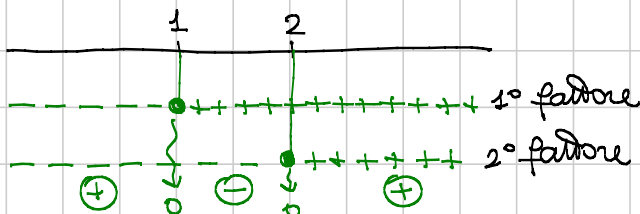
Denominatore: quando è  $> 0$ ?

$$3-2x > 0, \quad 3 > 2x, \quad x < \frac{3}{2}$$



$$(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \underbrace{(x-1)}_{1^\circ} \underbrace{(3^x-9)}_{2^\circ} > 0$$



2° fattore: quando è  $> 0$ ?  $3^x - 9 > 0, \quad 3^x > 9 = 3^2$

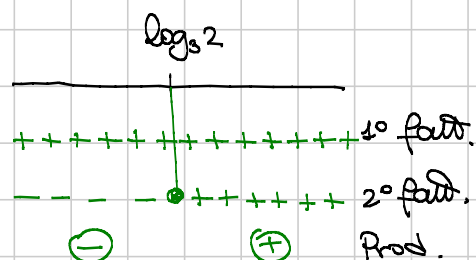
Poiché la base è 3, quindi maggiore di 1, posso "semplificare" la base quindi ho  $x > 2$ . Riassumendo:

$$3^x - 9 \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 2 \\ = 0 & \text{per } x = 2 \\ < 0 & \text{per } x < 2 \end{cases}$$

Soluzione finale:  
 $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

④  $3^x + 9^x > 6$        $3^x + 3^{2x} - 6 > 0$        $y = 3^x$   
 Diventa:  $y^2 + y - 6 > 0$       Radici:  $(p = -6, S = -1)$        $-3, 2$   
 Soluzione in  $y$ :  $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$   
 Ritorno in  $x$ : la soluzione sono i valori della  $x$  per cui  
 $3^x < -3$       MAI  $\emptyset$   
 $3^x > 2$        $x > \log_3 2 \rightarrow$  soluzione finale.

2° modo di vederlo:  $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2) > 0$   
 Torso in  $x$ :  $\underbrace{(3^x+3)}_{1^\circ} \underbrace{(3^x-2)}_{2^\circ} > 0$

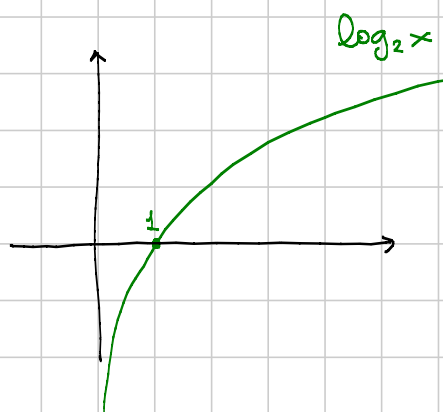


— 0 — 0 — 0 —

### Diseguazioni con logaritmi

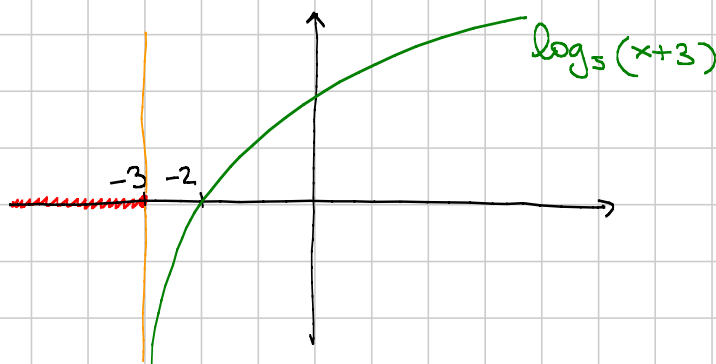
①  $\log_2 x$

|        |             |
|--------|-------------|
| $> 0$  | $x > 1$     |
| $= 0$  | $x = 1$     |
| $< 0$  | $0 < x < 1$ |
| $\leq$ | $x \leq 0$  |

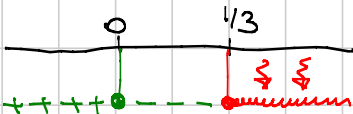


②  $\log_5 (x+3)$

|        |                                           |
|--------|-------------------------------------------|
| $> 0$  | quando $x+3 > 1$ , cioè $x > -2$          |
| $= 0$  | quando $x+3 = 1$ , cioè $x = -2$          |
| $< 0$  | quando $0 < x+3 < 1$ , cioè $-3 < x < -2$ |
| $\leq$ | quando $x+3 \leq 0$ , cioè $x \leq -3$    |



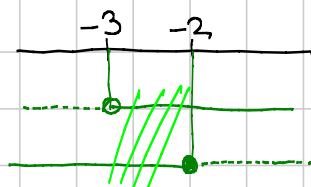
$$\begin{array}{llll} \textcircled{3} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) & & & \\ > 0 & 2x-3 > 1 & x > 2 \\ = 0 & 2x-3 = 1 & x = 2 \\ < 0 & & \frac{3}{2} < x < 2 \\ \S & 2x-3 \leq 0 & x \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \textcircled{4} \log_4(1-3x) & & & \\ > 0 & 1-3x > 1, & -3x > 0, & x < 0 \\ = 0 & 1-3x = 1, & 3x = 0, & x = 0 \\ < 0 & & & 0 < x < \frac{1}{3} \\ \S & 1-3x \leq 0 & x \geq \frac{1}{3} \end{array}$$


$$\textcircled{5} \log_3(x+3) \geq 0 \quad \text{Argomento} \geq 1: x+3 \geq 1, x \geq -2$$

$$\textcircled{6} \log_3(x+3) \leq 0 \quad 0 < \text{Argomento} \leq 1$$

$$0 < x+3 \leq 1 \quad \begin{cases} x+3 > 0 & \text{BUROCRACIA} \\ x+3 \leq 1 & \text{DERIVA DALLA DISEQ} \end{cases}$$



1ª eq,  
2ª eq,

Sistema: zona comune  
=  $[-3, -2]$

In alternativa:  $\log_3(x+3) \leq 0$ . Studio in generale  $\log_3(x+3)$

$$> 0 \quad x+3 > 1, \quad x > -2$$

$$= 0 \quad x+3 = 1, \quad x = -2$$

$$< 0$$

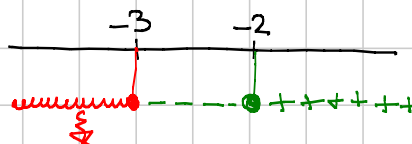
$\S$

$$x+3 \leq 0, \quad x \leq -3$$

$$\boxed{x = -2} \leq 0$$

$$\boxed{-3 < x < 2} \leq 0$$

$$-0-0-$$



$$\textcircled{7} \log_5(x+3) \geq 2, \quad \log_5(x+3) \geq \log_5 25$$

Tentativo:  $x+3 \geq 25, x \geq 22$  OK.

Ho applicato:

$$\log_a f(x) \geq \log_a B \Leftrightarrow f(x) \geq B$$

Si può fare purché  $a > 1$  e ovviamente  $B > 0$

$$\textcircled{8} \log_5 (x+3) \leq 2, \log_5 (x+3) \leq \log_5 25$$

Tentativo:  $x+3 \leq 25, x \leq 22$  **NO!!! BUROCRAZIA!!!**

In generale:  $\log_a f(x) \leq \log_a B$  con  $a > 1$  e  $B > 0$  è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{BUROCRAZIA} \\ f(x) \leq B & \text{TOGLIERE I LOGARITMI} \end{cases}$$

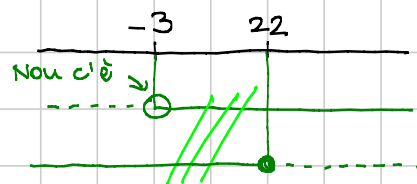
Ritorno al caso precedente:  $\log_a f(x) \geq \log_a B$  con  $a > 1$  e  $B > 0$  è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{BUROCRAZIA} \\ f(x) \geq B & \text{TOGLIERE I LOGARITMI} \end{cases}$$

SAREBBE un sistema, ma la 2ª implica la prima. Dunque la 1ª è inutile.

Tornando all'esercizio:  $\log_5 (x+3) \leq 2, \log_5 (x+3) \leq \log_5 25$  e questa è equiv. al sistema:

$$\begin{cases} x+3 > 0 & \text{Burocrazia} \\ x+3 \leq 25 & \text{Togliere i log} \end{cases}$$



Zona comune:  $[-3, 22]$ .

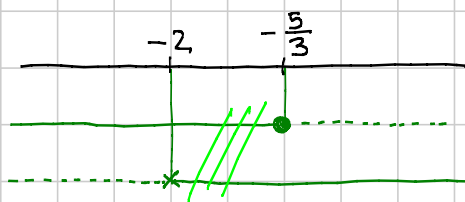
$$\textcircled{9} \log_3 (x+2) \leq -1$$

$$-1 = \textcircled{-1} \cdot \log_3 3 = \log_3 3^{-1} = \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\log_3 (x+2) \leq \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x+2 \leq \frac{1}{3} & \text{Togliere i log} \\ x+2 > 0 & \text{Burocrazia} \end{cases}$$

$$x+2 \leq \frac{1}{3} \quad x \leq -2 + \frac{1}{3} = \frac{-6+1}{3} = -\frac{5}{3} \quad x \leq -\frac{5}{3}$$



1ª eq.

2ª eq.

Soluzione:  $[-2, -5/3]$

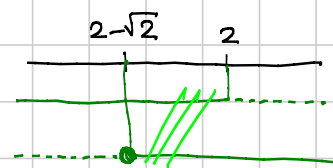
$$\textcircled{10} \quad 2 \log_2(2-x) \leq 1, \quad \log_2(2-x) \leq \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{2}$$

quindi abbiamo

$$\log_2(2-x) \leq \log_2 \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 2-x > 0 & \text{Burocrazia} \\ 2-x \leq \sqrt{2} & \text{Togliere i log.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2-\sqrt{2} \end{cases}$$



$$[2-\sqrt{2}, 2)$$

Cosa succede se "porto dentro il 2"  $2 \log_2(2-x) \stackrel{""}{=} \log_2(2-x)^2$   
 cambia la burocrazia

$2 \log_2(2-x)$  è definita quando  $2-x > 0$ , cioè  $x < 2$

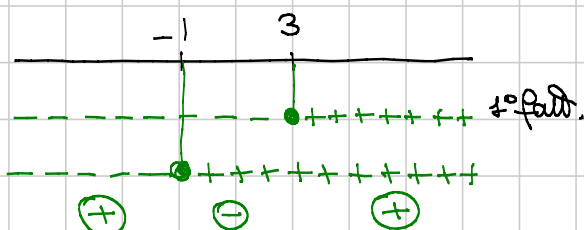
$\log_2(2-x)^2$  è definita quando  $(2-x)^2 > 0$ , cioè per  $x \neq 2$   
 — o — o —

$$\textcircled{11} \quad \underbrace{(x-3)}_{1^\circ \text{ fatt.}} \underbrace{\log_5(x+2)}_{2^\circ \text{ fatt.}} \geq 0$$

Soluzione rapida

$$2^\circ \text{ fattore: } \log_5(x+2) = 0$$

$$x+2 = 1 \quad x = -1$$



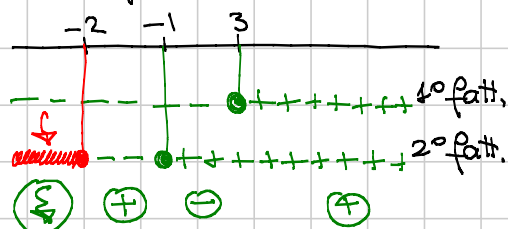
Bisogna studiare bene il  
 2° fattore !!!!

$$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

NO bbbbbb

$$\begin{array}{ll} \log_5(x+2) > 0 & \text{quando } x > -1 \\ \log_5(x+2) = 0 & x = -1 \\ \log_5(x+2) < 0 & -2 < x < -1 \\ \log_5(x+2) \leq 0 & x \leq -2 \end{array}$$

Grafico vero:



$$\text{Soluzione finale: } (-2, -1] \cup [3, +\infty)$$

# RADICI E VALORI ASSOLUTI

Titolo nota

23/09/2009

$$\sqrt{f(x)} \quad \text{Burocrazia: } f(x) \geq 0$$

Stesso discorso per tutte le radici di indice pari:  $\sqrt[4]{\phantom{x}}, \sqrt[6]{\phantom{x}}, \dots$

Per le radici di indice dispari non c'è burocrazia.

## Equazioni con radici di indice pari

### • FORMA SEMPLICE

$$\sqrt{f(x)} = A \quad \text{Numero}$$

- se  $A < 0$  non ci sono soluzioni, perché  $\sqrt{f(x)}$ , quando esiste, è una quantità  $\geq 0$ .

- se  $A \geq 0$  posso fare i quadrati e risolvere  $f(x) = A^2$

### • FORMA GENERALE: $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Metodo "rapido": si fanno i quadrati, si risolve  $f(x) = g^2(x)$ , e si VERIFICANO le soluzioni ottenute sostituendo nell'equazione ORIGINARIA.

### Esempio 1

$$\sqrt{x+3} = 5$$

$$x+3=25$$

$$x=22$$

$$\sqrt{x+3} = -5$$

-5 è negativo  $\Rightarrow$  nessuna soluzione

$$\sqrt{x+3} = 0$$

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

$$\sqrt[4]{2-x} = 3$$

elevo alla quarta:  $2-x=3^4=81$

$$2-x=81 \quad x=-79$$

$$\sqrt[4]{2-x} = -3$$

Negativo  $\Rightarrow$  nessuna soluzione

$$\sqrt[3]{x+3} = 2$$

elevo al cubo:  $x+3=8 \quad x=5$

$$\sqrt[3]{x+3} = -2$$

Nessun problema ad elevare al cubo, perché l'indice è dispari

$$x+3 = (-2)^3 = -8 \quad x=-11$$

$$\sqrt[40]{x-7} = -2$$

Nessuna soluzione

$$\sqrt[39]{x-7} = -1$$

Indice dispari: elevo alla 39

$$x-7 = (-1)^{39} = -1, \quad x-7 = -1 \Rightarrow x=6$$

Esempio 2  $\sqrt{x+2} = x$  Elevo al quadrato  
 $x+2 = x^2$ ,  $x^2 - x - 2 = 0$ ,  $(x-2)(x+1) = 0$   
 $x = \begin{cases} \boxed{2} \rightarrow \text{sostituisco } x=2: \sqrt{4} = 2 & \text{OK} \\ \boxed{-1} \rightarrow \text{sostituisco } x=-1: \sqrt{1} = -1 & \text{NO} \end{cases}$   
 ABUSIVA

Esempio 3  $\sqrt{2x+3} = -x$  Elevo al quadrato  
 $2x+3 = x^2$ ,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  $(x-3)(x+1) = 0$   
 $x = \begin{cases} 3 \rightsquigarrow \sqrt{9} = -3 & \text{NO} \\ -1 \rightsquigarrow \sqrt{1} = -(-1) & \text{OK} \end{cases}$  ABUSIVA  
 Soluzione:  $x = -1$

Esempio 4  $\sqrt{x} = \sqrt{3x+1}$  Elevo:  $x = 3x+1$ ,  $2x = -1$   
 $x = -\frac{1}{2}$

Verifica:  $\sqrt{-\frac{1}{2}} = \sqrt{-\frac{1}{2}}$  No: le radici non hanno senso

Esempio 5  $\sqrt{x} = \sqrt{6x-5}$  Elevo:  $x = 6x-5$ ,  $5x = 5$ ,  $x = 1$   
 Verifica:  $\sqrt{1} = \sqrt{1}$ : OK, soluzione:  $x = 1$ .

### Disequazioni con radici (caso semplice)

$$\sqrt{f(x)} > A$$

- se  $A < 0$ , la disequazione è sempre vera, purché  $f(x) \geq 0$  (burocrazia)

- se  $A \geq 0$  posso elevare, ma devo imporre  $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} \boxed{f(x) \geq 0} \\ f(x) > A^2 \end{cases}$$

INUTILE, perché segue dalla seconda  
 È come fare impuamente il quadrato

$$\sqrt{f(x)} < A$$

- se  $A < 0$ , dovrebbe essere  $\sqrt{f(x)} < 0$ , il che è impossibile  
 Soluzione:  $\emptyset$

- se  $A \geq 0$  posso elevare, ma devo imporre  $f(x) \geq 0$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < A^2 \end{cases}$$

SISTEMA VERO (senza tutte e 2)

Esempio 1  $\sqrt{x+1} > -2$  Sempre purché la burocrazia sia OK:  
 $x+1 \geq 0$ , quindi  $x \geq -1$ .

$\sqrt{x+1} > 2$  Faccio il quadrato:  $x+1 > 4$   
 (la burocrazia segue banalmente):  $x > 3$

$\sqrt{x+2} < -3$  MAI:  $\emptyset$   
 $\sqrt{x+2} < 3$  Elevo al quadrato  
 e impongo burocrazia  $\begin{cases} x+2 < 9 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$

$$x < 7$$

$$x \geq -2$$

$$-2 \leq x < 7$$

Esempio 2  $\sqrt{x^2+9} > 5$  Elevo al quadrato  $x^2+9 > 25$   
 Burocrazia non serve  $x^2 > 16$

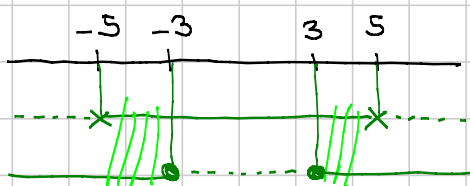
$x^2-16 > 0$  valori esterni:  $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

↑ corretta dopo VIDEO

$\sqrt{x^2+9} > -5$  Sempre purché burocrazia OK:  $x^2+9 \geq 0$  sempre!

$\sqrt{x^2-9} < 4$   $\begin{cases} x^2-9 < 16 \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases}$  Elevo al quadrato  
 Burocrazia

$\begin{cases} x^2 < 25 \\ x^2 \geq 9 \end{cases}$  Valori interni  
 Valori esterni



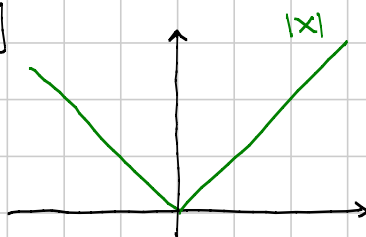
Zona comune:  $(-5, -3] \cup [3, 5)$

Esempio 3  $\sqrt[3]{x+3} \leq -2$

Elevo impunitamente al cubo:  $x+3 \leq (-2)^3$ ,  $x+3 \leq -8$   
 $x \leq -11$

### VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x-4 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq 4 \\ -x+4 & \text{se } x-4 < 0, \text{ cioè se } x < 4 \end{cases}$$

Equazioni con valori assoluti Caso semplice:  $|f(x)| = A$  Numero

- se  $A < 0$  l'equazione non ha soluzioni
- se  $A = 0$  l'equazione si riduce a  $f(x) = 0$
- se  $A > 0$  l'equazione si riduce all'unione delle soluzioni delle 2 equazioni
  - $\rightarrow f(x) = A$
  - $\rightarrow f(x) = -A$

Esempio 1  $|3x+2| = -7$  Nessuna soluzione

$|3x+2| = 0 \Leftrightarrow 3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2/3$

$|3x+2| = 7$  Diventa l'unione delle soluzioni di

$3x+2 = 7, \quad 3x = 5, \quad x = 5/3$

$3x+2 = -7, \quad 3x = -9, \quad x = -3$

Esempio 2  $|x^2-3| = -4$  Nessuna soluzione

$|x^2-3| = 0 \quad x^2-3 = 0 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$|x^2-3| = 4$  Devo risolvere 2 equazioni

$$\left. \begin{array}{lll} x^2-3 = 4 & x^2 = 7 & x = \pm\sqrt{7} \\ x^2-3 = -4 & x^2 = -1 & \text{NULLA} \end{array} \right\} 2 \text{ soluzioni}$$

Diseguazioni caso semplice

$$|f(x)| < A$$

- se  $A < 0$   $MAI: \emptyset$
- se  $A = 0$   $MAI: \emptyset$
- se  $A > 0$  è equivalente al sistema
 
$$\begin{cases} f(x) < A \\ f(x) > -A \end{cases}$$

$$|f(x)| > A$$

- se  $A < 0$  sempre, purché  $f(x)$  abbia senso
- se  $A = 0$  vera quando  $f(x) \neq 0$  (e ovviamente  $f(x)$  ben definito)
- se  $A > 0$  "valori esterni" è equivalente a fare l'unione di  $f(x) < -A$  e  $f(x) > A$

Esempi

$$|3x+1| < -2$$

$$MAI: \emptyset$$

$$|3x+1| > -2$$

$$\text{Sempre: } \mathbb{R}$$

$$|3x+1| \leq 0$$

$$\text{solo quando } 3x+1=0, \text{ cioè } x=-1/3$$

$$|3x+1| \geq 0$$

$$\text{Sempre: } \mathbb{R}$$

$$|3x+1| > 0$$

$$\text{sempre, tranne quando si annulla } x \neq -1/3$$

$$|3x+1| < 8 \text{ "valori interni"} \quad (-3, 7/3)$$

$$\begin{cases} 3x+1 < 8 \\ 3x+1 > -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 7 \\ 3x > -9 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 7/3 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$|3x+1| > 10 \text{ "valori esterni"}$$

$$\begin{array}{lll} 3x+1 > 10 & 3x > 9 & x > 3 \\ 3x+1 < -10 & 3x < -11 & x < -11/3 \end{array}$$

$$\text{Unione: } (-\infty, -11/3) \cup (3, +\infty)$$

Esempio

$$|x^2-2| > 1 \text{ "Valori esterni"}$$

$$x^2-2 > 1$$

$$x^2-2 < -1$$

e poi prendo l'unione

$$x^2-2 > 1, \quad x^2 > 3, \quad (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$

$$x^2-2 < -1, \quad x^2 < 1, \quad (-1, 1)$$

Soluzione finale:

$$(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$



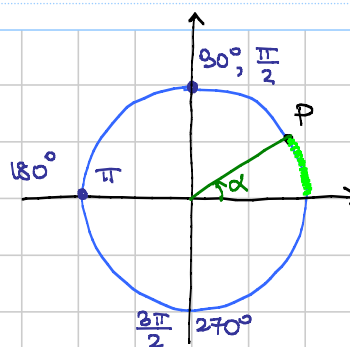
# TRIGONOMETRIA

Titolo nota

24/09/2009

Angoli e circonferenza  
trigonometrica.

Per individuare un p.to si può  
usare l'angolo  $\alpha$  o la lunghezza  
dell'arco.



$$\text{GRADI SESSAGESIMALI : RADIANI} = 360^\circ : 2\pi$$

Hanno senso anche misure al di fuori di  $0-360^\circ$  e  $[0, 2\pi]$

Esempi  $400^\circ$  individua lo stesso punto dato da  $40^\circ$ , perché

$$400^\circ = 360^\circ + 40^\circ$$

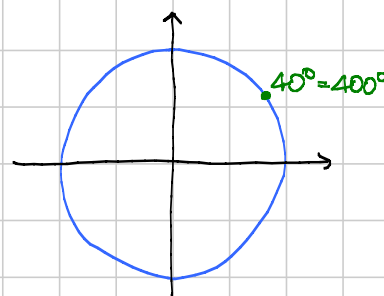
un giro  $\uparrow$   $40^\circ$  nel 2° giro

Lo stesso punto lo individua con  $-320^\circ$

$180^\circ$  stesso p.to di  $180^\circ + 360^\circ = 540^\circ$  o di  $-180^\circ$

In radianti:  $\pi$  individua lo stesso punto

di  $-\pi$  o  $3\pi$ , o in generale di  $\pi + 2k\pi$  con  
 $k$  intero.



Funzioni trigonometriche elementari:  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$

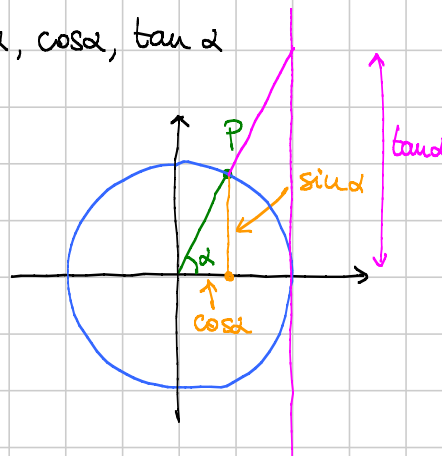
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{definita quando } \cos \alpha \neq 0$$

$$90^\circ \quad \frac{\pi}{2} \quad \sin = 1, \cos = 0, \tan \text{ Non Def.}$$

$$30^\circ \quad \frac{\pi}{6} \quad \sin = \frac{1}{2}, \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$45^\circ \quad \frac{\pi}{4} \quad \sin = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan = 1$$

$$60^\circ \quad \frac{\pi}{3} \quad \sin = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos = \frac{1}{2}, \tan = \sqrt{3}$$



Archi associatiDato  $\alpha$ , i suoi archi associati sono

$$-\alpha, \pi \pm \alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

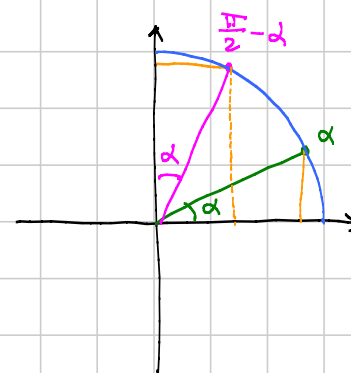
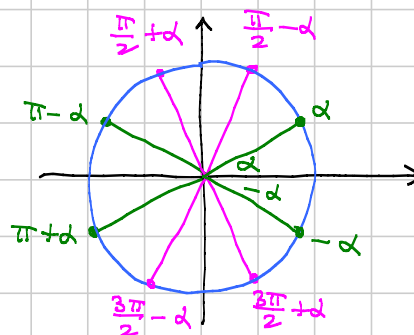
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

Esempi

$$120^\circ \quad \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos = -\frac{1}{2}$$

$$150^\circ \quad \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin = \frac{1}{2}$$

$$\cos = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$135^\circ \quad \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$300^\circ \quad \frac{5\pi}{3}$$

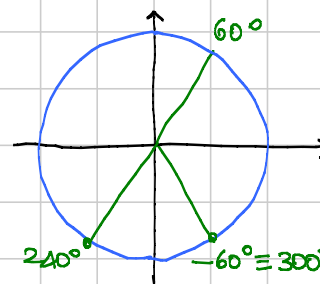
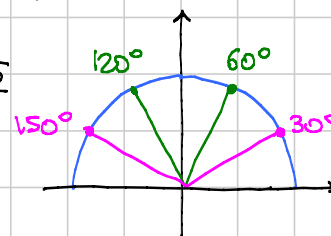
$$\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos = \frac{1}{2}$$

$$240^\circ \quad \frac{4\pi}{3}$$

$$\sin = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos = -\frac{1}{2}$$

FORMULE DI ADDIZIONERELAZIONE FONDAM.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

Esempi  $15^\circ$   $\frac{\pi}{12}$

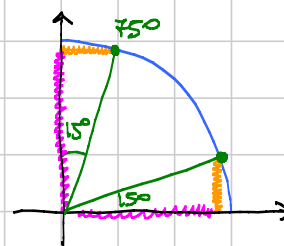
$$\begin{aligned}\cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(15^\circ) &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Si poteva ottenere la stessa cosa osservando che  $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$

$$\cos(75^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sin(15^\circ) \quad (\text{archi associati})$$

$$\sin(75^\circ) = \cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (\text{archi associati})$$



Equazioni semplici

①  $\sin x = 3$  Nessuna soluzione

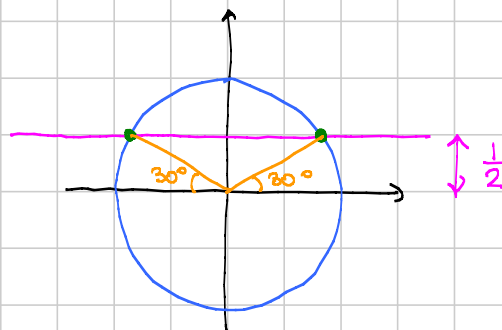
$\sin x = -\sqrt{2}$  Nessuna soluzione

In generale:  $\sin x = \lambda$  oppure  $\cos x = \lambda$  non hanno soluzioni quando  $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

②  $\sin x = \frac{1}{2}$  Scritta così le soluzioni sono infinite. Data una soluzione posso aggiungere multipli di  $2\pi$

Guardo il cerchio !!

Risolvere  $\sin x = \frac{1}{2}$  vuol dire trovare i p.ti della circ. trigonometrica che hanno ordinata (coordinata y)  $= \frac{1}{2}$



Tra 0 e  $2\pi$ , cioè nel primo giro, ci sono 2 soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

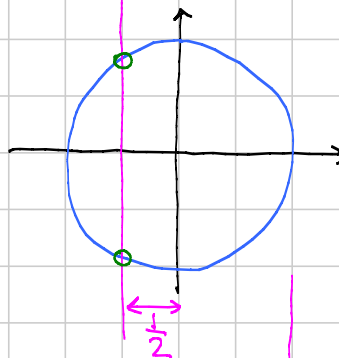
- ③  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Cerco i punti della circonferenza con coordinata  $x$  uguale a  $-\frac{1}{2}$

Tira 0 e  $2\pi$  ho 2 soluzioni:

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{4\pi}{3}$$

radianti, o più brutalmente pti della circ.



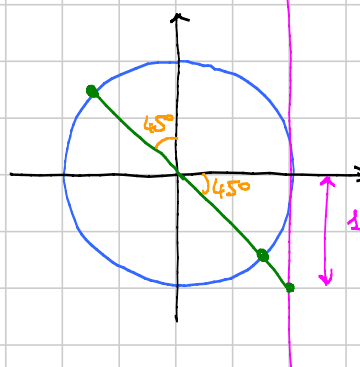
- ④  $\tan x = -1$

In  $[0, 2\pi]$  ho 2 soluzioni

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad (135^\circ)$$

$$x = \frac{7\pi}{4} \quad (315^\circ)$$

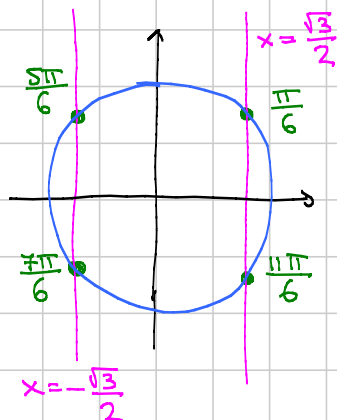
Osservazione:  $\frac{7\pi}{4}$  rappresenta lo stesso punto di  $-\frac{\pi}{4}$ .



- ⑤  $4\cos^2 x = 3$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(sto pensando  $y = \cos x : 4y^2 = 3$   
eq. di 2° grado  $y = \pm \sqrt{3}/2$ )



Cerco i punti che hanno ascissa  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  oppure  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ho quindi 4 soluzioni in  $[0, 2\pi]$ :

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

### FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Esercizio 1 Se  $\sin x = \frac{2}{3}$  e  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , quanto vale  $\cos x$ ?

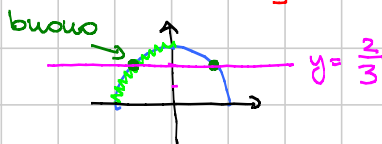
Risposta:  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ , quindi  $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

NO!!! Da  $\cos^2 x = \frac{5}{9}$ , posso solo dedurre che

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Ora devo scegliere il segno sfruttando che  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Secondo quadrante  $\Rightarrow$  segno  $\ominus$

Conclusione:  $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

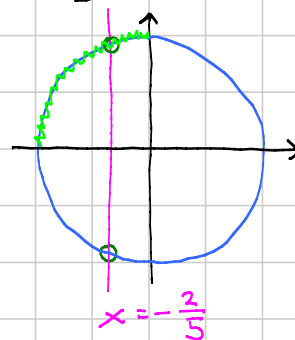


Esercizio 2 Se  $\cos x = -\frac{2}{5}$  e  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , quanto vale  $\sin x$ ?

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Devo scegliere il segno. Se  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , il segno è quello positivo.



Esercizio 3  $\tan x + \sin(2x) = 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \left( \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x \right) = 0 \quad \sin x \frac{1 + 2 \cos^2 x}{\cos x} = 0$$

Deve annullarsi uno dei 2 fattori al numeratore (ed essere il denominatore  $\neq 0$ )

$$\sin x = 0$$

In  $[0, 2\pi]$  le soluzioni sono  $x = 0, \pi, 2\pi$

$$1 + 2 \cos^2 x = 0$$

Nessuna soluzione perché

$$1 + 2 \cos^2 x \geq 1$$

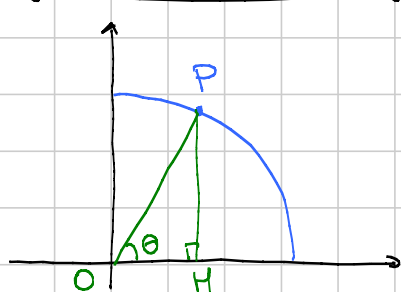
(Volendo si può porre  $y = \cos x$  e ottenere  $1 + 2y^2 = 0$  che è un'eq. di 2° grado senza soluzioni)

# TRIGONOMETRIA 2

Titolo nota

24/09/2009

## Trigonometria e triangoli rettangoli



Ogni triangolo rettangolo è simile ad un triangolo rettangolo "che si forma nella circonferenza trigonometrica".

Triangoli simili = lati in proporzione

$$\frac{OH}{BA} = \frac{PH}{CA} = \frac{OP}{BC}, \text{ cioè } \frac{\cos \theta}{BA} = \frac{\sin \theta}{CA} = \frac{1}{BC}$$

Da qui si ricavano le relazioni trigonometriche nei triangoli rettangoli, cioè

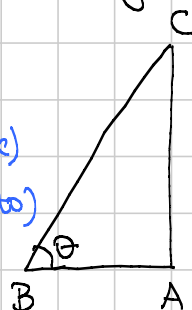
$$BA = BC \cdot \cos \theta$$

CATETO = IPOTENUSA  $\cdot$  cos (angolo adiac)

$$CA = BC \cdot \sin \theta$$

CATETO = IPOTENUSA  $\cdot$  sin (angolo opposto)

$$\frac{CA}{BA} = \frac{BC \cdot \sin \theta}{BC \cdot \cos \theta} = \tan \theta$$

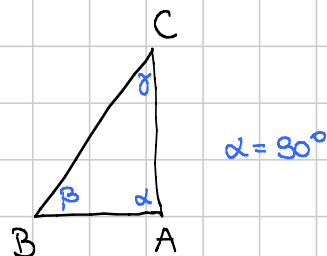


Esercizi ① Sapendo che  $AB = 3$  e  $\cos \beta = \frac{2}{5}$ , determinare CB

Applico

$$AB = BC \cdot \cos \beta$$

$$3 = BC \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$



② Sapendo  $AB = 3$  e  $\cos \beta = \frac{2}{5}$ , determinare  $\sin \gamma$   
 Ho che  $\gamma = 90^\circ - \beta$ , quindi  $\sin \gamma = \sin (90^\circ - \beta) = \cos \beta = \frac{2}{5}$   
 ↑  
 archi associati.

- ③ Sapendo  $AB = 3$  e  $\cos \beta = \frac{3}{4}$ , determinare  $AC$ .

Solita formula:

$$BC \cdot \cos \beta = AB$$

$$BC \cdot \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow BC = 4$$

$$AC^2 = BC^2 - BA^2 = 16 - 9 = 7$$

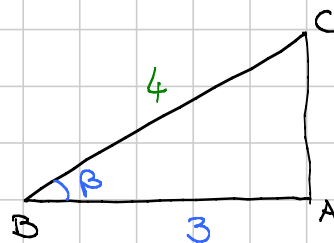
$$\Rightarrow AC = \sqrt{7}$$

Alternativa: calcolo  $\sin \beta$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}, \text{ quindi } \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Scelgo segno + perché  $\beta \in [0, 90^\circ]$ , quindi  $\sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ . Formula

$$AC = BC \cdot \sin \beta = 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}.$$



- ④ Sapendo che  $AB = 5$  e  $\cos \gamma = \frac{3}{7}$ , determinare  $AC$ .

$$AB = BC \cdot \sin \gamma \quad 5 = BC \cdot \sin \gamma$$

$$AC = BC \cdot \cos \gamma \quad AC = BC \cdot \frac{3}{7}$$

$$\text{Solve } \sin \gamma: \sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49}$$

$$\text{Quindi } \sin \gamma = \frac{\sqrt{40}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \quad (\text{ho scelto il segno perché...})$$

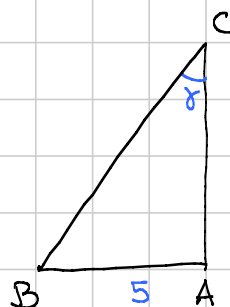
$$\text{Applico } AB = BC \cdot \sin \gamma: 5 = BC \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} \Rightarrow BC = \frac{35}{2\sqrt{10}}$$

$$\text{Applico } AC = BC \cdot \cos \gamma = \frac{\cancel{35}^5}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{\cancel{7}} = \frac{15}{2\sqrt{10}}$$

$$\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan \beta = 1^\circ \text{ modo} = \frac{AC}{AB} \text{ e si calcola}$$

$$2^\circ \text{ modo} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{1}{\tan \gamma} = \frac{3}{2\sqrt{10}}$$



⑤  $AB = 2$  . Area = 3 .  $\cos \gamma = ?$

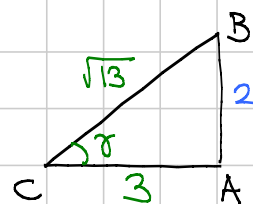
$$\text{Area} = \frac{AB \cdot AC}{2} \quad 3 = \frac{2 \cdot AC}{2}$$

$$AC = 3$$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 = 9 + 4 = 13 \quad CB = \sqrt{13}$$

↑ Pitagora

Solita formula:  $AC = CB \cdot \cos \gamma \Rightarrow 3 = \sqrt{13} \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}$



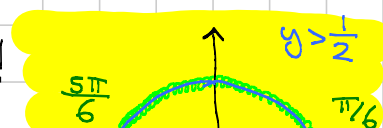
### Disuguaglianze trigonometriche.

Banali :  $\sin x \leq 2$  sempre  $\sin x > 4$   $\emptyset$   
 $\cos x \geq -3$  sempre  $\cos x < -1$   $\emptyset$

Esempio 1  $\sin x \geq \frac{1}{2}$  . Guardo il cerchio!

Cerco i punti della circonfer. trigo. con coordinata  $y \geq \frac{1}{2}$

Nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  la soluzione è  $[\pi/6, 5\pi/6]$

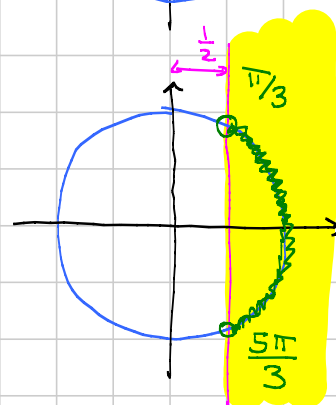


Esempio 2  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

Cerco i punti con coordinata  $x \geq \frac{1}{2}$ .

In  $[0, 2\pi]$  la soluzione è :

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$



Non tenendo conto di  $[0, 2\pi]$  la soluzione si può scrivere come:

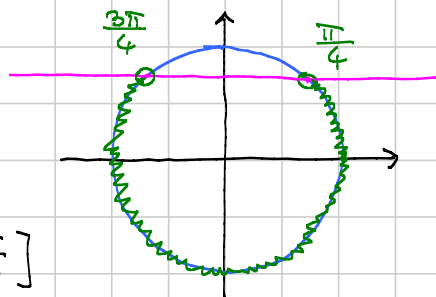
$$\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{Descrive lo stesso insieme}$$

Esempio 3  $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Scritto in  $[0, 2\pi]$ :  $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, 2\pi]$

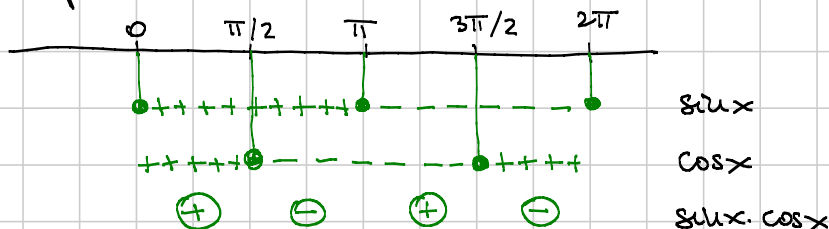
Altri 2 modi di scriverlo:  $[\frac{3\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}]$   
 $= [\frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$

$[-\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$



Esempio 4  $\sin(2x) > 0$   ~~$2\sin x \cos x > 0$~~

Disuguaglianza con un prodotto. Studio  $\sin x$  e  $\cos x$  separatamente



$\sin(2x) > 0$  dove  $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$

Altro modo:  $\sin(2x) > 0$   $\sin A > 0 \Leftrightarrow 0 < A < \pi$  (with a red arrow pointing to  $\pi$  and the word "NO" written above it)

$\sin(2x) > 0 \leadsto 0 < 2x < \pi \leadsto 0 < x < \frac{\pi}{2}$

In questo modo è venuto solo 1 pezzo !!!

In realtà  $\sin A > 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi < A < \pi + 2k\pi$

$\sin(2x) > 0 \Leftrightarrow 0 + 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi$

$0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Quali sono i valori di  $k$  per cui ottengo soluzioni nel 1° giro?

$k=0 \rightarrow 0 < x < \pi/2$

$k=1 \rightarrow \pi < x < \frac{3\pi}{2}$  e questo è il secondo pezzo

Quando si divide per 2, il secondo giro diventa la seconda parte del 1° giro.

Esempio 5

$$2 \sin^2 x + \sin(2x) \leq 2$$

$$\sin(2x) \leq 2 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(2x) \leq 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\sin(2x) \leq 2 \cos^2 x$$

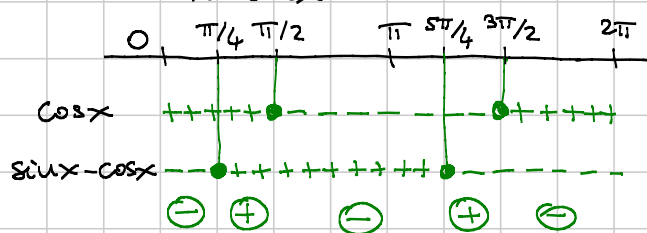
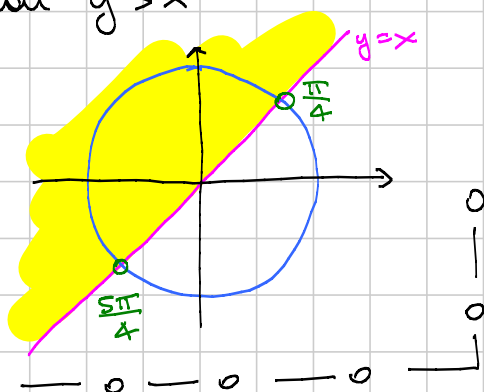
$$2 \sin x \cos x \leq 2 \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x - \cos^2 x \leq 0 \quad \cos x (\sin x - \cos x) \leq 0$$

Devo studiare il segno di  $\cos x$  e di  $\sin x - \cos x$

Vediamo dove  $\sin x - \cos x > 0$ ,  
cioè  $\sin x > \cos x$ .

Sono i punti della circ. trig.  
con  $y > x$



$$\text{Mi serveva } \leq 0 : [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$$

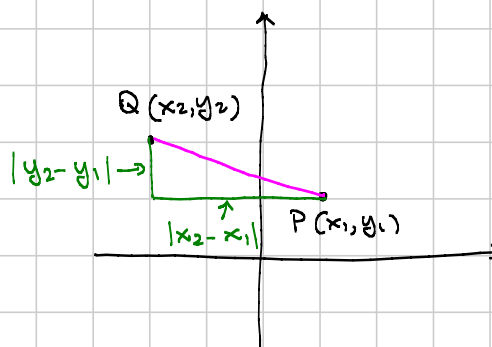
# GEOMETRIA ANALITICA

Titolo nota

25/09/2009

Piano Cartesiano : insieme delle coppie  $(x, y)$  di numeri reali.  
Ogni coppia si identifica con un punto.

$$\text{Distanza } (P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



## EQUAZIONE DELLA RETTA

- Forma esplicita  $y = mx + n$
- Forma implicita  $ax + by + c = 0$

Vantaggi forma esplicita : due rette coincidono se e solo se hanno lo stesso  $m$  e lo stesso  $n$  (in forma implicita non è vero :

$x + 2y + 3 = 0$  e  $2x + 4y + 6 = 0$  sono la stessa retta, ma hanno in forma implicita coeff. diversi)

Svantaggi forma esplicita : non prende le rette verticali  $x = a$ .

Significato dei coefficienti in forma esplicita

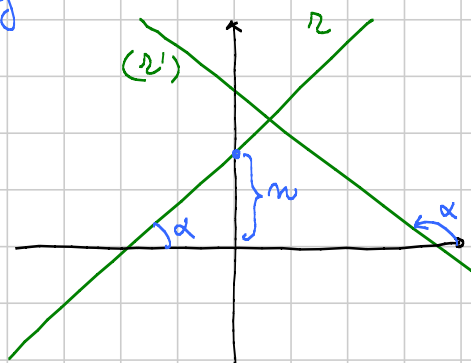
$$y = \boxed{m}x + \boxed{n}$$

$\uparrow$  coeff. angolare       $\uparrow$  quota a cui la retta interseca l'asse y

In particolare  $m = \tan \alpha$ , dove  $\alpha$  è l'angolo formato tra la retta e il semiasse positivo delle  $x$ .

In particolare :

- $m > 0 \Rightarrow$  la retta "sale" ( $r$ )
- $m = 0 \Rightarrow$  la retta è // asse  $x$
- $m < 0 \Rightarrow$  la retta "scende" ( $r'$ )



- $m > 0 \Rightarrow$  la retta interseca asse y sopra l'origine

Coeff. angolare = 2 vuol dire  
"se vado a dx di 1, allora salgo di 2".

Infatti

$$2 = \frac{PH}{OH} = \tan \alpha = m$$

Coeff. angolare =  $\frac{1}{2}$  perché se vado a dx di 2 salgo di 1.

Equazione:  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , oppure  
(in forma implicita)  $2y - x - 2 = 0$

$m = -1$  (deduco dal punto di incontro con l'asse y)

$m = -2$  (lo deduco dal fatto che quando vado a dx di 1, scendo di 2)

(Volevo è anche il rapporto tra il cateto verticale ed il cateto orizzontale

tra i triangoli che hanno cateti // agli assi e ipotenusa sulla retta.

**RETTA PER 2 PUNTI** Scrivere la retta passante per  $(-1, 2)$  e  $(1, 3)$

Approccio "formale": scrivo  $y = mx + n$

e impongo di passare per i 2 punti

$$\begin{cases} 2 = m(-1) + n & \text{Passare per } (-1, 2) \\ 3 = m \cdot 1 + n & \text{Passare per } (1, 3) \end{cases}$$

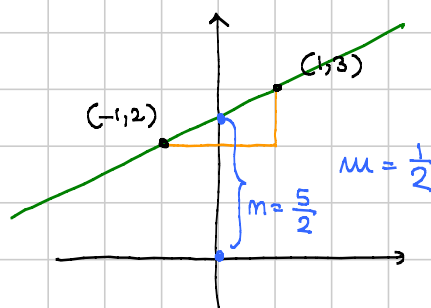
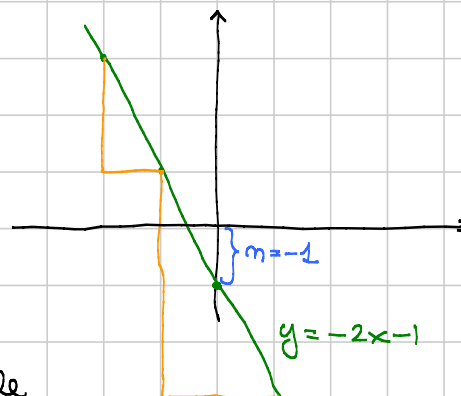
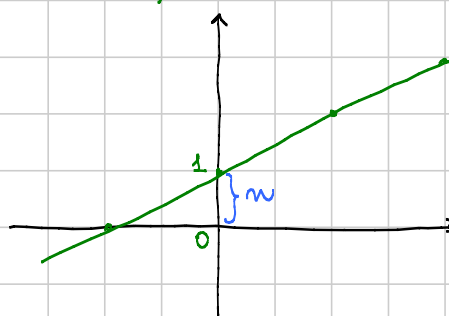
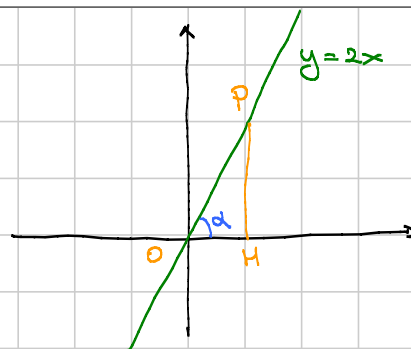
Otengo un sistema in  $m$  ed  $n$  che si

$$\text{risolve: } \begin{cases} 2 = -m + n \\ 3 = m + n \end{cases} \quad \text{Sommo:} \quad 5 = 2n \Rightarrow n = \frac{5}{2}$$

Ricavo  $m$  dalla 2<sup>a</sup> equazione (o dalla 1<sup>a</sup>):  $m = 3 - n = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

Equazione richiesta:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$



## RETTE PARALLELE E PERPENDICOLARI

Prendiamo 2 rette:  $y = m_1x + n_1$ ,  $y = m_2x + n_2$ . Allora

- Le 2 rette sono PARALLELE se e solo se  $m_1 = m_2$   
(infatti: parallele  $\Leftrightarrow$  stesso angolo con semiasse  $x$  positivo  
 $\Leftrightarrow$  stessa tangente  $\Leftrightarrow$  stesso coeff. angolare)

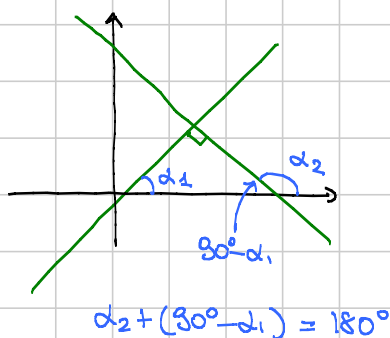
- Le 2 rette sono PERPENDICOLARI se e solo se  $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

La relazione tra i 2 angoli è:

$$\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1 \text{ e}$$

$$m_2 = \tan \alpha_2 = \tan(90^\circ + \alpha_1) = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

↑  
angoli associati



Esercizi ① Calcolare l'eq. della retta passante per (2,3) e parallela alla retta  $2x - 5y + 6 = 0$

**1° passo** Ricavo coeff. angolare di  $2x - 5y + 6 = 0$ ,  $5y = 2x + 6$   
 $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$

**2° passo** La retta richiesta è // a quella data, quindi ha coeff. angolare  $= \frac{2}{5}$ ;  $y = \frac{2}{5}x + n$

**3° passo** Determino  $n$  imponendo di passare per (2,3). Sostituisco (2,3)  
 $3 = \frac{2}{5} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$

L'equazione finale è  $y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$ , oppure in forma implicita  $2x - 5y + 11 = 0$ .

Verifico che passi effettivamente per il punto:  $2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 11 = 0$   
↑ ↑  
x y

Esercizio 2 Det. la retta perpendicolare a  $x+3y-4=0$  e passante per  $(3,-1)$ .

1° passo  $x+3y-4=0$ ,  $3y = -x+4$ ,  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

2° passo La retta che sto cercando avrà coeff. ang. 3  
 $y = 3x + n$

3° passo Impongo di passare per  $(3,-1)$ :  $-1 = 3 \cdot 3 + n \Rightarrow n = -10$   
 $\uparrow$   
y  $\uparrow$   
x

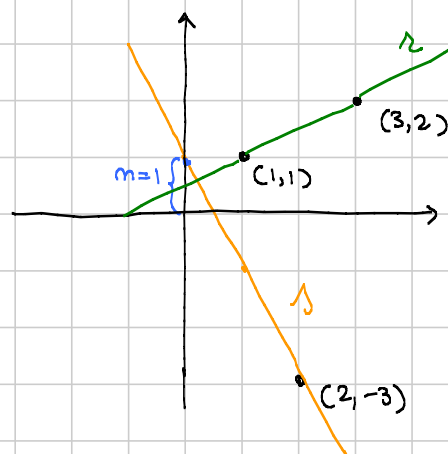
Equazione richiesta:  $y = 3x - 10$   
— 0 — 0 —

Esercizio 3 Det. eq. retta che passa per  $(2,-3)$  ed è perpendicolare alla retta passante per  $(1,1)$  e  $(3,2)$

Soluzione "con i quadretti".

- Mi serve il coeff. angolare di  $r$ :  $\frac{1}{2}$
- Il coeff. ang. della retta richiesta è  $-2$
- A questo punto è chiaro che deve essere  $m = -2$ .

Equazione di  $r$ :  $y = -2x + 1$



Approccio sistematico:

1° passo: scrivere l'equazione di  $r$  imponendo di passare per  $(1,1)$  e  $(3,2)$ : si ottiene  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

2° passo: scrivere la retta  $s$  incognita nella forma  $y = -2x + n$

3° passo: ricavare  $n$  imponendo di passare per  $(2,-3)$ :

$$-3 = -2 \cdot (2) + n \Rightarrow n = 1.$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
y x  
— 0 — 0 —

# EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dati: centro  $C = (x_0, y_0)$  raggio  $R > 0$

Circonfereenza = insieme dei punti  $P = (x, y)$  la cui distanza da  $C$  è uguale ad  $R$

$$\text{distanza di } (x, y) \text{ da } (x_0, y_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

Faccendo i quadrati:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

Eq. scritta usando come parametri  $x_0, y_0, R$ .

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Si arriva in questa forma tutte le volte che  $x^2$  e  $y^2$  hanno lo stesso coefficiente.

Dati  $a, b, c$ , trovare  $x_0, y_0, R$ . Confrontando le equazioni si ha subito che

$$a = -2x_0$$

$$x_0 = -\frac{a}{2}$$

$$b = -2y_0$$

$$y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Osservazione: può accadere che  $R^2$  diventi  $\leq 0$ . In quel caso l'equazione non rappresenta una circonferenza, ma l'insieme vuoto (se  $R < 0$ ) oppure un solo punto se  $R = 0$ .

Esempi ①

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{L'unica sol. è il punto } (0, 0)$$

$$x^2 + y^2 + 1 = 0 \quad \text{Impossibile (nessun punto la soddisfa)}$$

$$\text{Faccendo i conti verrebbe fuori } R^2 = -1.$$

Esempio 2

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$$

$$a = -4, b = 6, c = -11$$

$$\text{Centro } (x_0, y_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (2, -3)$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{16}{4} + \frac{36}{4} + 11 = 4 + 9 + 11 = 24 \Rightarrow R = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Modo alternativo di calcolare il raggio:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 11 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 11 - 4 - 9 = 0$$

compensavo  
quelli aggiunti

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 24$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad x_0=2, y_0=-3, R^2=24$$

Esempio 3

$$2x^2 + 2y^2 - 7x + 5y = 0 \quad \text{centro e raggio.}$$

$$\text{Divido per 2: } x^2 + y^2 - \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}y = 0.$$

$$x_0 = -\frac{a}{2} = \frac{7}{4}, \quad y_0 = -\frac{b}{2} = -\frac{5}{4} \quad C = \left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$$

A questo punto so che la circ. passa per (0,0), conosco il centro, quindi  $R = \text{distanza di } C \text{ dall'origine}$

$$R^2 = \frac{49}{16} + \frac{25}{16} = \frac{74}{16} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{74}}{4}$$

Esempio 4

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{Circ. che passa per } (0,0)$$

Calcolare l'eq. della retta tangente alla circ. in (0,0)

Metodo meccanico

Scrivo l'eq. della generica retta passante per l'origine:  $y = mx$  (ci sarebbe anche il problema della retta verticale).

Risolvendo il sistema trovo le intersezioni tra la retta e la circonferenza. Sostituisco  $y$  nella 2ª eq. Imponendo  $\Delta = 0$  trovo quando è tangente.

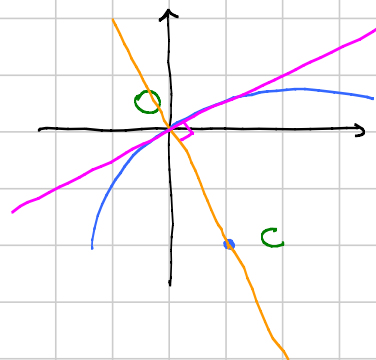
Metodo alternativo:

- trovo il centro  $C$
- trovo la retta passante per  $C$  e  $O$
- trovo la  $\perp$  alla precedente passante per  $O$ .

\* Centro:  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$        $x_0 = -\frac{a}{2} = 1, \quad y_0 = -\frac{b}{2} = -2$

\* Retta  $CO$ :  $y = -2x$

\* Retta tangente  $y = \frac{1}{2}x + m$ ,  
ma dovendo passare per  $(0,0)$  è  $m=0$   
 $y = \frac{1}{2}x$



Oss.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 4y &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 5 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 5 \end{aligned}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 $x_0=1$                        $y_0=-2$                        $R=\sqrt{5}$

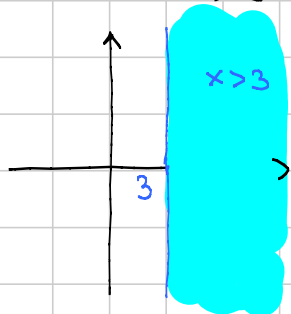
# INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota

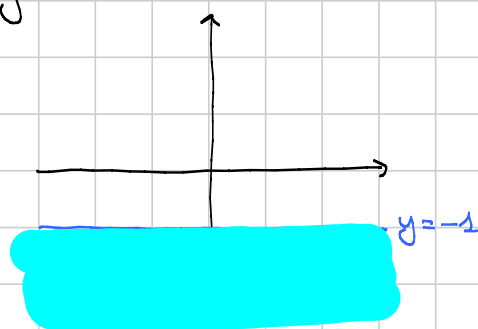
25/09/2009

Problema generale: disegnare l'insieme dei p.ti  $(x,y)$  del piano che verificano una disequazione od un sistema di disequazioni nelle variabili  $x$  e  $y$ .

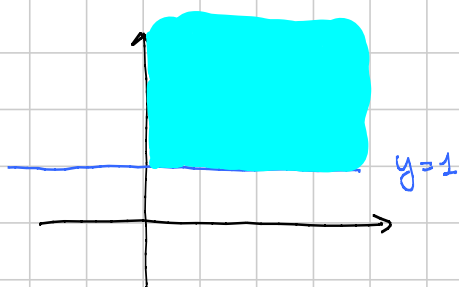
① Punti  $(x,y)$  del piano con  $x \geq 3$



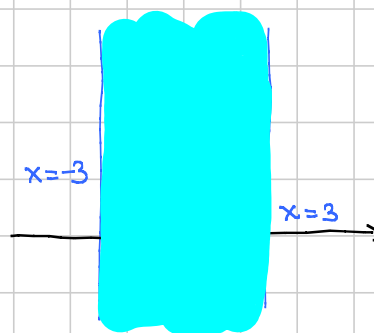
② Punti  $(x,y)$  del piano con  $y \leq -1$



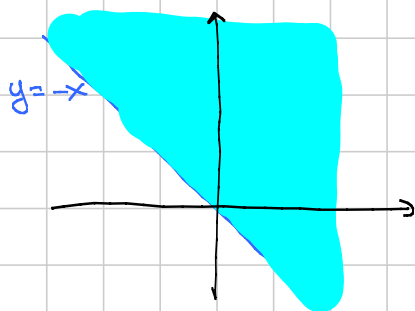
③ Punti...  $x \geq 0, y \geq 1$   
Due condizioni che devono essere vere entrambe.



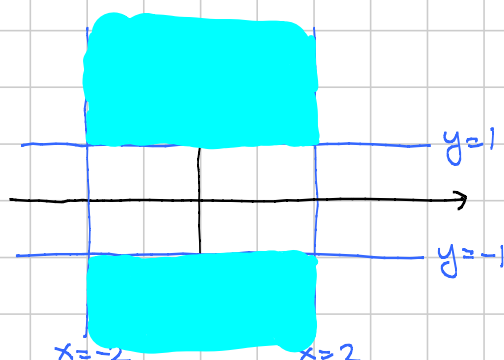
④ Punti...  $|x| \leq 3$ .  
È come dire  $-3 \leq x \leq 3$



⑤ Punti....  $x+y \geq 0$ .  
È come dire  $y \geq -x$   
È come dire SOPRA la retta  $y = -x$



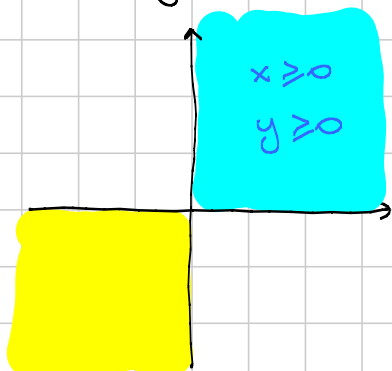
⑥ Punti...  $|x| \leq 2, |y| \geq 1$   
 $y \geq 1$  opp.  $y \leq -1$



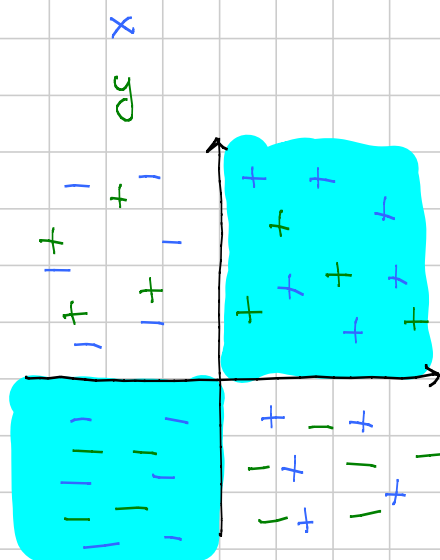
⑦ Punti ...  $xy \geq 0$

Ci sono 2 zone che vanno bene:

- $x \geq 0, y \geq 0$  
- $x \leq 0, y \leq 0$  

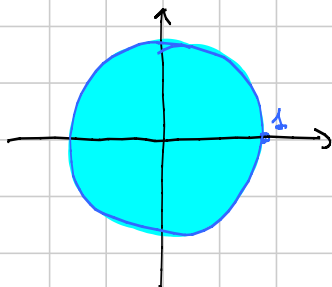


Metodo alternativo

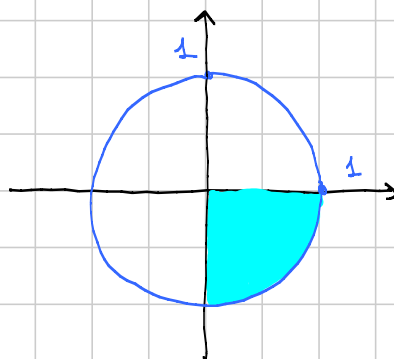


⑧ Punti ...  $x^2 + y^2 \leq 1$

È come dire: distanza dall'origine  $\leq 1$ , cioè DENTRO la circonferenza



⑨ Punti ...  $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0$   
 Dentro la circ. 4° quadrante



⑩  $x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 1$$

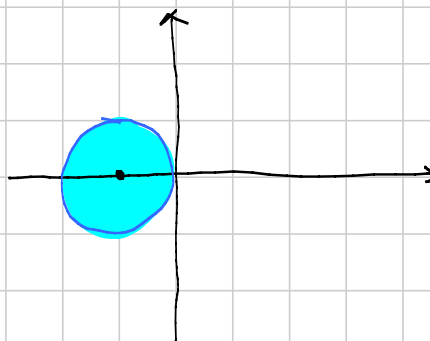
$$(x+1)^2 + (y-0)^2 \leq 1$$

$$\uparrow$$
  
 $x_0 = -1$

$$\uparrow$$
  
 $y_0 = 0$

$$\uparrow$$
  
 $R = 1$

Vuol dire: dentro la circonferenza con centro in  $(-1, 0)$  e raggio 1.

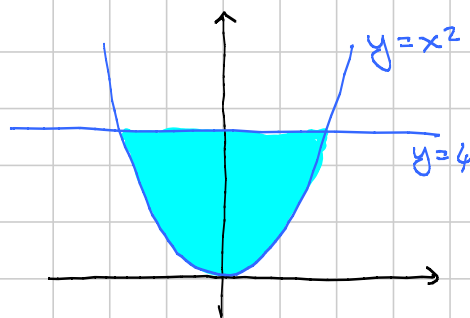


⑪ Punti...  $x^2 \leq y \leq 4$

Sono 2 condizioni:

$y \geq x^2 \rightarrow$  Sopra parabola  $y = x^2$

$y \leq 4 \rightarrow$  Sotto retta  $y = 4$



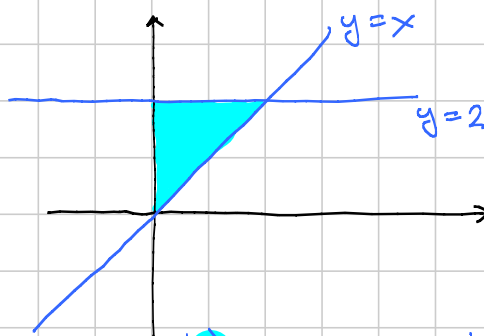
⑫ Punti...  $0 \leq x \leq y \leq 2$

Sono 3 condizioni:

$x \geq 0 \rightarrow$  1° o 4° quadrante

$y \geq x \rightarrow$  Sopra retta  $y = x$

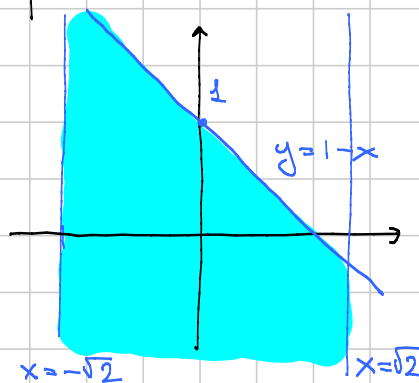
$y \leq 2 \rightarrow$  sotto retta  $y = 2$



⑬ Punti...  $x+y \leq 1, x^2 \leq 2$

$x+y \leq 1, y \leq 1-x \rightarrow$  Sotto retta  $y = 1-x$

$x^2 \leq 2$ , cioè  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$



⑭ Punti...  $x(x+y+1) \geq 0$

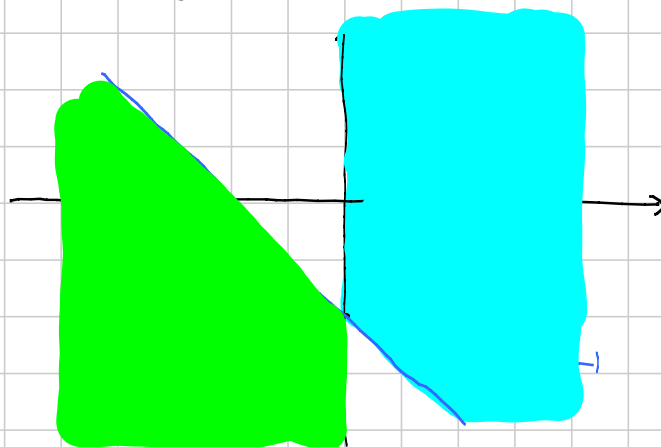
Ci sono 2 zone che vanno bene

\*  $x \geq 0, x+y+1 \geq 0$

\*  $x \leq 0, x+y+1 \leq 0$

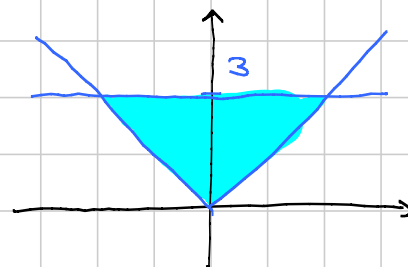
$x \geq 0, y \geq -x-1$

$x \leq 0, y \leq -x-1$



⑮ Punti...  $|x| \leq y \leq 3$

- $|x| \leq y \rightarrow y$  sopra grafico di  $|x|$
- $y \leq 3 \rightarrow$  sotto retta  $y=3$

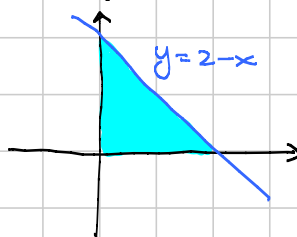


⑯  $|x| + |y| \leq 2$  Meccanicamente distinguo 4 zone

$$1^{\circ} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ -x+y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ x-y \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ -x-y \leq 2 \end{cases}$$

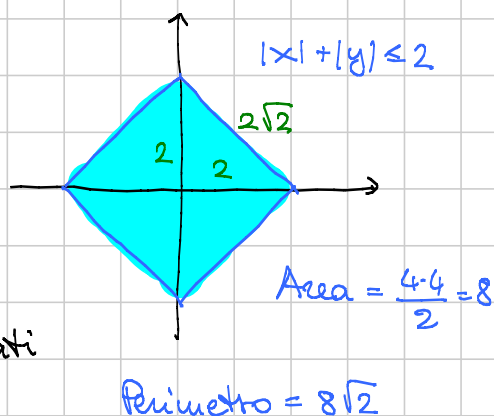
Dovrei studiare le 4 zone e poi fare l'UNIONE

$$1^{\circ} \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq 2-x \end{cases}$$



Oss. L'insieme iniziale è simmetrico rispetto agli assi, quindi fatto il pezzo nel 1° quadrante è fatto tutto.

- È un ROMBO perché ha i lati uguali
- È un quadrato perché ha anche gli angoli uguali
- È un rettangolo perché ha gli angoli uguali
- È un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli.



Area Rombo = prodotto diagonali  $\cdot \frac{1}{2}$

Perimetro del rombo date le diagonali  $d_1$  e  $d_2$ . Perimetro = 4 lato

$$= 4 \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4}} = 2 \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

