

Precorso di Matematica 2008

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 1. Frazioni	4
Lezione 2. Potenze e radicali	9
Lezione 3. Esercizi sulle potenze. Polinomi e scomposizioni notevoli	15
Lezione 4. Divisione tra polinomi	21
Lezione 5. Disequazioni e sistemi di disequazioni di primo e secondo grado	27
Lezione 6. Disequazioni con prodotti e quozienti	33
Lezione 7. Esponenziali e logaritmi	38
Lezione 8. Equazioni e disequazioni con esponenziali e logaritmi	44
Lezione 9. Equazioni e disequazioni con potenze	49
Lezione 10. Equazioni e disequazioni con valori assoluti	55
Lezione 11. Trigonometria: introduzione	61
Lezione 12. Trigonometria: formule, equazioni e disequazioni	68
Lezione 13. Risoluzione di triangoli	74
Lezione 14. Esercizi vari di trigonometria	80
Lezione 15. Geometria analitica: equazione della retta	85
Lezione 16. Geometria analitica: equazione della circonferenza	90
Lezione 17. Geometria analitica: esercizi parametrici e insiemi del piano	96
Lezione 18. Esercizi sugli insiemi del piano	101
Lezione 19. Geometria piana e solida: esercizi	106
Lezione 20. Svolgimento del test di recupero OFA di settembre 2007	111

MASSIMO GOBBINO → PRECORSO

Titolo nota

15/09/2008

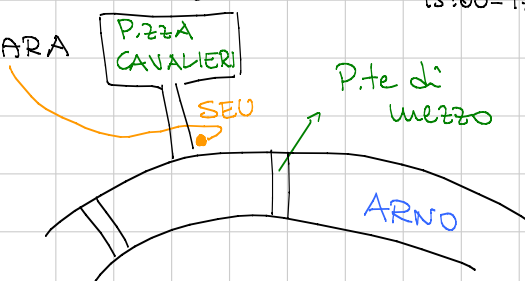
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad 2^7 + 2^8 = 2^{15}$$

— o — o —

Esercizi: Versione "VECCHIA": HOME - PAGE

Versione "UFFICIALE": SERVIZIO EDITORIALE UNIVERSITARIO
 LU-VE MATTINO ≤ 13:00
 MAE GI anche 15:00-17:00

VIA CURTATONE E MONTANARA



FRAZIONI E SEMPLICI EQUAZIONI

a	b	$a+b$	$a \cdot b$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{a+b}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$$

— o —

$$a = \frac{1}{3} \quad a+b = \frac{1}{2} \quad b = (a+b) - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6}$$

$$a \cdot b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2 \quad = \frac{1}{6}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad a \cdot b = \frac{1}{2} \quad b = \frac{a \cdot b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$a+b = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2+9}{6} = \frac{11}{6} ; \quad \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{11}{6}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{2}{11}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \quad a = \frac{b}{2} \quad 2a = b \quad b = 2a = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \quad \text{Moltiplico a dx e sx per 2}$$

$$\frac{a}{b} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \quad \frac{2a}{b} = 1 \quad \text{Moltiplicando per b "sposto il b a dx"}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} \quad \cancel{2}a = \cancel{a} + b \quad a = b \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$a = 2 \quad b = \frac{1}{3} \quad a+b = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3} ; \quad a \cdot b = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 = 6 ; \quad \frac{a}{a+b} = 2 : \frac{7}{3} = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

$$b = 2 \quad a \cdot b = 3 \quad a = \frac{3}{b} = \frac{3}{2} ; \quad a+b = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} ; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

$$b=2 \quad \frac{a}{b} = 3 \quad a=3b=6 \quad \text{resto } \dots$$

$$b=2, \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} \quad 3a = a+b \Rightarrow 2a=b, \quad 2a=2, \quad a=1$$

$$3a = a+b \quad \text{Aggiungo } -a \text{ a dx e sx}$$

$$\underline{3a - a} = \cancel{a+b} - \cancel{a} \quad 2a = b$$

$$b = \frac{2}{5} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{7}{4} \quad 4a = 7a + 7b$$

$$-3a = 7b \quad ; \quad -3a = 7 \cdot \frac{2}{5} \quad ; \quad -3a = \frac{14}{5} \quad ; \quad a = -\frac{14}{15}$$

$$a = \frac{5}{2} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{3}{5} \quad ; \quad 5a = 3a + 3b \quad ; \quad 2a = 3b$$

$$b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$$

$$a+b = \frac{1}{2} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} \quad ; \quad 3a = a+b = \frac{1}{2}$$

$$3a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{6} \quad ; \quad b = (a+b) - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a+b = \frac{1}{3} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} \quad ; \quad a = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$b = (a+b) - a = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$a = \frac{3}{2} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{2}{3} \quad 3a = 2a + 2b \quad ; \quad a = 2b$$

$$b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a+b = \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{sostituisco nella 1ª eq}$$

$$2a = b$$

$$a+2a = \frac{1}{3} \quad ; \quad 3a = \frac{1}{3} \quad ; \quad a = \frac{1}{9}$$

$$b = 2a = \frac{2}{9}$$

$$a+b = \frac{2}{3}, \quad a \cdot b = \frac{1}{9}$$

Ricavo b dalla 1ª equazione

$$b = \frac{2}{3} - a \quad \text{sostituisco nella 2ª;}$$

$$a\left(\frac{2}{3} - a\right) = \frac{1}{9}; \quad \frac{2}{3}a - a^2 = \frac{1}{9} \quad \text{Moltiplico per 9}$$

$$6a - 9a^2 = 1 \quad \text{Porto tutto a dx} \quad 9a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Quindi $a = \frac{1}{3}$ e poiché $a+b = \frac{2}{3}$, anche $b = \frac{1}{3}$

$$a-b = \frac{3}{4} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{2}{7} \rightarrow \begin{aligned} 7a &= 2a + 2b, & 5a &= 2b \\ b &= \frac{5}{2}a & \rightarrow \text{sostituisco nella 1ª} \end{aligned}$$

$$a - \frac{5}{2}a = \frac{3}{4}, \quad a\left(1 - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}; \quad -\frac{3}{2}a = \frac{3}{4}; \quad a = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$b = a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

Verifica

$$a-b = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{-2+5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - \frac{5}{4}} = \frac{+\frac{1}{2}}{+\frac{2+5}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2}{7} \quad \text{1ª EQ.}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{7}{2} \quad \text{2ª EQ.}$$

$$\begin{aligned} \text{1ª EQ: } 7a + 7b &= 2a - 2b \\ 5a &= -9b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2ª EQ: } 2b &= 7a + 7b \\ 7a &= -5b \end{aligned}$$

Mettendo insieme ottengo

$$a = -\frac{9}{5}b$$

$$+\frac{9}{5}b = +\frac{5}{7}b$$

$$63b = 25b$$

$$a = -\frac{5}{7}b$$

$$38b = 0$$

$$b = 0$$

$$a = -\frac{9}{5}b = 0$$

Ma le frazioni non avrebbero senso $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

$7 \geq 5$ VERA! $7 > 5$ VERA! $7 = 5$ FALSA!

$1999 \geq 1999$ VERA!

$-1999 < -2000$ FALSA!

$-2000 < -1999$

-2000 -1999

Se $x^2 > 0$, allora $x > 0$ FALSA! Per esempio $x = -2$

Se $x \geq 3$, allora $x^2 \geq 9$ VERA

Se $x \geq 3$, allora $x^2 > 0$ VERA (a maggior ragione!)

Se $x \geq 3$, allora $x^2 \geq -7$ VERA

Se $x > 3$, allora $x^2 \geq 9$ VERA

Se $x > 3$, allora $x^2 > 9$ VERA

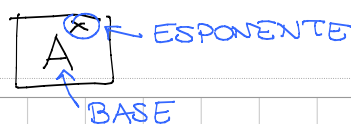
Se $x < 3$, allora $x^2 < 9$ FALSA: per esempio

$x = -327$ (< 3 , ma il suo □
è ≥ 9)

Esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 \leq 0$ VERA! Esiste ed è $x = 0$

POTENZE E RADICI

Titolo nota



15/09/2008

1° CASO

BASE QUALUNQUE

ESPOLENTE INTERO POSITIVO (>0) A^n

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}}$$

Esempi

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$0^7 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 ; (-1)^5 = -1$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$(-1)^{2008} = 1$$

Proprietà

$$\textcircled{1} A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$A^m \cdot A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{m \text{ volte}} \cdot \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ volte}} = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{m+n \text{ volte}} = A^{m+n}$$

$$\textcircled{2} (A^m)^n = A^{m \cdot n}$$

$$(A^m)^n = \underbrace{A^m \cdot A^m \cdot \dots \cdot A^m}_{n \text{ volte}}$$

$$= \underbrace{(A \cdot \dots \cdot A) \cdot (A \cdot \dots \cdot A) \cdot \dots \cdot (A \cdot \dots \cdot A)}_{n \text{ blocchi di } m \text{ } A} = A^{m \cdot n}$$

③ $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$ Richiede (per ora) $m > n$
e per sempre $A \neq 0$

$$\frac{A^m}{A^n} = \frac{\overbrace{A \cdot \dots \cdot A}^m}{\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_n} \quad \text{simplifico quello che si può}$$

e avanzano sopra $m-n$ A

$$= A^{m-n}$$

Esempio: $\frac{A^8}{A^5} = \frac{A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A}{A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A} = A^3$

④ $A^m \cdot B^n = (AB)^m$ Seve du l'esponente sia sempre lo stesso

$$A^m \cdot B^n = \overbrace{A \cdot \dots \cdot A}^m \cdot \overbrace{B \cdot \dots \cdot B}^n = \overbrace{(A \cdot B) \cdot (A \cdot B) \cdot \dots \cdot (A \cdot B)}^m$$

$$= (A \cdot B)^m$$

⑤ $A^n \pm B^n$
 $A^n \pm A^m$] NULLA DI FURBO

Esempi 1 $\frac{10^7}{10^3} = 10^4$; 2 $\frac{1000 \cdot 10^3}{100^2}$

$$\frac{1000 \cdot 10^3}{100^2} = \frac{10^3 \cdot 10^3}{(10^2)^2} = \frac{10^6}{10^4} = 10^2 = 100$$

3 $1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$

4 $\frac{100^{100}}{200} = \frac{100^{100}}{2 \cdot 100} = \frac{1}{2} \frac{100^{100}}{100} = \frac{1}{2} 100^{99}$

Usando potenze di 2 e di 5 $100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200} = 2^{200} \cdot 5^{200}$

$$200 = 2 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2 \Rightarrow \frac{100^{100}}{200} = \frac{2^{200} \cdot 5^{200}}{2^3 \cdot 5^2} = 2^{197} \cdot 5^{198}$$

$$[5] \quad \frac{1000^{100}}{100^{1000}} = \frac{(10^3)^{100}}{(10^2)^{1000}} = \frac{10^{300}}{10^{2000}} = \frac{1}{10^{1700}}$$

$$[6] \quad \frac{200^{200}}{400^{100}} \quad \begin{array}{l} 200 = 2 \cdot 100 = 2^3 \cdot 5^2 \\ 400 = 2^4 \cdot 5^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{200^{200}}{400^{100}} &= \frac{(2^3 \cdot 5^2)^{200}}{(2^4 \cdot 5^2)^{100}} = \frac{(2^3)^{200} \cdot (5^2)^{200}}{(2^4)^{100} \cdot (5^2)^{100}} = \\ &= \frac{2^{600} \cdot 5^{400}}{2^{400} \cdot 5^{200}} = 2^{600-400} \cdot 5^{400-200} = 2^{200} \cdot 5^{200} = 10^{200} \end{aligned}$$

Altro modo: $200 = 2 \cdot 100$ $400 = 2^2 \cdot 100$

$$\frac{200^{200}}{400^{100}} = \frac{(2 \cdot 100)^{200}}{(2^2 \cdot 100)^{100}} = \frac{\cancel{2}^{200} \cdot 100^{200}}{\cancel{2}^{200} \cdot 100^{100}} = 100^{100}$$

2° CASO ESPONENTE = 0 $A^0 = 1$
BASE $\neq 0$

valgano le stesse proprietà di sopra; in particolare

$$\frac{A^m}{A^m} = \frac{A \cdot \dots \cdot A}{A \cdot \dots \cdot A} = \text{si semplifica tutto e viene } 1$$

$$= A^{m-m} = A^0$$

Se vogliamo conservare la proprietà 3, porre $A^0 = 1$ è l'unica possibilità.

3° CASO ESPONENTE INTERO NEGATIVO
BASE $\neq 0$

$$A^{-m} = \frac{1}{A^m}$$

m intero > 0

Tutte le proprietà restano valide

Esempi [1] $7^{-7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5 = \frac{1}{7^7} \cdot \frac{1}{7^5} = \frac{1}{7^{12}}$

$7^{-7} \cdot \left(7^{-1}\right)^5 = 7^{-7} \cdot 7^{-5} = 7^{-12} = \frac{1}{7^{12}}$

potenza di potenza

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

[2] $7^{-3} : 7^{-12} = 7^{-3 - (-12)} = 7^{-3+12} = 7^9$

In alternativa

$$\frac{1}{7^3} : \frac{1}{7^{12}} = \frac{1}{7^3} \cdot 7^{12} = 7^{12-3} = 7^9$$

[3] $(12^{-12} : 4^{-4}) \cdot 3^{-3} = \left(\frac{1}{12^{12}} : \frac{1}{4^4}\right) \cdot \frac{1}{3^3} =$

$$= \frac{1}{12^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{(3 \cdot 4)^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^{12}} \cdot \frac{1}{4^{12}} \cdot 4^4 \cdot \frac{1}{3^3}$$

$$= \frac{1}{3^{15}} \cdot \frac{1}{4^8} = 3^{-15} \cdot 4^{-8} = 3^{-15} \cdot 2^{-16}$$

ACHTUNG! Tori di esponenziali vs potenza di potenza

$$2^{3^2} = 2^9 = 2^{(3^2)}$$

$$\left(2^3\right)^2 = 2^6$$

POTENZA DI
POTENZA

4° CASO $A > 0$ n intero positivo (ESPONENTE =
Frazione con num. = 1)

$$A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$$

dove $\sqrt[n]{A}$ è l'unico numero $x > 0$ tale che $x^n = A$

Esempi $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{8} = 2$ è l'unico $x > 0$ t.c. $x^3 = 8$

$\sqrt{4} = 2$ è l'unico $x > 0$ t.c. $x^2 = 4$

L'equazione $x^2 = 4$ ha 2 soluzioni $x = 2$ e $x = -2$
(per definire $\sqrt{4}$ ci interessa quella positiva)

$\sqrt[4]{16} = 2$ (l'eq. $x^4 = 16$ ha 2 solus. $x = 2$ e $x = -2$
ma ci interessa solo $x = 2$)

Proprietà: Le stesse del caso a esponente intero.

[NB] La definizione è data in modo da estendere le proprietà
USO DEFINIZIONE

Potenza di potenza $(A^m)^{\frac{1}{n}} \downarrow = \sqrt[n]{A^m} = A$

USO POTENZA DI POTENZA $\Rightarrow A^{m \cdot \frac{1}{n}} = A' = A$

5° caso

$$A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

BASE $A > 0$

ESPONENTE: frazione qualunque

Volendo: $A^{\frac{m}{n}} = (A^{\frac{1}{n}})^m = (A^m)^{\frac{1}{n}}$

$$(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}$$

Esercizi [1] $\sqrt[4]{16} = 2$; $16^{\frac{1}{4}} = 2$; $(2^4)^{\frac{1}{4}} = 2$

$$2^{\frac{4}{a}} = 2^1 \quad \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow a = 4$$

[2] $\sqrt[4]{a} = 3$; $a^{\frac{1}{4}} = 3$ Elevo alla 4ª a dx e sx

$$(a^{\frac{1}{4}})^4 = (3)^4 \quad a^1 = 3^4 \Rightarrow a = 3^4 = 81$$

$$\boxed{3} \quad a^{\frac{1}{2}} = 5 \quad \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (5)^2 \Rightarrow a = 5^2 = 25$$

$$\boxed{4} \quad a^{\frac{3}{2}} = 27 \quad \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} \quad a = 3^{2 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

$$\boxed{5} \quad a^{-1/2} = \frac{1}{4} \quad \left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = \left(2^{-2}\right)^{-2}; \quad a = 2^4 = 16$$

$$\boxed{6} \quad 8^a = 4 \quad (2^3)^a = 2^2 \quad 2^{3a} = 2^2, \quad 3a = 2, \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{7} \quad \sqrt[a]{16} = 8; \quad 16^{\frac{1}{a}} = 8, \quad (2^4)^{\frac{1}{a}} = 2^3; \quad 2^{\frac{4}{a}} = 2^3$$

$$\frac{4}{a} = 3 \quad a = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{8} \quad 2^{20} - 2^{19} \quad \boxed{= 2^{20-19} = 2^1 = 2} \quad \text{NO !!!!!} \quad 2^a - 2^b \text{ NON È } 2^{a-b}$$

$$2^{20} = 2^{1+19} = 2^1 \cdot 2^{19} = 2 \cdot 2^{19}$$

$$2^{20} - 2^{19} = 2 \cdot 2^{19} - 2^{19} = 2^{19}$$

$$2B - B = B$$

$$\boxed{9} \quad 3^8 + 3^8 + 3^8 = 3 \cdot 3^8 = 3^1 \cdot 3^8 = 3^{1+8} = 3^9$$

$$3^8 + 3^8 = 2 \cdot 3^8$$

ESERCIZI SULLE POTENZE

Titolo nota

16/09/2008

A^x	x intero positivo	A qualunque
	x intero ≤ 0	$A \neq 0$
	x non intero	$A > 0$

$$A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

Proprietà

1. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

2. $\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}$

3. $(A^m)^n = A^{mn}$

4. $A^m \cdot B^m = (AB)^m$

$$A^m \pm A^n$$

$$A^m \pm B^m$$

Nulla di Furbo

Esercizi [1] $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{a}$ $2^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ $a=10$

↑
proprietà ④

[2] $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = \sqrt{4} \Rightarrow a=4$

[3] $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[a]{6}$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \overset{\textcircled{4}}{=} 6^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a=2$$

[4] $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{a}$

$$\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = a$$

$$a = \left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^4 = \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 6^2 = 36$$

$$\textcircled{5} \quad \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\textcircled{3}}{=} 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\textcircled{6} \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\textcircled{3}}{=} 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\boxed{7} \quad \sqrt[3]{\sqrt{27}} = ((27)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{8} \quad \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{a}; \quad (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}, \quad 2^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{8}}$$

elevo alla 8ª: $(2^{\frac{1}{4}})^8 = a, \quad 2^2 = a = 4.$

$$\boxed{9} \quad \sqrt{2\sqrt{2}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^{1+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$2^{\frac{3}{4}} = 8^{\frac{1}{2}}, \quad 2^{\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{10} \quad \sqrt{4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = (2^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

$$2^{\frac{5}{4}} = \sqrt{2^a} = 2^{\frac{a}{2}} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

In alternativa: $4\sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32} \quad (16^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}})$

$$\boxed{11} \quad 3\sqrt{7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{63} \quad 9^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = (9 \cdot 7)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{12} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{6+4+3}{12}} = 2^{\frac{13}{12}}$$

$$\boxed{13} \quad \sqrt[6]{8} = \sqrt[4]{4}, \quad (2^3)^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{4}}, \quad 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2}{4}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}, a=4$$

N.B. $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

$$\boxed{14} \quad \sqrt[3]{2} : \sqrt[6]{a} = 2^{-1}, \quad 2^{\frac{1}{3}} : a^{\frac{1}{6}} = 2^{-1}, \quad \frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}}, \quad 2^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \text{ elevo alla sesta:}$$

$$(2^{\frac{4}{3}})^6 = a \Rightarrow a = 2^8 = 256$$

$$\boxed{15} \quad \sqrt{100^{100}} = (100^{100})^{\frac{1}{2}} = 100^{50}; \quad (100^{100})^{\frac{1}{2}} = (100^{\frac{1}{2}})^{100} = 10^{100}$$

STESSA COSA

$$\boxed{16} \quad \sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3}}} \quad 2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12} ; \sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{3\sqrt{\sqrt{12}}} = \sqrt{3^4\sqrt{12}} = \sqrt[4]{81 \cdot \sqrt{12}} = \sqrt[4]{81 \cdot 12} = \sqrt[8]{81 \cdot 12} = \sqrt[8]{972}$$

$$\boxed{17} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[a]{4} = 2, \quad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{a}} = 2^1, \quad 2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{a}} = 2^1$$

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{18} \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{a}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{19} \quad \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2^a} \cdot \sqrt[4]{8} = 8, \quad 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{a}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^3$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{a}{3} + \frac{3}{4} = 3 \quad \text{e da qui si ricava } a$$

$$\boxed{20} \quad \sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{a} \quad (\text{Non pensare nemmeno } \sqrt{30} !!!)$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} \stackrel{(4)}{=} \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$\boxed{21} \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{a}, \quad 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} \quad \text{elevo alla sesta:}$$

$$(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}})^6 = a = (2^{\frac{1}{2}})^6 \cdot (3^{\frac{1}{3}})^6 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{72}$$

$$\text{In alternativa: } \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} \quad 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} \quad 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} \quad \text{stesso esponente}$$

$$\text{Quindi } \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72} \quad [8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{1}{6}} = 72^{\frac{1}{6}}] \quad (4)$$

POLINOMI E SCOMPOSIZIONI

$$p(x) = x^4 + 3x^2 + 6x - 25 \quad \text{grado 4 (massimo esponente della } x)$$

$$\begin{aligned} p(x) \text{ ha grado } m \\ q(x) \text{ ha grado } n \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} p(x) \cdot q(x) \text{ ha grado } m+n \\ p(x) \pm q(x) \text{ ha grado } \leq \text{del massimo tra } m \text{ ed } n \end{aligned}$$

Grado della somma: • Se $m \neq n$, allora $p(x) \pm q(x)$ ha come grado il max fra i 2 gradi

- Se $m = n$ il grado di $p(x) + q(x)$ può anche scendere, il che accade se i due termini di grado max "si semplificano"

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 + x^2 - 2x + 1 & q(x) &= -x^3 + 6x^2 + 7 \\ p(x) + q(x) &= 7x^2 - 2x + 8 \end{aligned}$$

Esempio $p(x) = 2x^2 - 3 \quad q(x) = x + 2$

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 - 3)(x + 2) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 6$$

Radice di un polinomio Sono quei valori a b.c. $p(a) = 0$

N.B. I polinomi non hanno nec. coeff. interi

$$\left(2x + \frac{1}{3}\right) \left(x^2 + \frac{5}{2}x - 3\right) = 2x^3 + \underbrace{5x^2}_{\frac{5}{2} \cdot 2x} - \underbrace{6x}_{\frac{1}{3} \cdot 2x} + \underbrace{\frac{x^2}{3}}_{\frac{5}{6} \cdot 2x} + \frac{5}{6}x - 1$$

Radici di un pol. di 2° grado $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

- ↗ $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ soluzioni reali e distinte
- $\Delta = 0 \Rightarrow 1$ soluzione reale di molteplicità 2
- ↘ $\Delta < 0 \Rightarrow 0$ soluzioni reali

SCOMPOSIZIONI E POTENZE

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad [= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3]$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

... e così via ...

Se c'è il segno + :

$$a^2 + b^2 \quad \text{NULLA DI PURBO}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad [= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} + b^3]$$

$$a^4 + b^4 \quad \text{NULLA}$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^6 + b^6 \quad \text{NULLA}$$

$$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

... e così via ...

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ba} + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

[Mostro]² = somma di tutti i quadrati + somma di tutti i doppi prodotti

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

[Per esercizio dimostrarla calcolando $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$]

[Mostro]³ = somma di tutti i cubi + somma di tutti i tripli prodotti + 6 volte tutti i prodotti a 3 a 3

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA:

ogni numero è la somma
dei 2 che "stanno sopra"

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

$(a+b)^1 = (a+b)$
 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a+b)^3 =$
 $(a+b)^4 =$
 $(a+b)^6$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Scomposizioni

$$\begin{aligned}
 (a^3-1) &= (a-1)(a^2+a+1) \\
 a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)
 \end{aligned}$$

$\uparrow b=1$
 $\downarrow b=2$

$$a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$$

$$a^3-8 = (a-2)(a^2+2a+4)$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^2-4 = (a+2)(a-2)$$

$$\begin{aligned}
 a^4-1 &= (a-1)(a^3+a^2+a+1) \\
 a^4-b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)
 \end{aligned}$$

$\uparrow b=1$

$$\begin{aligned}
 a^4-b^4 &= (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) \\
 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \leftarrow \text{STESSA COSA}
 \end{aligned}$$

$$a^6-b^6 = (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$

$$= (a^3-b^3)(a^3+b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$= (a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$$

$$a^6-b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3$$

DIVISIONE TRA POLINOMI EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota

16/09/2008

Dati 2 polinomi $A(x)$ e $B(x)$ la divisione tra $A(x)$ e $B(x)$ consiste nel trovare 2 polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ tali che

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$ quoziente $\uparrow$ resto

dove il grado di $R(x)$ è MINORE (stretto) del grado di $B(x)$.

Come si trovano $Q(x)$ ed $R(x)$? Facendo la "divisione per colonne"

$$\begin{array}{r|l}
 \boxed{x^3 + 2x^2 - 3x + 1} & \boxed{x^2 + 2} \quad B(x) \\
 -x^3 & \boxed{x + 2} \quad Q(x) \\
 \hline
 // \quad 2x^2 - 5x + 1 & \\
 -2x^2 & \\
 \hline
 // \quad \boxed{-5x - 3} \quad R(x)
 \end{array}$$

Verifica:

$$\begin{array}{lcl}
 x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & = & (x^2 + 2)(x + 2) + (-5x - 3) \\
 A(x) & = & B(x) Q(x) + R(x)
 \end{array}$$

Esempio 2 Voglio dividere $x^5 + 2x^2 - 3$ per $x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^5 \qquad \qquad + 2x^2 \qquad - 3 \\
 -x^5 + x^4 - x^3 \\
 \hline
 // \quad x^4 - x^3 + 2x^2 \qquad - 3 \\
 -x^4 + x^3 - x^2 \\
 \hline
 // \quad // \quad x^2 \qquad - 3 \\
 -x^2 + x - 1 \\
 \hline
 // \quad \boxed{x - 4} \quad R(x)
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \boxed{x^3 + x^2 + 1} \quad Q(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Verifica:

$$x^5 + 2x^2 - 3 = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 + 1) + (x - 4)$$

(FARE PER ESERCIZIO)

Esempio 3

$$\begin{array}{r|l}
 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + 1 & 2x^2 + 3x + 1 \\
 \underline{-4x^4 - 6x^3 - 2x^2} & 2x^2 + 1 \\
 \quad \quad \quad 2x^2 + x + 1 & \\
 \quad \quad \underline{-2x^2 - 3x - 1} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad -2x & \text{R(x)}
 \end{array}$$

Esempio 4 Dividere x^3+1 per $x+1$. Non serve fare la divisione perché

$$\underbrace{x^3+1}_{A(x)} = \underbrace{(x+1)}_{B(x)} \underbrace{(x^2-x+1)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)}$$

Esempio 5 Dividere x^3+1 per $x-1$. Il resto ha per forza grado minore del grado di $B(x)$, dunque in questo caso grado di $R(x)$ è 0, dunque sarà un numero

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & x-1 \\
 \underline{-x^3+x^2} & \boxed{x^2+x+1} \text{ Q(x)} \\
 \quad \quad \quad +x^2 & +1 \\
 \quad \quad \underline{-x^2+x} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad x+1 & \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{-x+1} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2 & \text{R(x)}
 \end{array}$$

Esempio 6

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 & x^3 - 2x^2 \\
 \quad + x^3 & \\
 \quad + 3 & \\
 \underline{-x^5 + 2x^4} & x^2 + 2x + 5 \rightarrow \text{Q(x)} \\
 \quad \quad \quad 2x^4 + x^3 & \\
 \quad \quad \underline{-2x^4 + 4x^3} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 5x^3 & + 3 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{-5x^3 + 10x^2} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 10x^2 + 3 \leftarrow \text{R(x)}
 \end{array}$$

Equazioni polinomiali

$$\boxed{1} \quad 2x^2 - 8x = 0 \quad 2x(x-4) = 0 \quad x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$\boxed{2} \quad 2x^2 - 8 = 0, \quad x^2 = 4, \quad x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$

$$\boxed{3} \quad x^2 - 7x + 12 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

Se un'equazione di 2° grado ha 2 radici a e b, vuol dire che il polinomio si fattorizza nella forma

$$(x-a)(x-b)$$

Nell'esempio le radici erano $x=4$ e $x=3$ e infatti

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$$

$$(x-a)(x-b) = x^2 - bx - ax + ab = x^2 - (a+b)x + ab$$

Prodotto radici = termine noto

Somma radici = coeff. di x cambiato di segno

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Prodotto} = 12 \\ \text{Somma} = 7 \end{array} \Rightarrow x_{1,2} \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Prodotto} = -6 \\ \text{Somma} = 1 \end{array}$$

Radici: 3 e -2

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

ACHTUNG! Quanto detto vale solo quando il coeff. di x^2 è uguale a 1.

Pur di dividere posso sempre portarmi in questa situazione.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (x-2)^2 = 0 \quad \Delta = 0 \quad x=2 \text{ radice di molteplicità } 2.$$

BIQUADRATICHE, BICUBICHE,...

① $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Pongo $t = x^2$ L'equazione diventa

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad \text{Risolvo in } t \quad (P=4, S=5) \Rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$$

Torno in x risolvendo $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$
 $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

L'eq. iniziale ha 4 soluzioni

② $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ Pongo $t = x^2$
 $t^2 - 5t + 6 = 0 \quad (S=5, P=6) \quad t = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow \text{in totale 4 soluzioni}$$

$$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

③ $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ Pongo $t = x^2$
 $t^2 + 3t - 4 = 0 \quad (S=-3, P=-4) \quad t = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{in totale 2 soluzioni}$$

$$x^2 = -4 \rightarrow \text{NULLA}$$

In termini di scomposizione $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4)$
 quindi

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 - 1)(x^2 + 4)$$

$$= (x+1)(x-1)(x^2+4)$$

si vedono le radici

$$x=1 \quad \text{e} \quad x=-1$$

Non produce
radici (reali)

④ $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ $t = x^2$ $t^2 - 4t + 4 = 0$

Unica radice: $t = 2$ $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \rightarrow 2 \text{ radici}$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x + \sqrt{2})^2 (x - \sqrt{2})^2$$

Le radici $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ hanno molteplicità 2

$$\boxed{5} \quad x^3 - 2x^2 + x = 0 \quad x(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

radice $x=0 \rightarrow$ MOLTEPLICITÀ 1

radice $x=1 \rightarrow$ MOLTEPLICITÀ 2

$$\boxed{6} \quad x^3 - 2x + 1 = 0 \quad \text{Si trova una radice a occhio?}$$

SI!! $x=1$ (se sostituisco $x=1$ viene 0)

Ma allora il polinomio è divisibile per $x-1$. Divido:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -2x+1 \\ -x^3 + x^2 & \\ \hline x^2 & -2x+1 \\ -x^2 + x & \\ \hline x & -1 \\ -x & +1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$$

DOVEVA VENIRE 0

Fattorizzazione:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

produce radice $x=1$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{produce altre 2 radici (forse)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Quindi in tutto ci sono 3 soluzioni

Come trovare le radici a occhio?

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

sia un polinomio a coeff. INTERI. Se questo polinomio ha una radice razionale (cioè una frazione $\frac{m}{n}$, con m, n interi) allora m divide a_0 ed n divide a_n

Quindi i tentativi da fare sono un numero finito

Esempio 1 $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Se c'è una radice del tipo $\frac{m}{n}$, allora $\nearrow m$ divide 6
 $\searrow n$ divide 1

Quindi i tentativi da fare sono $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Esempio 2 $3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$

$\nearrow m$ divide 3

$\searrow n$ divide 3

Tentativi: $\pm 3, \pm \frac{1}{3}, \pm 1$

Esempio 3 $18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 5x - 2 = 0$

$\nearrow m$ divide -2

$\searrow n$ divide 18

Tentativi: $\pm 1, \pm 2$

$\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{2}$

$\pm \frac{1}{6}$

$\pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}$

$\pm \frac{1}{18}$

— o —

E se a occhio non si trova nulla? Allora non ci sono frazioni tra le radici, e non è + precorso !!!

Ripasso EQUAZIONI POLINOMIALI

Titolo nota

17/09/2008

- ① I o II grado $\rightarrow$ risolve facilmente
- ② Biquadratica, bicubica, ... : si pone $t = x^2$, $t = x^3$, $t = x^4$, ... e diventa di II grado. Si risolve in t e poi si torna in x
- ③ Altri casi in cui è di grado $> II$: si spera di trovare una radice razionale $\frac{m}{n}$. Se si trova poi si divide per $x - \frac{m}{n}$ e si scende di grado
- ④ Come si trova una radice razionale? Proovando tutte le frazioni $\frac{m}{n}$ in cui
 - m è un divisore del termine noto
 - n è un divisore del coeff. del termine di grado max
 Queste frazioni sono un numero finito.
- ⑤ Se non c'è la radice razionale, sono guai.
- ⑥ Trovare le soluzioni equivale a fattorizzare il polinomio. Se a, b, c sono radici di un polinomio, allora il polinomio è divisibile per $(x-a)(x-b)(x-c)$.

Esempio 1 $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$ Bicubica $t = x^3$
 $t^2 + 5t + 6 = 0$ (Somma: -5, Prodotto: 6)

Radici in t : $t = -2$, $t = -3$

Ritorno in x : $x^3 = -2 \rightarrow x = -\sqrt[3]{2}$
 $x^3 = -3 \rightarrow x = -\sqrt[3]{3}$ } 2 soluzioni

In termini di scomposizioni:

$$t^2 + 5t + 6 = (t+2)(t+3)$$

$$x^6 + 5x^3 + 6 = (x^3+2)(x^3+3)$$

$$x^3+2 = (x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$$

$$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$$

$$A=x, B=\sqrt[3]{2}$$

$$x^3+3 = (x+\sqrt[3]{3})(x^2-\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9})$$

$$A=x, B=\sqrt[3]{3}$$

Esempio 2 $(x^4+1)(x^2+2x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)(x^4+1)=0$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $x=0$ $x=-2$ NULLA

$\rightarrow 2$ soluzioni $x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

Esempio 3 $3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$

Cerco una radice del tipo $\frac{m}{n}$, in cui m divide 3 ed n divide 3

$\Rightarrow$ Le possibili radici razionali sono $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{3}$

± 1 non vanno bene. Provo ± 3 : $\pm 81 - 45 \pm 21 + 3 \stackrel{?}{=} 0$ NO
 Provo $\pm \frac{1}{3}$: $\pm \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \pm \frac{7}{3} + 3 \stackrel{?}{=} 0$

con il $\oplus$: $\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{7}{3} + 3 = \frac{1-5+21+27}{9} \neq 0$

con il $\ominus$: $= \frac{-1-5-21+27}{9} = 0$

Quindi $x = -\frac{1}{3}$ è una radice del polinomio. Quindi il polinomio è divisibile per $x + \frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 & x + \frac{1}{3} \\
 \hline
 -3x^3 - x^2 & 3x^2 - 6x + 9 \\
 \hline
 \sim -6x^2 + 7x + 3 & \\
 + 6x^2 + 2x & \\
 \hline
 \sim 9x + 3 & \\
 - 9x - 3 & \\
 \hline
 \sim \sim &
 \end{array}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 3x^3 - 5x^2 + 7x + 3 &= \left(x + \frac{1}{3}\right) 3(x^2 - 2x + 3) \\
 &= (3x + 1)(x^2 - 2x + 3)
 \end{aligned}$$

Le soluzioni dell'eq. originaria sono

• $x = -\frac{1}{3}$

• le radici di $x^2 - 2x + 3$: $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$

$\Delta < 0$
nessuna
solus. reale

$\Rightarrow$ l'unica solus. reale è $x = -\frac{1}{3}$

DISEQUAZIONI

Una disequazione si presenta nella forma $f(x) \geq 0$ $f(x) \leq 0$
 $f(x) > 0$ $f(x) < 0$

Risolvere la disequazione significa sostanzialmente studiare il segno della funzione $f(x)$, cioè dividere i numeri x in 4 gruppi:

- gli x per cui $f(x) > 0$
- gli x per cui $f(x) = 0$
- " " " " $f(x) < 0$
- gli x per cui $f(x)$ NON È DEFINITA.

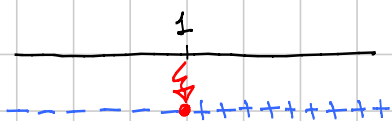
Esempio $f(x) = \frac{1}{x-1}$

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x > 1$$

$$f(x) = 0 \quad \text{MAI}$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < 1$$

$$f(x) \text{ non è definita per } x = 1$$



Disequazioni di I grado

① $3x \geq 6$, $x \geq 2$ (moltiplico dx e sx per $\frac{1}{3}$)

② $3x \geq -6$, $x \geq -2$ (come sopra)

③ $-3x \geq 6$, $x \leq -2$ (moltiplico dx e sx per $-\frac{1}{3}$, ma
 INVERTO IL VERSO DELLA DISEQUAZ.)

ACHTUNG! Per le equazioni possiamo moltiplicare dx e sx per una stessa quantità purché $\neq 0$

Nelle diseq. possiamo moltiplicare IMPUNEMENTE per $loba > 0$, e moltiplicare per $loba < 0$ PUR DI GIRARE il VERSO.

④ $-3x < -6$ Moltiplico per -1 (quindi cambio verso)
 $3x > 6$ Moltiplico per $\frac{1}{3}$ (quindi conservo il verso)
 $x > 2$

⑤ $3(2x+5) > -7x+3$ Faccio un po' di conti
 $6x+15 > -7x+3$ Sposto $2x \leftrightarrow 5x$
 $13x > -12$ Moltiplico per $\frac{1}{13}$
 $x > -\frac{12}{13}$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

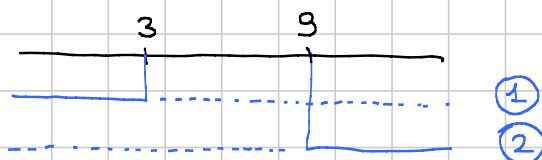
$$\begin{cases} 2x+3 > 3x & \textcircled{1} \\ x-2 > 7 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Risolvere il sistema vuol dire trovare gli x per cui la ① e la ② sono verificate contemporaneamente. Come si risolve?

- Risolvo ① e ② separatamente
- Considero la "zona comune"

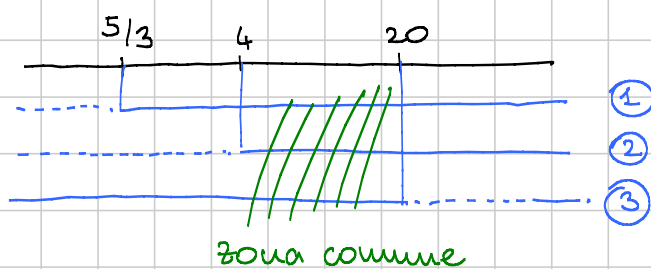
① $2x+3 > 3x$, $3 > x$, $x < 3$ ② $x-2 > 7$, $x > 9$

Rappresento le 2 soluzioni in uno schema



Non c'è zona comune, quindi il sistema non ha soluzioni (la soluzione del sistema è $\emptyset$)

$$\begin{cases} 3x > 5 & \textcircled{1} \\ 2x-4 > x & \textcircled{2} \\ 2x < 40 & \textcircled{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5/3 & \textcircled{1} \\ x > 4 & \textcircled{2} \\ x < 20 & \textcircled{3} \end{cases}$$



Soluzione sistema:

$$4 < x < 20$$

$$(4, 20)$$

intervallo con estremi 4 e 20 (estremi esclusi)

$$] 4, 20 [$$

DISEQUAZIONI DI II GRADO

$ax^2 + bx + c$



0



1ª cosa: si può sempre fare in modo che
 $a > 0$ (se è negativo cambio i segni e
 inverto i versi)

2ª cosa: quando il segno di $\Delta = b^2 - 4ac$. Ho 3 casi (sempre
 assunto $a > 0$)

- se $\Delta < 0$ il polinomio è sempre > 0 ;
- se $\Delta > 0$ il polinomio ha 2 radici reali $\alpha < \beta$ ed è
 negativo per valori interni all'intervallo (α, β) ed è
 positivo per valori esterni
- se $\Delta = 0$ il polinomio ha un'unica radice reale $x = \alpha$
 ed è positivo per tutti i valori $x \neq \alpha$

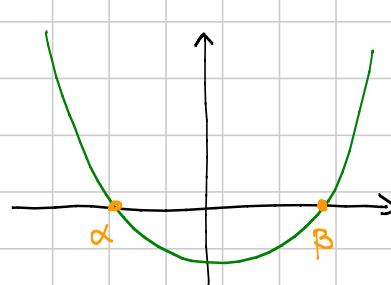
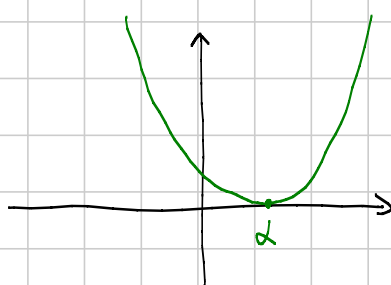
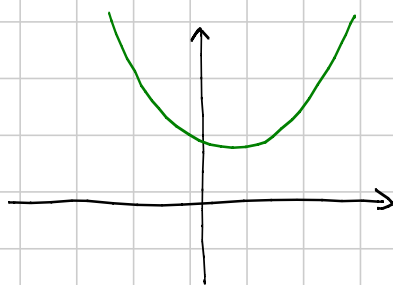
Interpretazione grafica

$y = ax^2 + bx + c$ nel piano cartesiano
 rappresenta una parabola

$a > 0 \rightarrow$ parabola



, $a < 0 \rightarrow$ parabola



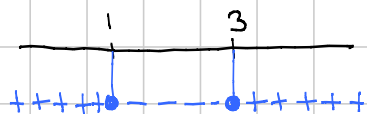
$\Delta < 0$: nessuna
 intersezione con asse x .
 Quindi "y è sempre > 0 "
 Quindi il pol. di II
 grado assume solo valori
 positivi.

$\Delta = 0$: una
 sola radice $x = \alpha$
 • per $x = \alpha$ il
 pol. si annulla
 • per $x \neq \alpha$ il
 pol. è > 0
 ↑
 corretto a
 posteriori

$\Delta > 0$: 2 radici
 $x = \alpha$ e $x = \beta$
 • per $x \in (\alpha, \beta)$
 "VALORI INTERNI"
 il pol. è < 0
 • per VALORI
 ESTERNI è > 0

[1] $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ Radici ($S=4$, $P=3$) $x = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$

$\geq 0 \leadsto$ "VALORI ESTERNI" $x \leq 1$ oppure $x \geq 3$



Questo disegno rappresenta il segno di $x^2 - 4x + 3$

[2] $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ $1 \leq x \leq 3$ $[1, 3]$

[3] $x^2 - 4x + 3 > 0$ $x < 1$ oppure $x > 3$, che si scrive anche

$(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

[4] $x^2 \leq 4 \leadsto x \leq \pm 2$ ASSURDITÀ PURA !!!!
 $x^2 - 4 \leq 0$ Radici : $x = \pm 2$

↑
VALORI INTERNI

$-2 \leq x \leq 2$ $[-2, 2]$

[5] $x^2 \geq 3x$ ~~$x^2 \geq 3$~~ $x \geq 3$ NO!!!!

$x^2 - 3x \geq 0$

↑
VALORI
ESTERNI

Diseq. 2° grado : radici

$x^2 - 3x = 0$ $x(x-3) = 0$

2 radici : $x = 0$ e $x = 3$

$(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

[6] $x^2 + 4 \geq 0$

$x^2 + 4 \leq 0$

Diseguazioni di 2° grado . Radici $x^2 + 4 = 0$ NESSUNA
 Siano nel caso $\Delta < 0$

$x^2 + 4 \geq 0$ sempre

$\mathbb{R}$

$x^2 + 4 \leq 0$ MAI

$\emptyset$

DISEQUAZIONI CON PRODOTTI E QUOZIENTI

Titolo nota

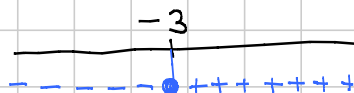
17/09/2008

$$\boxed{I} \quad (x-1)(x+3) \quad 0$$

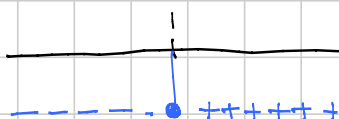
Voglio determinare il segno di $(x-1)(x+3)$

Studio separatamente i 2 FATTORI

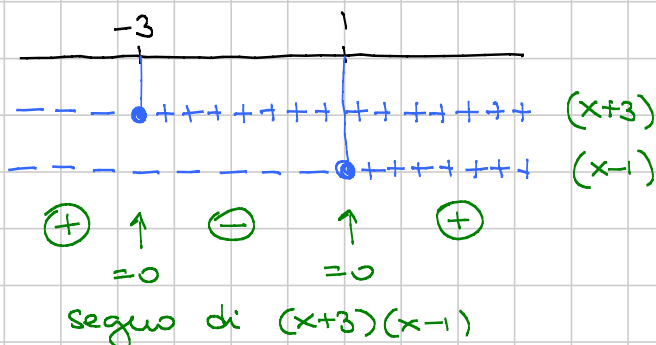
$$I \begin{cases} x+3 > 0 & \text{per } x > -3 \\ x+3 = 0 & \text{per } x = -3 \\ x+3 < 0 & \text{per } x < -3 \end{cases}$$



$$II \begin{cases} x-1 > 0 & \text{per } x > 1 \\ x-1 = 0 & \text{per } x = 1 \\ x-1 < 0 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$



Metto insieme i 2 studi



Ora posso considerare il verso della disequazione data

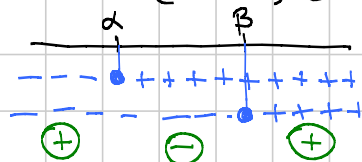
$$\begin{array}{ll} (x-1)(x+3) > 0 & (-\infty, -3) \cup (1, +\infty) \\ (x-1)(x+3) \geq 0 & (-\infty, -3] \cup [1, +\infty) \\ (x-1)(x+3) \leq 0 & [-3, 1] \\ (x-1)(x+3) < 0 & (-3, 1) \end{array}$$

Nota bene: $(x-1)(x+3) > 0$ è in particolare una diseq. di 2° grado: $x^2+3x-x-3 > 0$, $x^2+2x-3 > 0$

Radici: $x = -3$, $x = 1$ VALORI ESTERNI

In generale se la diseq. di 2° grado è

$$(x-\alpha)(x-\beta) \quad \square \quad 0 \quad \text{con } \alpha < \beta$$



Esempio 2 $\frac{(x+7)(x-3)}{x+4} \square 0$

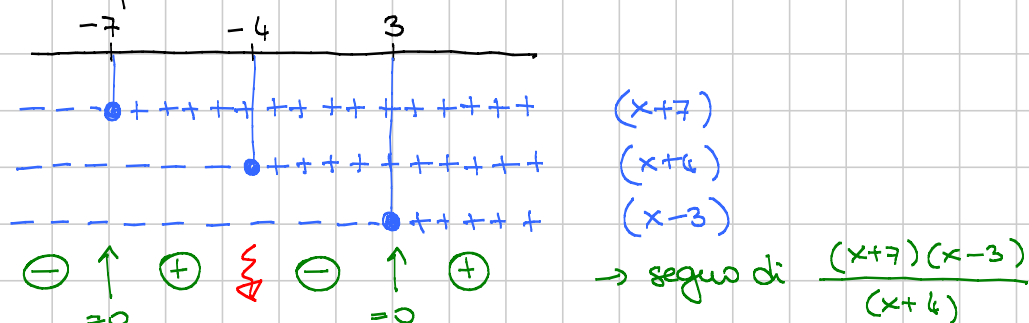
Considero separatamente i fattori $x+7$, $x-3$, $x+4$

$$x+7 > 0 \text{ per } x > -7$$

$$x+7 = 0 \text{ per } x = -7$$

$$x+7 < 0 \text{ per } x < -7$$

analogamente per gli altri



Ora posso guardare i versi nella diseq. di partenza

$$\frac{(x+7)(x-3)}{x+4} < 0 \quad (-\infty, -7) \cup (-4, 3)$$

$$\frac{(x+7)(x-3)}{x+4} \leq 0 \quad (-\infty, -7] \cup (-4, 3] \quad \uparrow \text{ESCLUSO}$$

$$\frac{(x+7)(x-3)}{x+4} > 0 \quad (-7, -4) \cup (3, +\infty)$$

$$\frac{(x+7)(x-3)}{x+4} > 0 \quad [-7, -4) \cup [3, +\infty) \quad \uparrow \text{ESCLUSO}$$

Esempio 3

$$\frac{1}{x} > 4$$

$$1 > 4x, \quad 4x < 1, \quad x < \frac{1}{4} \quad \text{NO! NO!}$$

Porto tutto a sx

$$\frac{1}{x} - 4 > 0$$

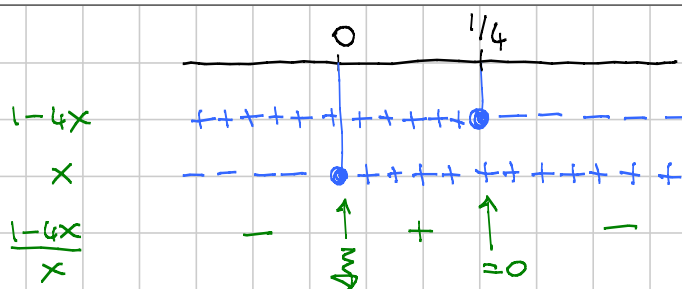
$$\frac{1-4x}{x} > 0$$

Diseq. con quoziente. Studio separatamente i 2 termini

$$1-4x > 0 \quad \text{se} \quad 4x < 1, \quad \text{cioè} \quad x < \frac{1}{4}$$

$$1-4x = 0 \quad \text{se} \quad 4x = 1, \quad \text{"} \quad x = \frac{1}{4}$$

$$1-4x < 0 \quad \text{"} \quad 4x > 1 \quad \text{"} \quad x > \frac{1}{4}$$



Ora guardo il verso nella diseq. iniziale

$$\frac{1-4x}{x} > 0 \quad \left(0, \frac{1}{4}\right) \quad 0 < x < \frac{1}{4}$$

Esempio 4

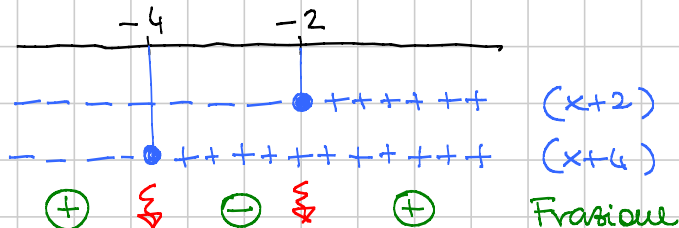
$$\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$$

Non pensare nemmeno di moltiplicare "in croce" !!

Tutto a sx: $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} > 0$, $\frac{(x+1)(x+4) - (x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)} > 0$

$$\frac{x^2 + 4x + x + 4 - x^2 - 3x - 2x - 6}{(x+2)(x+4)} > 0 \quad \frac{-2}{(x+2)(x+4)} > 0$$

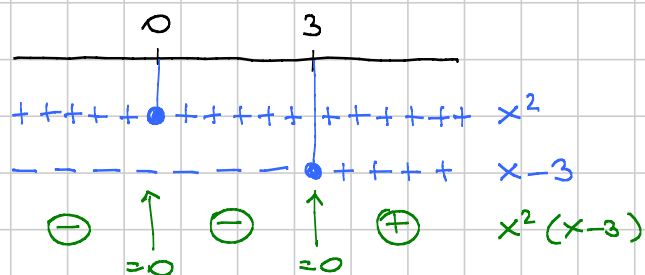
$$\frac{2}{(x+2)(x+4)} < 0$$



Frazione < 0 per $-4 < x < -2$ $(-4, -2)$

Se fosse stato: Frazione ≤ 0 , la risposta era la stessa

Esempio 5 $x^2(x-3) \geq 0$. Studio separatamente x^2 e $x-3$



$$x^2(x-3) > 0 \quad (3, +\infty)$$

$$x^2(x-3) < 0$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, 3)$$

NON COMPRENDE $x=0$

$$x^2(x-3) \leq 0 \quad (-\infty, 3]$$

$$x^2(x-3) \geq 0$$

$$\{0\} \cup [3, +\infty)$$

0 isolato

$x^4 - 3x^2 + 4$ ☐ ☐
$$t = x^2$$

$$t^2 - 3t + 4$$

Radici

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2}$$

$$x^4 - 3x^2 + 4 > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$
$$x^4 - 5x^2 + 4 \square 0$$

$$t = x^2 \quad t^2 - 5t + 4$$

$$(S=5, P=4)$$

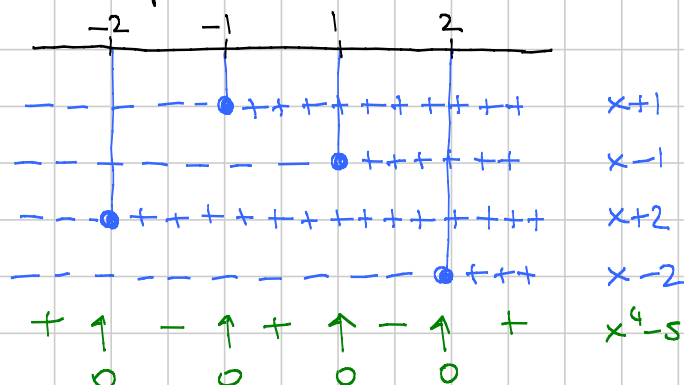
Radici : $t=1, t=4 \rightarrow$ Fattorizzazione :

$$t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

$$= (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

Studio separatamente i 4 termini:



$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$$[-2, -1] \cup [1, 2]$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$$

$$(-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$x^4 - x^2 - 2$$

$$t = x^2$$

$$t^2 - t - 2$$

$$(S=1, P=-2)$$

Raslići: $t = 2, t = -1$

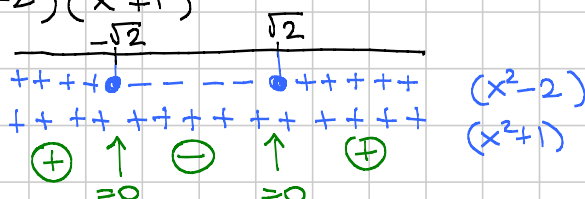
Fattorizzazione

$$t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1)$$

$$x^4 - x^2 - 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$$

$$x^4 - x^2 - 2 < 0$$

$$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

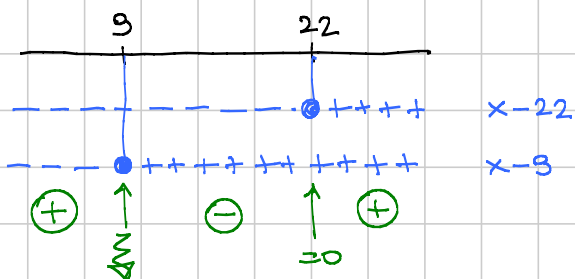


Esempio 9 $\frac{x+4}{x-9} \leq 2$ Tutto a sx $\frac{x+4}{x-9} - 2 \leq 0$

$$\frac{x+4-2x+18}{x-9} \leq 0$$

$$\frac{-x+22}{x-9} \leq 0$$

$$\frac{x-22}{x-9} \geq 0$$



Quindi $\frac{x-22}{x-9} \geq 0$ per

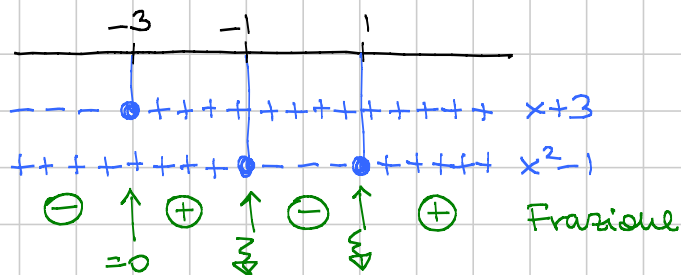
$$(-\infty, -9) \cup [22, +\infty)$$

Esempio 10 $\begin{cases} x^2 \leq 4 & \textcircled{1} \\ \frac{x+3}{x^2-1} \leq 0 & \textcircled{2} \end{cases}$ $x^2 - 4 \leq 0$ $[-2, 2]$

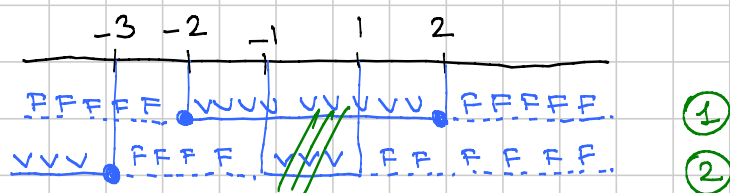
Risolvo^{dis} equazione $\textcircled{2}$

Soluzione diseq. $\textcircled{2}$:

$$(-\infty, -3] \cup (-1, 1)$$



Metto insieme le soluzioni della $\textcircled{1}$ e della $\textcircled{2}$



Soluzione sistema: ZONA COMUNE, cioè $(-1, 1)$.

ESPONENZIALI E LOGARITMI

Titolo nota

18/09/2008

$a^b = c$ Se conosco b e c , come trovo a ?
Elevo tutto alla $\frac{1}{b}$

$$(a^b)^{\frac{1}{b}} = (c)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow a = c^{\frac{1}{b}}$$

Se conosco a e c , come trovo b ? Con il logaritmo.

Per definizione:

$$b = \log_a c$$

Potenza alla quale elevare
il numero a per ottenere
il numero c

Osservazioni

1. Seme $c > 0$ e $a > 0$ e $a \neq 1$
2. Date le condizioni di cui al punto precedente su a e c , esiste sempre un unico numero b tale che $a^b = c$

Esempi

$$2^x = 8 \quad x = \log_2 8 = 3$$

$$10^x = 100 \quad x = \log_{10} 100 = 2 \quad \log_{10} c = \text{Log } c$$

$$\log_3 \frac{1}{3} = -1$$

sto pensando a $3^x = \frac{1}{3}$

$$\log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

sto pensando a $4^x = \frac{1}{2}$

$$4^{-\frac{1}{2}} = (4^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$2^x = \frac{1}{4} \quad x = -2$$

$$\log_{1/2} 4 = -2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 ; \frac{1}{2^x} = 4 ; 2^x = \frac{1}{4}$$

Proprietà del logaritmo

$$\boxed{1} \quad \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$\boxed{5} \quad \log_a (x \pm y)$
Nulla di furbo

$$\boxed{2} \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$\boxed{6} \quad \log_a x \cdot \log_a y$
Nulla di furbo

$$\boxed{3} \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$\boxed{4}$ Formula di cambio di base: permette di calcolare un log in base a sapendo fare solo log in base b

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Come si ricava il cambio di base:

1. voglio calcolare $z = \log_a x$, cioè risolvere $a^z = x$;
2. so fare solo i log in base b ;
3. prendo $\log_b$ a dx e sx: ottengo $\log_b a^z = \log_b x$

4. Applico la proprietà $\boxed{3}$ dei log: $z \log_b a = \log_b x$

5. Ricavo

$$z = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Giustificazione formula 1: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$$\log_a x = m \Leftrightarrow a^m = x$$

$$\log_a y = n \Leftrightarrow a^n = y \quad \text{moltiplicando ottengo}$$

$$a^m \cdot a^n = x \cdot y$$

$$a^{m+n} = x \cdot y \Leftrightarrow m+n = \log_a (x \cdot y)$$

Esercizi [1] $\log_2 16 = 4$ $2^x = 16$; [2] $\log_2 a = 3$ $a = 8$

$\log_2 a = 3$; $\log_2 a = 3 \log_2 2$ *In generale: $\log_a a = 1$*

$\log_2 a = 3 \log_2 2 = \log_2 2^3$; ~~$\log_2 a = \log_2 2^3$~~ , $a = 2^3$

[3] $\log_3 2^4 = a \log_3 2$ $a = 4$

[4] $\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 2$; $\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 2$

[5] $\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64 = 3 + 4 + 6 = 13$

oppure:

$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 (2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^6) = \log_2 2^{3+4+6}$
 $= \log_2 2^{13} = 13 \log_2 2 = 13$ *prop. potenza*

[6] $\log_3 20 + \log_3 4 = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$

[7] $\log_3 20 - \log_3 4 = \log_3 \frac{20}{4} = \log_3 5$

[8] $\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 \frac{3}{2}$

[9] $\log_2 4 \cdot \log_2 8 = \log_2 a$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6 = \log_2 a$, ma $6 = \log_2 2^6 = \log_2 64$

[10] $\log_2 2^a = 9$; $\log_2 2^a = 9 \log_2 2$

$\log_2 2^a = \log_2 2^9 \Rightarrow a = 9$

[11] $\log_2 4^a = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9$; $\log_2 2^{2a} = 9 \log_2 2 = \log_2 2^9$

$$\log_2 2^{2a} = \log_2 2^3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 3/2$$

Modo alternativo per esercizi 10 e 11

$$\boxed{10'} \quad \log_2 2^a = 3 \Rightarrow a \overset{1}{\log_2} 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\boxed{11'} \quad \log_2 4^a = 3 \Rightarrow a \overset{2}{\log_2} 4 = 3 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = 3/2$$

$$\boxed{12} \quad 2^{\log_2 a} = 9 \quad \text{Faccio a dx e sx il } \log_2$$

$$\log_2 (2^{\log_2 a}) = \log_2 9$$

$$\log_2 a \cdot \log_2 2 = \log_2 9 \Rightarrow \log_2 a = \log_2 9 \Rightarrow a = 9$$

13 $\log_a 4 = 2$ L'incognita alla base è fastidiosa
Con la formula di cambio di base posso passare in base 2

$$\log_a 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 a} = \frac{2}{\log_2 a} \quad \text{L'equazione diventa}$$

$$\log_a 4 = 2 \rightsquigarrow \frac{2}{\log_2 a} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \log_2 a$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 1 \Rightarrow a = 2$$

— o — o —

$$\boxed{14} \quad \log_3 9 = \log_2 a ; 2 = \log_2 a \Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{15} \quad \log_3 9 = \log_a 25 ; 2 = \log_a 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\log_a 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 a} = \frac{2}{\log_5 a} \quad \text{e da qui come esercizio precedente}$$

$$\boxed{16} \quad \log_3 \sqrt{2} = a \log_3 4 ; \log_3 2^{\frac{1}{2}} = a \log_3 2^2$$

$$\frac{1}{2} \log_3 2 = 2a \log_3 2 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{17} \quad \log_5 3^{1000} = \log_{25} a^{1000}$$

$$\log_5 3^{1000} = 1000 \log_5 3$$

$$\log_{25} a^{1000} = 1000 \log_{25} a = 1000 \frac{\log_5 a}{\log_5 25} = 500 \log_5 a$$

L'equazione è diventata:

$$\cancel{1000} \log_5 3 = \cancel{500} \log_5 a ; \quad 2 \log_5 3 = \log_5 a$$

$$\log_5 3^2 = \log_5 a \Rightarrow a = 9$$

$$\boxed{18} \quad \log_{125} 64 = \log_5 a ; \quad \log_{125} 64 = \frac{\log_5 64}{\log_5 125} = \frac{\log_5 64}{3}$$

Quindi l'eq. diventa:

$$\log_5 a = \frac{1}{3} \log_5 64 = \log_5 64^{1/3} = \log_5 \sqrt[3]{64} = \log_5 4$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{19} \quad \log_7 2^{1000} = \log_{49} 2^a ; \quad \log_7 2^{1000} = 1000 \cdot \log_7 2$$

$$\log_{49} 2^a = a \log_{49} 2 = a \frac{\log_7 2}{\log_7 49} = \frac{a}{2} \log_7 2$$

$$\text{Quindi l'eq. diventa: } \cancel{1000} \log_7 2 = \frac{a}{2} \cancel{\log_7 2} \Rightarrow a = 2000$$

$$\boxed{20} \quad \log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a ; \quad \log_7 13 = \frac{\log_5 13}{\log_5 7}$$

$$\frac{\log_5 13}{\cancel{\log_5 7}} \cdot \cancel{\log_5 7} = \log_5 a \Rightarrow a = 13$$

$$\boxed{21} \quad \log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a \quad \text{in base 2}$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a$$

$$\log_2 49 = \log_2 7^2 = 2 \log_2 7$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{2 \log_2 7}{3} = \log_2 a$$

$$\left(\frac{2}{3}\right) \log_2 3 = \log_2 a ; \log_2 3^{\frac{2}{3}} = \log_2 a$$

$$\Rightarrow a = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$\boxed{22} \quad 2^{\log_4 a} = 9$$

$$\text{Se fosse } 2^{\log_4 a} = 8 = 2^3$$

Spezzare il problema in 2 problemi.

Pongo $x = \log_4 a$. L'equazione diventa $2^x = 9$, quindi $x = \log_2 9$. Ora resta da risolvere

$$\boxed{\log_2 9} = \log_4 a = \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 a = \boxed{\log_2 \sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a} = 9 \Rightarrow a = 81$$

$$\boxed{23} \quad 2^{\log_a 3} = 4$$

$$\text{Pongo } x = \log_a 3$$

$$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Resta da risolvere} \quad 2 = \log_a 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 a}$$

$$2 = \frac{1}{\log_3 a} \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \log_3 3 = \log_3 \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI

Titolo nota

18/09/2008

$$\boxed{1} \quad 2^x = 3 \quad x = \log_2 3$$

$$\boxed{2} \quad (2^x)^2 = 3 \quad 1^\circ \text{ modo: proprietà delle potenze}$$

$$(2^x)^2 = 2^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \log_2 3 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$$

$$2^\circ \text{ modo: pongo } 2^x = y \leadsto y^2 = 3 \leadsto y = \pm \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3} \leadsto 2^x = \sqrt{3} \leadsto x = \log_2 \sqrt{3}$$

$$y = -\sqrt{3} \leadsto 2^x = -\sqrt{3} \leadsto \text{NULLA perché una potenza di 2 non è mai } \leq 0.$$

$$\boxed{3} \quad 2^{x^2} = 3 \Rightarrow x^2 = \log_2 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\log_2 3} \quad \text{Sì!!!}$$

$$\boxed{4} \quad 3^{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \log_3 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 2} \quad \text{Sì!!}$$

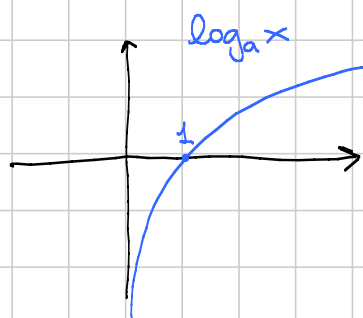
Occhio: $\log_2 3$ e $\log_3 2$ sono quantità > 0 , quindi la radice ha senso

— o — o —

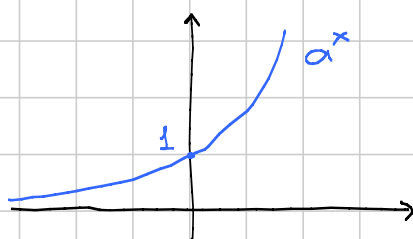
Seguo di potenze e Logaritmi $2^x, 3^x$ o in generale a^x con base $a > 0$ sono sempre quantità > 0 .

$\log_a x$ con $a > 1$

- $\nearrow > 0$ per $x > 1$
- $\rightarrow = 0$ per $x = 1$
- $\searrow < 0$ per $0 < x < 1$
- $\hookrightarrow$ NON DEFINITO PER $x \leq 0$



$a > 1$



$a > 1$

⑤ $4 \cdot 2^{x^2} = 8^x$ scrivo tutto come potenze di 2:
 $2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$; $2^{2+x^2} = 2^{3x}$ (proprietà delle potenze)

Osservazione generale: se ho

$$\boxed{2^{A(x)} = 2^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x)} \quad \text{SI PUÒ FARE}$$

$$2^{2+x^2} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2+x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$P=2, S=3 \Rightarrow$ soluzioni $x=1$ e $x=2$

⑥ $3 \cdot 2^{x^2} = 1$; $2^{x^2} = \frac{1}{3}$; $x^2 = \log_2 \frac{1}{3}$

$$x = \pm \sqrt{\log_2 \frac{1}{3}} \quad \text{NO!!!!} \quad \log_2 \frac{1}{3} < 0, \text{ quindi l'eq.}$$

è $x^2 = \text{valore negativo} \Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE

⑦ $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$, $2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$

$$2^{2x} = [2^x]^2 ; \quad 2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2 = 4 \cdot 2^x$$

Pongo $2^x = y$. L'equazione era $[2^x]^2 - 4 \cdot 2^x + 3 = 0$

e diventa quindi $y^2 - 4y + 3 = 0$. Risolvo in y : $y = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$

$$y=1 \rightsquigarrow 2^x = 1 \rightsquigarrow x=0$$

$$y=3 \rightsquigarrow 2^x = 3 \rightsquigarrow x = \log_2 3$$

⑧ $2^x = 3^x$ 1° modo: divido per 3^x : $\frac{2^x}{3^x} = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0$$

2° modo: faccio a dx e sx il log in base 7: $\log_7 2^x = \log_7 3^x$
 $x \log_7 2 = x \log_7 3$, $(\log_7 2 - \log_7 3) \cdot x = 0 \Rightarrow x=0$
 $\neq 0$

9) $\log_2 (x-1) = 5$

In generale conviene portarsi nella forma

$$\log_a A(x) = \log_a B(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$$

Si può FARE, ma bisogna imporre $A(x) > 0$ (o $B(x) > 0$)
(cioè bisogna fare la verifica alla fine)

$$\log_2 (x-1) = 5 \log_2 2 ; \quad \cancel{\log_2 (x-1) = \log_2 2^5}$$

$$x-1 = 2^5 = 32 \Rightarrow x = 33 \quad (\text{non c'è da imporre nulla perché } 2^5 > 0)$$

10) $\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) = 3 = 3 \log_2 2 = \log_2 8$

$$\cancel{\log_2 [(x-1)(x+1)]} = \cancel{\log_2 8} \quad (8 > 0 \Rightarrow \text{nulla da imporre})$$

$$(x-1)(x+1) = 8, \quad x^2 - 1 = 8, \quad x^2 = 9, \quad x = \pm 3$$

Sostituendo $x = -3$ nell'eq. iniziale si vede che non va bene; $x = 3$ invece sì.

11) $3 \log_3 x + 2 \log_3 x^2 = 21 ; \quad 3 \log_3 x + 4 \log_3 x = 21$

$$7 \log_3 x = 21 \Leftrightarrow \log_3 x = 3 = 3 \log_3 3 = \log_3 27$$

$$\Leftrightarrow x = 27$$

12) $(\log_2 (x+2))^2 + 3 \log_2 (x+2) = 4$. Pongo $y = \log_2 (x+2)$

L'equazione diventa: $y^2 + 3y = 4 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 = 0$

$P = -4, S = -3 \Rightarrow$ soluzioni $y = -4, y = 1$. Torneo in x

$$y = 1 \leadsto \log_2 (x+2) = 1 = \log_2 2 \Rightarrow x+2 = 2 \Rightarrow x = 0$$

$$y = -4 \leadsto \log_2 (x+2) = -4 = -4 \log_2 2 = \log_2 \frac{1}{16} \Rightarrow x+2 = \frac{1}{16} \dots$$

DISEQUAZIONI Teoria generale

$$2^{A(x)} > 2^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) > B(x)$$

SI PUÒ
FARE PER TUTTE
LE BASI > 1
(la base deve essere
la stessa a dx e sx)

base $a > 1$

$$\log_a A(x) > \log_a B(x) \Leftrightarrow A(x) > B(x) > 0$$

SI PUÒ FARE CON TUTTE LE BASI $a > 1$, ma bisogna
imporre $B(x) > 0$ affinché il log abbia senso.

$$\boxed{1} \quad 3^{x^2} < 9 \quad ; \quad 3^{x^2} < 3^2 \quad ; \quad x^2 < 2 \quad , \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\boxed{2} \quad 3^{x+3} > 3 \quad ; \quad 3^{x+3} > 3^1 \quad ; \quad x+3 > 1 \quad , \quad x > -2 \quad (-2, +\infty)$$

$$\boxed{3} \quad \log_3(x+3) > 0$$

$$\log_3(x+3) > \log_3 1 \Leftrightarrow x+3 > 1 > 0$$

Banale

$$x+3 > 1, \text{ quindi } x > -2 \quad (-2, +\infty)$$

$$\boxed{4} \quad \log_2(2x-4) \leq \log_2 2 \quad ; \quad \log_2(2x-4) \leq \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2x-4 \leq 8$$

↑ condizione di esistenza del log.
↑ perché c'era nell'equazione

Le 2 disequazioni

$$2x-4 > 0 \quad \textcircled{1} \text{ devono essere vere}$$

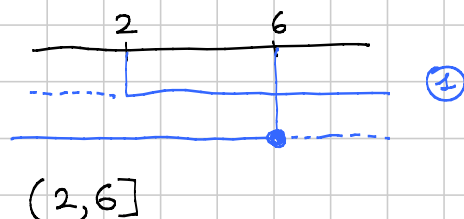
$$2x-4 \leq 8 \quad \textcircled{2} \text{ contemporaneamente}$$

 $\Rightarrow$ si tratta di un SISTEMA

$$\textcircled{1} \quad 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\textcircled{2} \quad 2x-4 \leq 8 \Leftrightarrow 2x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 6$$

$$\text{ZONA COMUNE: } 2 < x \leq 6$$



$$\boxed{5} \quad 2^{x+3} \leq 4^x \Leftrightarrow 2^{x+3} \leq 2^{2x} \Leftrightarrow x+3 \leq 2x \\ \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$\boxed{6} \quad \log_2(2x-4) \leq 0 ; \log_2(2x-4) \leq \log_2 1$$

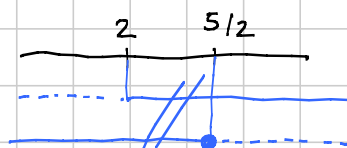
$$\Leftrightarrow 0 < 2x-4 \leq 1$$

$\uparrow$ cond. $\uparrow$ ottenuto tagliando
 esistenza $\uparrow$ i log

$$\begin{cases} 2x-4 > 0 & \textcircled{1} \\ 2x-4 \leq 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad 2x > 4, x > 2$$

$$\textcircled{2} \quad 2x-4 \leq 1, 2x \leq 5, x \leq \frac{5}{2}$$



zona comune: $(2, 5/2]$ $2 < x \leq \frac{5}{2}$

— o — o —

$$\boxed{7} \quad \log_2(2x+3) < 2 ; \log_2(2x+3) < \log_2 4$$

$$0 < 2x+3 < 4$$

$$\begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x+3 < 4 \end{cases} ; \begin{cases} 2x > -3 \\ 2x < 1 \end{cases} ; \begin{cases} x > -3/2 \\ x < 1/2 \end{cases}$$

Soluzione: $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

— o — o —

$$\boxed{8} \quad 2^{x^2+1} = 8$$

$$2^{x^2+1} = 2^3$$

$$x^2+1 = 3$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{8'}$$

$$2^{x^2+1} > 8$$

$$2^{x^2+1} > 2^3$$

$$x^2+1 > 3$$

$$x^2 > 2 \Leftrightarrow$$

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON RADICI

Titolo nota

19/09/2008

↗ Radici di indice dispari

↘ Radici di indice pari

$$\sqrt[3]{}, \sqrt[5]{}, \dots$$

$$\sqrt{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[6]{}, \dots$$

INDICE DISPARI

$$\sqrt[3]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = [B(x)]^3 \quad \text{SI}$$

Idea: 2 numeri sono uguali $\Leftrightarrow$ i loro cubi sono uguali

$$\sqrt[3]{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow A(x) > [B(x)]^3 \quad \text{SI}$$

Idea: il cubo di un numero A è più grande del cubo di un numero B $\Leftrightarrow$ A è più grande di B
Detto altrimenti: il cubo conserva l'ordine

Esempio 1 $\sqrt[3]{x+3} = 2 \Leftrightarrow x+3 = 2^3 \Leftrightarrow x+3 = 8$
 $\Leftrightarrow x = 5$

Esempio 2 $\sqrt[3]{x^3-8} = x+1 \Leftrightarrow x^3-8 = (x+1)^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \cancel{x^3}-8 = \cancel{x^3}+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow 3x^2+3x+9=0$
 $\Leftrightarrow x^2+x+3=0 \quad \Delta < 0 \Rightarrow$ nessuna soluzione

Esempio 3 $\sqrt[5]{x^2-7} > 2$ Posso fare le 5^e potenze

$$x^2-7 > 2^5 \Leftrightarrow x^2-7 > 32 \Leftrightarrow x^2 > 39$$

Valori estremi: $(-\infty, -\sqrt{39}) \cup (\sqrt{39}, +\infty)$

Esempio 4 $\sqrt[3]{x} \leq x \Leftrightarrow x \leq x^3 \Leftrightarrow x^3-x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \geq 0$
 $x(x+1)(x-1) \geq 0 \leadsto$ Diseq. con prodotti

RADICI DI INDICE PARI

$$\sqrt[A(x)]{} = B(x) \Leftrightarrow A(x) = [B(x)]^2$$

Non si può
fare

Esempio $\sqrt{x} = -2$ questa non ha soluzioni. Se faccio il quadrato ottengo $x = 4$ soluzione FINTA!!
Se sostituisco nell'eq. originaria ottengo $2 = -2$
fare il quadrato distrugge la diff. di segno!

In pratica: fare il quadrato si può, ma occorre poi verificare le soluzioni ottenute.

Esempio 1 $\sqrt{x+1} = 9$ elevo al quadrato: $x+1 = 81$
 $x = 80$ Sostituisco $\sqrt{81} = 9$ OK!

Esempio 2 $\sqrt{x+1} = -9$. Elevo al quadrato $x+1 = 81$
 $x = 80$ Sostituisco $\sqrt{81} = -9$ NO!
NO

Esempio 3 $\sqrt[4]{x-8} = 3$. Elevo alla quarta: $x-8 = 3^4 = 81$
 $x = 89$ Sostituisco: $\sqrt[4]{81} = 3$ OK!

Esempio 4 $\sqrt{x+14} = x+2$. Elevo al quadrato:
 $x+14 = (x+2)^2$
 $x+14 = x^2+4x+4$, $x^2+3x-10 = 0$

$S = -3$, $P = -10$ Soluzioni: $x = -5$, $x = 2$

Sostituisco $x = -5$: $\sqrt{9} = -3$ NON ACCETTABILE

Sostituisco $x = 2$: $\sqrt{16} = 4$ OK!

$\Rightarrow$ L'eq. ha una sola soluzione $x = 2$

Nota bene: la soluzione accettabile è quella che rende ≥ 0 il termine a destra.

Esempio 5 $\sqrt{x+6} = -x$ Elevo al quadrato :

$$x+6 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$S=1, P=-6$: Soluzioni : $x=3, x=-2$

Verifico $x=3$: $\sqrt{9} = -3$ **NON ACCETTABILE**

" $x=-2$: $\sqrt{4} = +2$ **Ok**

Unica soluzione : $x=-2$

DISEQUAZIONI CON RADICI (di indice pari)

Bisogna distinguere 2 casi

$$\sqrt{A(x)} < B(x)$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

Primo caso : $\sqrt{A(x)} < B(x)$

$$\begin{cases} A(x) < [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases}$$

Il problema è che il quadrato conserva l'ordinamento tra numeri positivi e lo inverte tra numeri negativi

Se $A(x) < 0$, la radice non ha nemmeno senso

Riassumendo :

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) < [B(x)]^2 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{fare i quadrati} \\ \text{se } B(x) < 0 \text{ non è ver} \\ \text{esistenza della } \sqrt{} \end{array}$$

In questo modo una disequazione si trasforma in un sistema di 3 disequazioni.

Esempio 1 $\sqrt{x+14} < x+2$ si trasforma nel sistema

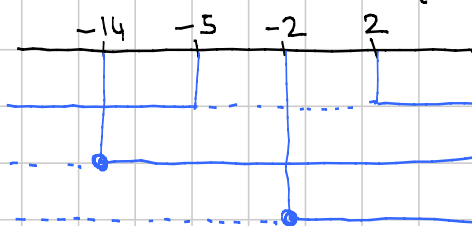
$$\begin{cases} x+14 < (x+2)^2 \\ x+14 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Fare i quadrati

Esistenza radice (BUROCRAZIA)

Positività del termine a dx (se fosse < 0 la diseq. di sicuro non è verificata)

$$\begin{cases} x+14 < x^2+4x+4 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2+3x-10 > 0 \\ x \geq -14 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{VALORI ESTERNI a -5,2}$$



①

Solut. sistema =

②

zona comune = $(2, +\infty)$

③

= soluz. diseq. originaria

Esempio 2

$$\sqrt{2x+3} + x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} < -x$$

questa è equiv. al sistema

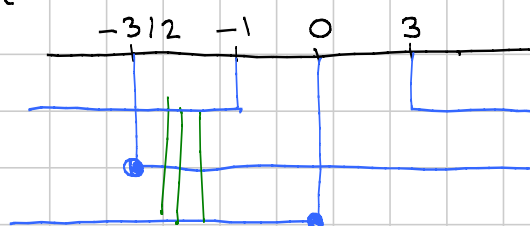
$$\begin{cases} 2x+3 < x^2 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases}$$

Fare il quadrato

BUROCRAZIA (esistenza radice)

Positività del termine a dx (altrimenti no sol.)

$$\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ 2x \geq -3 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Valori esterni a } -1, 3 \\ x \geq -3/2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



①

Solut. diseq. iniziale =

②

solut. sistema =

③

zona comune =

 $[-3/2, -1)$

Caso 2 $\sqrt{A(x)} > B(x)$

La condizione $A(x) \geq 0$ va comunque imposta.

Se $B(x) < 0$, sicuramente la disuguaglianza è verificata (purché la radice abbia senso).

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

Le soluz. di questo sistema sono automaticamente soluz. della diseq. originaria.
Non sono in generale tutte le soluzioni.

Se $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$ posso fare i quadrati e trovare altre soluzioni.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono soluz. della diseq. originaria.
← questo implica la 1ª diseq., cioè $A(x) \geq 0$

In conclusione la disuguaglianza $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è equivalente all' UNIONE di 2 sistemi

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Operativamente:

- risolvo il 1° sistema (separatamente)
- risolvo il 2° sistema (separatamente)
- "attacco" le soluz. del 1° e del 2° (sono tutte buone)

Esempio 1 $\sqrt{x} > x+2$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x > (x+2)^2 \end{cases}$$

Si può trascurare

Risolvero il 1° sistema: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$ SOL: $\emptyset$

Risolvero il 2° sistema: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > x^2+4x+4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+3x+4 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ \Delta = 9-16 < 0 \end{cases} : \text{soluz. } \emptyset$$

Quindi non ci sono soluz. nemmeno al 2° sistema.

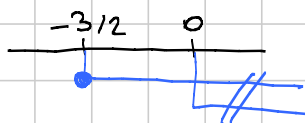
Esempio 2 $\sqrt{2x+3} > -x$

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2x+3 \geq 0} \text{ segue dalla 3ª} \\ -x \geq 0 \\ (2x+3) > x^2 \end{cases}$$

Risolvero il 1° sistema:

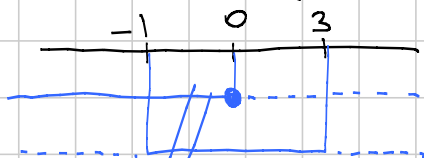
$$\begin{cases} 2x \geq -3 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3/2 \\ x > 0 \end{cases}$$



Soluz. 1° sistema: $(0, +\infty)$

Risolvero il 2° sistema:

$$\begin{cases} -x \geq 0 \\ 2x+3 > x^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-2x-3 < 0 \end{cases} \quad \text{VAL. INTERNI } (-1, 3)$$



Soluz. 2° sistema: $(-1, 0]$

1° sistema: $(0, +\infty)$

2° sistema: $(-1, 0]$



UNENDO le 2 soluzioni ottengo la soluz. della diseq. originaria, cioè $(-1, +\infty)$

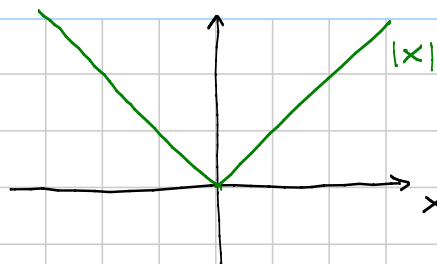
VALORI ASSOLUTI E RELATIVE EQUAZIONI E DISEQUAZIONI

Titolo nota

19/09/2008

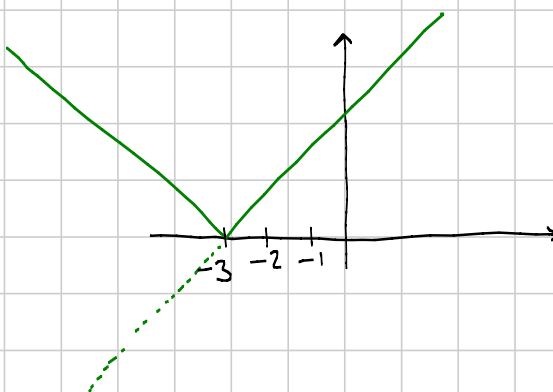
VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Occhio.

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0, \text{ cioè se } x < -3 \end{cases}$$



Equazioni e disequazioni con valori assoluti:

togliere i valori assoluti distinguendo i 2 casi.

Esempio 1 $|x+1| = 3x-4$ Distinguo i casi a seconda del segno di $x+1$

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 = 3x-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 3x-4 \end{cases}$$

Tra le soluz. dei 2 sistemi si fa poi l'unione

↓ Risolvere questo sistema vuol dire risolvere l'eq. e prendere solo le soluzioni che verificano la diseq.

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x = 5 \end{cases} \quad x = 5/2 \quad \text{compatibile con la diseq., quindi accettabile}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 = 3x-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ 4x = 3 \end{cases} \quad x = 3/4 \text{ NON ACCETTABILE}$$

perché non soddisfa la diseq.

Conclusione: l'eq. ha come unica soluz. $x = 5/2$.

Esempio 2 $|x^2 - 4| = 1$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 = 1 \end{cases} \quad \text{Risolvo separatamente e poi faccio l'unione}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 = 5 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{compatibili con la diseq.} \\ \Rightarrow \text{accettabili} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-2, 2) \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \text{compatibili} \Rightarrow \text{accettabili}$$

L'equazione iniziale ha 4 soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$, $x = \pm\sqrt{5}$.
— 0 — 0 —

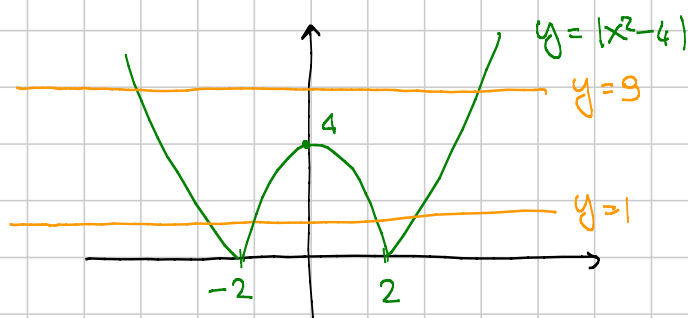
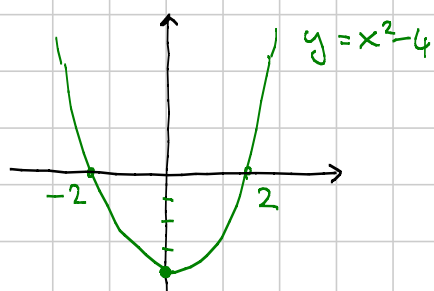
Esempio 3 $|x^2 - 4| = 9$

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^2 = 13 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{13} \quad \begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 = -5 \end{cases} \rightarrow \text{NULLA}$$

accettabili

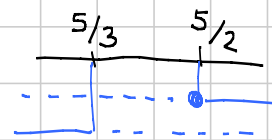
L'equazione ha 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{13}$



Esempio 4 $|2x-5| + x < 0$ Distinguo 2 casi per eliminare il valore assoluto

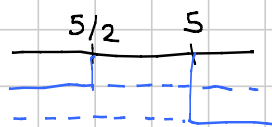
$$\begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5+x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -2x+5+x < 0 \end{cases} \quad \text{Risolvo separ. i 2 sistemi, poi faccio l'UNIONE}$$

$$1^{\circ} \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 3x-5 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x \geq 5 \\ 3x < 5 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 5/2 \\ x < 5/3 \end{cases}$$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

$$2^{\circ} \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ -x+5 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} x < 5/2 \\ x > 5 \end{cases}$$



Nessuna zona comune $\Rightarrow$ NO SOL.

La diseq. iniziale non ha soluzioni

Esempio 5 $|2x-3| > x+10$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 2x-3 > x+10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3 < 0 \\ -2x+3 > x+10 \end{cases}$$

$$1^{\circ} \begin{cases} 2x \geq 3 \\ x > 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x > 13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > 13} \quad \text{Solus. 1^{\circ} sistema}$$

$$2^{\circ} \begin{cases} 2x < 3 \\ -3x > 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3/2 \\ x < -7/3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x < -7/3} \quad \text{Solus. 2^{\circ} sistema}$$

Solus. diseq. iniziale = UNIONE solus. dei 2 sistemi

$$= \underline{\underline{(-\infty, -7/3) \cup (13, +\infty)}}$$

Esempio 6 $|x+1| + |2x+3| = 4x+8$ Distinguo 4 casi a seconda dei segni

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ x+1+2x+3 = 4x+8 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+3 < 0 \\ x+1-2x-3 = 4x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ -x-1+2x+3 = 4x+8 \end{cases}$$

Risolvero i 4 sistemi

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3/2 \\ x = -4 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ 2x+3 < 0 \\ -x-1-2x-3 = 4x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < -3/2 \end{cases} \quad \text{Già queste 2 sono incompatibili}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3/2 \\ 3x = -6 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE} \quad x = -2$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x < -3/2 \\ 7x = -12 \end{cases} \quad x = -12/7$$

$x = -12/7$ è < -1 e anche $< -3/2$, quindi è compatibile
 Conclusione: L'equazione iniziale ha come unica soluzione
 $x = -12/7$.

— 0 — 0 —

Esempio 7 $(x-2) \log_5 x > 0$ Disequazione con prodotto
 Studio separatamente i 2 fattori

$$x-2 > 0 \quad \text{per } x > 2$$

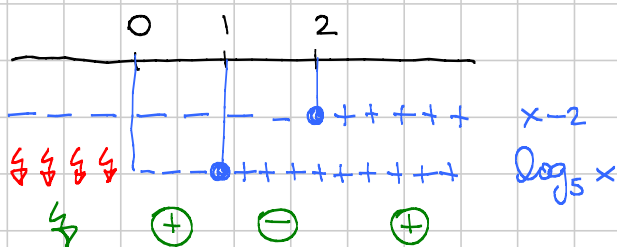
$$x-2 = 0 \quad \text{per } x = 2$$

$$x-2 < 0 \quad \text{per } x < 2$$

$$\log_5 x > 0 \quad \text{per } x > 1$$

$$\log_5 x = 0 \quad \text{per } x = 1$$

$$\log_5 x < 0 \quad \text{per } 0 < x < 1$$



Soluz. diseq.: $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

Se fosse stato $(x-2) \log_5 x \leq 0$ la sol. sarebbe stata
 $[1, 2]$

Se fosse stato $(x-2) \log_5 x \geq 0$ la sol. era
 $(0, 1] \cup [2, +\infty)$

Esempio 8 $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$; $[2^x]^2 - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$

Pongo $t = 2^x$: $t^2 - 5t + 4 \leq 0$ radici: $t = 1, t = 4$

Soluzioni in t $1 \leq t \leq 4$. Torso in x :

$1 \leq 2^x \leq 4$, cioè

$\begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \leq 4 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x \geq 2^0 \\ 2^x \leq 2^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$ $[0, 2]$

Esempio 9 $(3^{x+3} - 1)(x+3) \leq 0$ Diseq. con prodotto

$x+3 > 0$ per $x > -3$

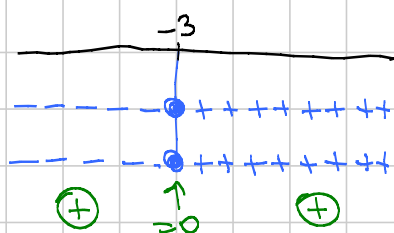
$x+3 = 0$ per $x = -3$

$x+3 < 0$ per $x < -3$

$3^{x+3} - 1 > 0 \Leftrightarrow 3^{x+3} > 1 \Leftrightarrow 3^{x+3} > 3^0 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$3^{x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = -3$

$3^{x+3} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < -3$



$x+3$
 $3^{x+3} - 1$

La soluz. della diseq.
data è solo $x = -3$

CONSEGUENZA DELL'ALTRA

Esempio 10 $\sqrt{x+3} > 4$

$x+3 \geq 0$ BUROCRAZIA

$x+3 > 16$ QUADRATI

Soluzioni : $x > 13$

$(13, +\infty)$

Esempio 11 $\sqrt{x+3} > -4$ sempre verificata purchè la radice abbia senso, quindi

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

Esempio 12 $\sqrt{x+3} < 5$ $\begin{cases} x+3 \geq 0 & \text{BUROCRAZIA} \\ x+3 < 25 & \text{QUADRATI} \end{cases}$

$x \geq -3$, $x < 22 \Rightarrow [-3, 22)$

Esempio 13

$$\sqrt{x} < |x-2|$$

Distinguo 2 casi per eliminare il 1-1

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x} < x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ \sqrt{x} < -x+2 \end{cases}$$

Risolvo separatamente e faccio l'unione

... così è lasciato per esercizio ...

Alternativa + rapida

$$x \geq 0$$

BUROCRAZIA

 $|x-2| \geq 0$ sempre (si annulla $\Leftrightarrow x=2$)Quindi (purché $x \geq 0$) posso fare i quadrati ottenendo

$$x < |x-2|^2 = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

In conclusione ho ottenuto il sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \text{valori est. a } 1, 4 \end{cases}$$



Sol. diseq. iniz. = soluz. sistema

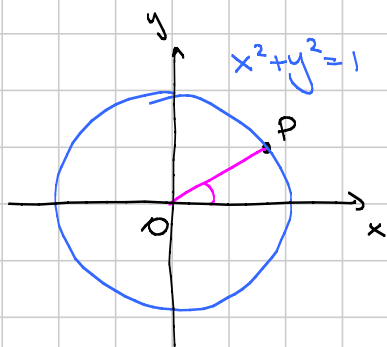
$$= \text{parte comune} = [0, 1) \cup (4, +\infty)$$

TRIGONOMETRIA

Titolo nota

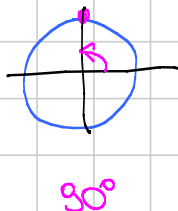
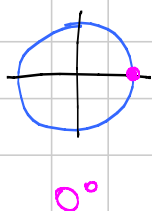
22/09/2008

CIRCONFERENZA TRIGONOMETRICA = centro in $(0,0)$ e raggio 1.



Come individuare un p.to P sulla circonferenza?

GRADI SESSAGESIMALI (misura dell'angolo)



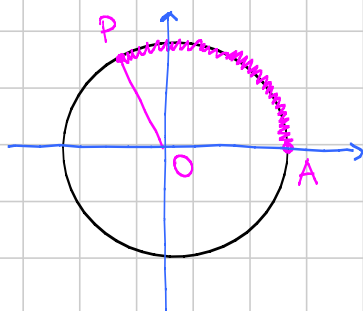
Angolo: quello formato dal semiasse positivo delle x e il segmento OP misurato in senso antiorario.

Giri successivi: gli angoli sono definiti a meno di multipli di 360° :

- angoli $\geq 360^\circ$ = avere fatto più di una volta il giro
- angoli $< 0^\circ$ = girare in senso orario (al contrario)

RADIANTI

Lunghezza del percorso che parte dalla linea di partenza (il p.to $(1,0)$ della circ. trig.) e segue la circ. trigonometrica fino al p.to P



Tutto il giro = 360° = lunghezza circ.
= 2π

- Archi $> 2\pi$ vuol dire fare più di un giro
- Archi < 0 " " girare al contrario

Conversione gradi $\leftrightarrow$ radianti

$$\text{GRADI} : \text{RADIANTI} = 360^\circ : 2\pi$$

$$0^\circ \leftrightarrow 0$$

$$90^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi$$

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$$

$$270^\circ \leftrightarrow \frac{3\pi}{2}$$

$$45^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$30^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$60^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{3}$$

$$120^\circ \leftrightarrow \frac{2\pi}{3}$$

$$150^\circ \leftrightarrow \frac{5\pi}{6}$$

$$540^\circ \leftrightarrow 3\pi$$



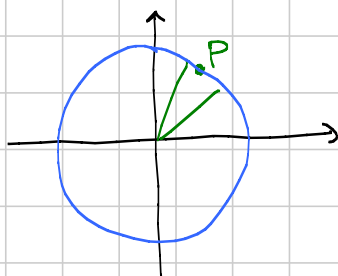
10°

$$\text{GRADI} : \text{RAD} = 360^\circ : 2\pi$$

$$10^\circ : \text{RAD} = 360^\circ : 2\pi$$

$$\text{RAD} = \frac{2\pi \cdot 10^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{18}$$

Dove si trova il p.to cor. ad 1 RADIANTE



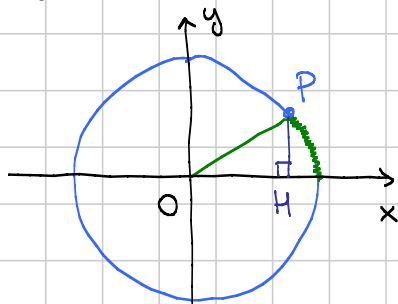
$$\text{GRADI} : \text{RAD} = 360^\circ : 2\pi$$

$$\text{GRADI} : 1 = 360^\circ : 2\pi$$

$$\text{GRADI} = \frac{1 \cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3, \dots}$$

= un po' meno di 60°

Definizione di sen, cos, tan.

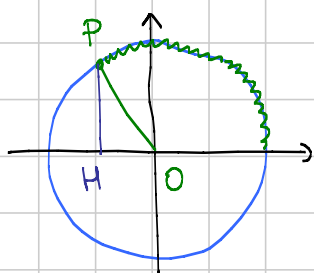


Sia P un p.to della circ. trig.
corrispondente ad un arco α . Le
coordinate di P sono

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$\overset{\text{OH}}{\text{cos}} \quad \overset{\text{PH}}{\text{sin}}$

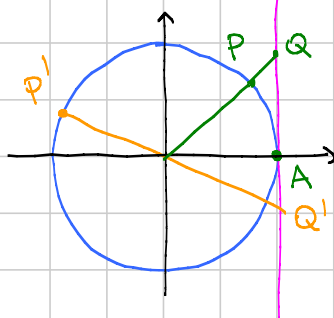
OH e PH vanno pensati con segno



PH è positivo
OH è negativo

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= AQ$$



La tangente si misura sempre sulla retta tangente in A ed è > 0 se il p.to Q si trova sopra A, negativa se si trova sotto A

$\tan \alpha > 0$ nel 1° e nel 3° quadrante

$\tan \alpha < 0$ nel 2° e nel 4° quadrante

$\tan \alpha = 0$ per P corrispondenti a



$\tan \alpha$ non è definita



Geometricamente: OP non incontra la retta tangente in A

Algebricamente: $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ richiede $\cos \alpha \neq 0$, ma $\cos \alpha = 0$

quando la coord. x di P è $= 0$, cioè nei 2 p.ti estremi

RELAZIONE FONDAMENTALE: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

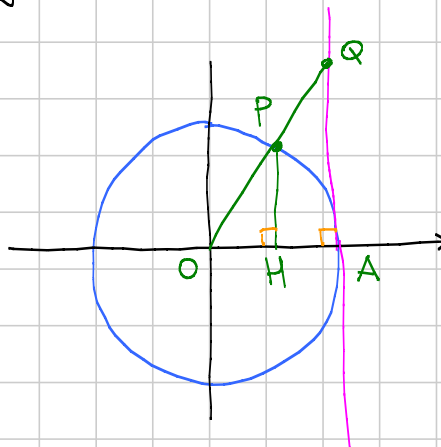
Geometricamente è il teo. di Pitagora: $OH^2 + PH^2 = OP^2 = 1$

Perché $\tan \alpha = AQ$?

I triangoli OHP e OAQ sono simili (stessi angoli), quindi hanno i lati in proporzione

$$\frac{PH}{OH} = \frac{AQ}{OA}, \text{ cioè}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{AQ}{1} \leftarrow \text{Raggio}$$



Angoli e archi notevoli

$$0^\circ \leftrightarrow 0 \text{ rad.}$$

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \tan 0 = 0$$

$$90^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1, \tan \frac{\pi}{2} \text{ non def.}$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi \text{ rad.}$$

$$\cos \pi = -1, \sin \pi = 0, \tan \pi = 0$$

$$270^\circ \leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \tan \text{ N.D.}$$

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$

$$\cos(2\pi) = 1, \sin(2\pi) = 0, \tan(2\pi) = 0$$

$$45^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{4}$$

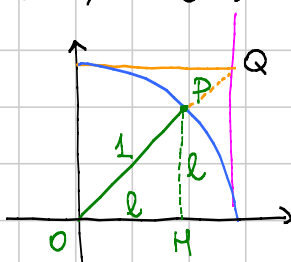
$$OH = PH = l$$

$$\text{Pitagora: } l^2 + l^2 = 1$$

$$2l^2 = 1$$

$$l^2 = \frac{1}{2}$$

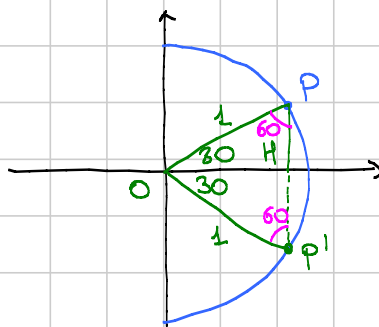
$$l = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$30^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \text{ radianti}$$

il triangolo OPP' è equilatero, quindi $PP' = 1$ e di conseguenza $PH = \frac{1}{2}$



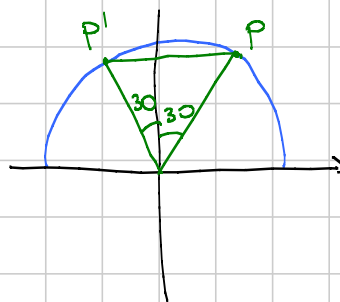
Quindi $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Per calcolare il cos uso

$$\text{Pitagora: } OH^2 = OP^2 - PH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

60° $\frac{\pi}{3}$ Esattamente
come prima,
ma ruotato di 90°



$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

— 0 — 0 —

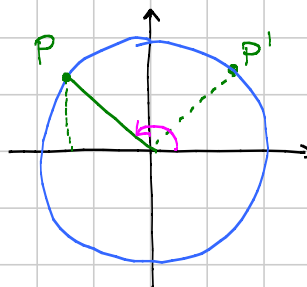
$$\frac{3\pi}{4} \quad 135^\circ$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

— 0 — 0 —



$$240^\circ \quad \frac{4\pi}{3}$$

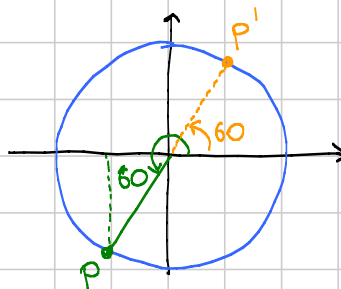
$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

(individuano lo stesso p.to
sulla retta tangente per A)

— 0 — 0 —

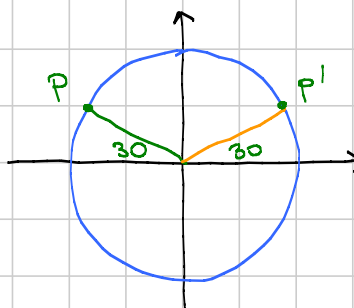


$$\frac{5\pi}{6} \quad 150^\circ$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



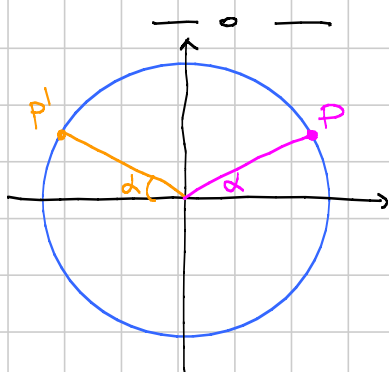
ARCHI ASSOCIATI

 α $\pi - \alpha$ $\pi + \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$ $-\alpha$ $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

Domanda: se conosco $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$,
come trovo le funzioni trigonometriche
degli archi associati?

Pensare al disegno!!!!

$\pi - \alpha$



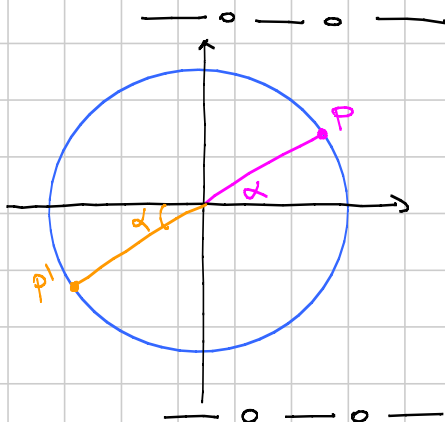
P' corrisponde a $\pi - \alpha$
 P " " " α

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$\pi + \alpha$

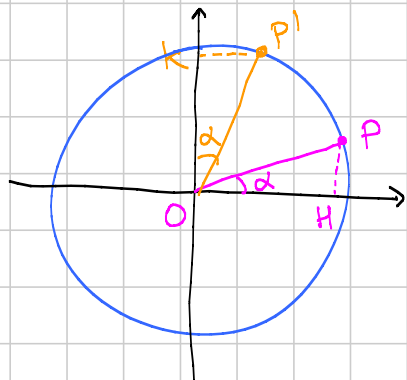


$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$\frac{\pi}{2} - \alpha$



$\sin$ e $\cos$ si scambiano

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$P'K$ " PH

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

" OK " OH

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\boxed{-\alpha}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + \alpha}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

Per esercizio ricavare (con disegno) $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

$$2\pi \pm \alpha \rightarrow \text{esattamente come } \pm \alpha$$

$$2\pi + \alpha \rightsquigarrow \pi + \alpha$$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Titolo nota

22/09/2008

FORMULA FONDAMENTALE : $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

ARCHI ASSOCIATI $\sin / \cos / \tan$ $\pi \pm \alpha, \frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$

FORMULE ADDIZIONE $\sin / \cos / \tan$ $\alpha \pm \beta$

FORMULE DUPLICAZIONE " " " 2α

" PRODOTTO $\rightarrow$ SOMMA $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \dots + \dots$

" SOMMA $\rightarrow$ PRODOTTO $\sin \alpha + \sin \beta = \dots \cdot \dots$

— 0 — 0 —

FORMULE DI ADDIZIONE

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

RICORDARE

Gli archi associati sono particolari esempi di formule di addizione

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= \overset{-1}{\cos(\pi)} \overset{0}{\cos \alpha} + \overset{0}{\sin(\pi)} \overset{1}{\sin \alpha} \\ &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= \overset{0}{\sin(\pi)} \overset{1}{\cos \alpha} + \overset{-1}{\cos(\pi)} \overset{0}{\sin \alpha} = -\sin \alpha \end{aligned}$$

DUPLICAZIONE

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (\alpha = \beta = x \text{ nella } \sin(\alpha + \beta))$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1\end{aligned}$$

RICORDARE

Esercizio $\cos(3x) = \cos(2x+x)$

$$\begin{aligned}&= \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \\ &= (2 \cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \sin^2 x \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x \\ &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

$$\sin(3x) = \sin(2x+x)$$

$$\begin{aligned}&= \sin(2x) \cos x + \cos(2x) \sin x \\ &= 2 \sin x \cos x \cdot \cos x + (1 - 2 \sin^2 x) \cdot \sin x \\ &= 2 \sin x \cdot \cos^2 x + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ &\quad \underline{\quad 0 \quad \quad 0 \quad \quad \quad}\end{aligned}$$

FORMULE PRODOTTO $\rightarrow$ SOMMA

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \textcircled{1}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \textcircled{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \textcircled{3}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \textcircled{4}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4}$$

FORMULE SOMMA $\rightarrow$ PRODOTTO

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\underbrace{\cos (\alpha + \beta)}_x + \underbrace{\cos (\alpha - \beta)}_y = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (\text{altro modo di usare ①+②})$$

$\alpha + \beta = x$
 $\alpha - \beta = y$

Come ricavare α e β ? Sommo: $2\alpha = x+y \rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}$

Sottraggo: $2\beta = x-y \rightarrow \beta = \frac{x-y}{2}$

Conclusione:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\alpha + \beta \quad \alpha - \beta \quad \alpha \quad \beta$
 $-o-$

Formula per $\sin x + \sin y$.

$$\sin \left(\underbrace{\alpha + \beta}_x \right) + \sin \left(\underbrace{\alpha - \beta}_y \right) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

Come prima: $\alpha = \frac{x+y}{2} \quad \beta = \frac{x-y}{2}$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

Analogamente:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = -2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$

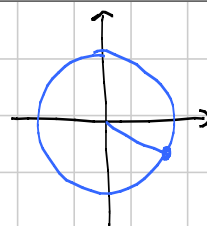
$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\alpha + \beta \quad \alpha - \beta \quad \alpha \quad \beta$

Esercizi [1] $\sin 330^\circ = \sin (-30^\circ) = -\frac{1}{2}$

$$\cos 330^\circ = \cos (30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

330° in radianti

$$360^\circ - 30^\circ \rightsquigarrow 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$



[2] $15^\circ \rightsquigarrow \frac{\pi}{12}$

$$\cos (15^\circ) = \cos (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \cos (45^\circ) \cos (30^\circ) + \sin (45^\circ) \sin (30^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin (15^\circ) = \sin (60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

[3] $75^\circ \rightsquigarrow \frac{5\pi}{12}$

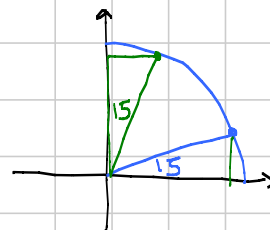
$$75^\circ = 60^\circ + 15^\circ \quad \text{esercizio}$$

$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ \quad "$$

$$75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$$

$$\cos (75^\circ) = \cos (90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \dots$$

$$\sin (75^\circ) = \sin (90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \dots$$



[4] $2010^\circ = 1800^\circ + 210^\circ$

$$= 5 \cdot 360^\circ + 210^\circ \quad (5 \text{ giri} + 210^\circ)$$

individua sulla circ. trigo. lo stesso punto individuato da 210°

$$210^\circ \rightsquigarrow 180^\circ + 30^\circ \rightsquigarrow \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

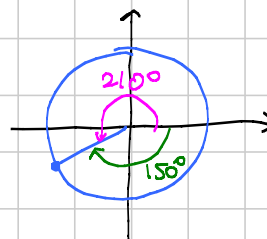
$$2010^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 210^\circ \rightsquigarrow 10\pi + \frac{7\pi}{6} = \frac{67\pi}{6}$$

$$\cos (2010^\circ) = \cos (210^\circ) = \cos (180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin (2010^\circ) = \sin (180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

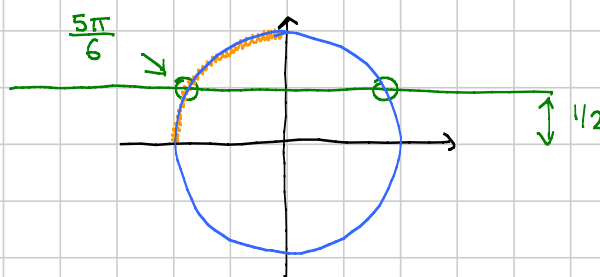
- ⑤ Trovare un numero negativo $-n^\circ$ t.c. 210° individua lo stesso punto di $-n^\circ$

$$-150^\circ, -150^\circ - 360^\circ, \dots$$

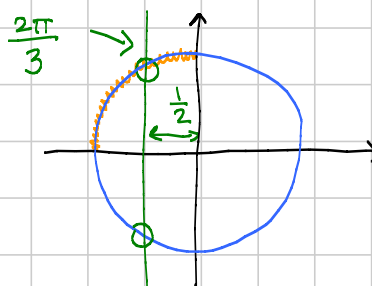


- ⑥ Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{2}$, quanto vale x ?

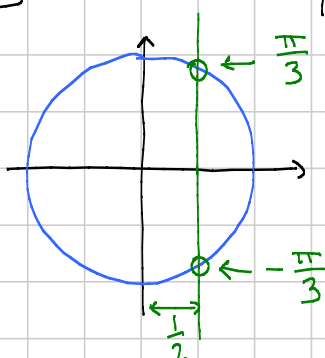
$$x = \frac{5\pi}{6}$$



- ⑦ se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\cos x = -\frac{1}{2}$, allora $x = \frac{2\pi}{3}$



- ⑧ Risolvere l'equazione $\cos x = \frac{1}{2}$. Guardo il cerchio!!!



Se voglio le soluzioni contenute in $[0, 2\pi]$, allora ho 2 soluzioni

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{3}$$

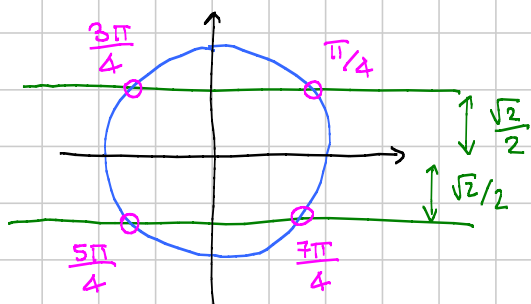
Se voglio TUTTE le soluzioni reali:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{con } k \text{ intero}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{con } k \text{ intero}$$

9 $2 \sin^2 x = 1 \quad x \in [0, 2\pi]$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



4 soluzioni

$x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{3\pi}{4}$

in cui $\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{5\pi}{4} \quad x = \frac{7\pi}{4}$

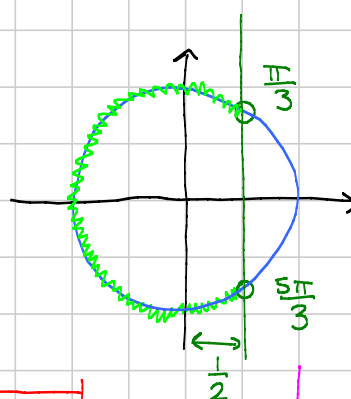
in cui $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

10 $\cos x \leq \frac{1}{2} \quad x \in [0, 2\pi]$

Cerco i p.ti della circ. trigon. con ASCISSA $\leq \frac{1}{2}$

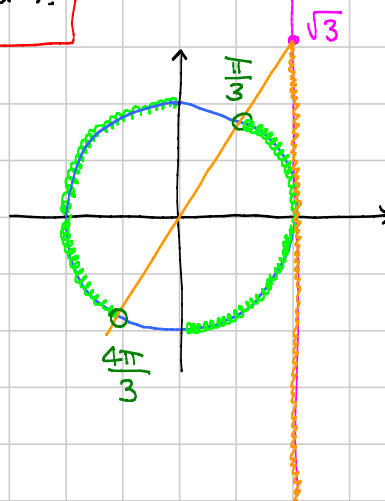
Soluzione: $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

Occhio!! $[\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]$ è un'assurdità!!



11 $\tan x < \sqrt{3} \quad \text{in } [0, 2\pi]$

Soluzione: $[0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$



12 $4 \cos^2 x \geq 1 \quad x \in [0, 2\pi]$

$\cos^2 x \geq \frac{1}{4}$

$t^2 \geq \frac{1}{4}$

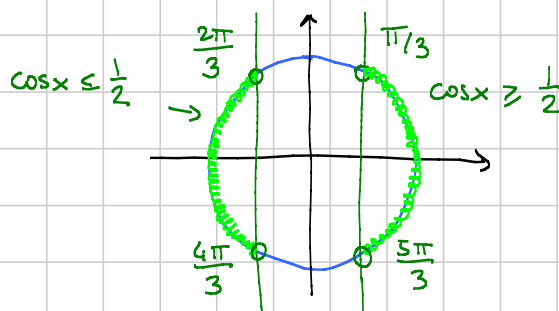
VALORI ESTERNI

$t \leq -\frac{1}{2} \text{ e } t \geq \frac{1}{2}$

$\cos x \geq \frac{1}{2}$

$\cos x \leq -\frac{1}{2}$

$[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

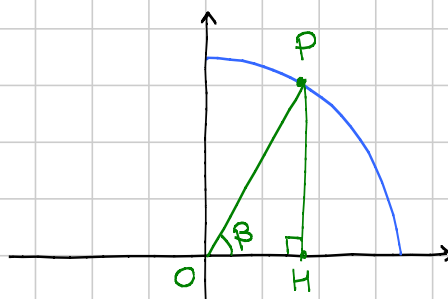
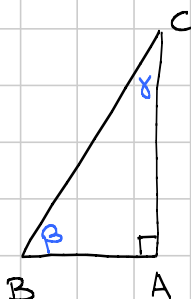


TRIGONOMETRIA E TRIANGOLI

Titolo nota

23/09/2008

TRIANGOLO RETTANGOLO



Obiettivo della trigonometria applicata ai triangoli è la RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI (dati alcuni elementi, trovare i restanti).

Nel caso rettangolo ABC è simile a HOP, dunque i lati sono in proporzione

$$\frac{AB}{HO} = \frac{AC}{HP} = \frac{BC}{OP}$$

In HOP abbiamo che $OP=1$, $OH=\cos\beta$, $PH=\sin\beta$

$$\frac{AB}{\cos\beta} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{1}$$

da qui si ricavano tutte le formule

$$\begin{aligned} AB &= BC \cdot \cos\beta \\ AC &= BC \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

CATETI IN FUNZIONE DI
IPOTENUSA E UN ANGOLO

Se invece di β conosco γ ho che $\beta = 90^\circ - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$ quindi (angoli associati)

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin\gamma, \quad \sin\beta = \sin(90^\circ - \gamma) = \cos\gamma$$

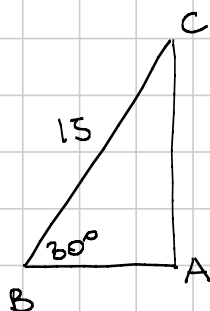
$$\begin{aligned} AB &= BC \cdot \sin\gamma \\ AC &= BC \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

CATETI IN FUNZIONE DI
IPOTENUSA E ALTRO ANGOLO

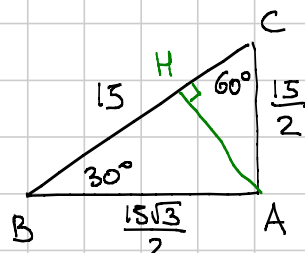
CATETO = IPOTENUSA $\cdot$ $\begin{cases} \nearrow \text{COS ANGOLO ADIACENTE} \\ \searrow \text{SIN ANGOLO OPPOSTO} \end{cases}$

Esercizio 1

$$BC = 15 \quad \hat{B} = 30^\circ \quad \hat{A} = 90^\circ$$



Più in scala



$$AB = BC \cdot \cos 30^\circ = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

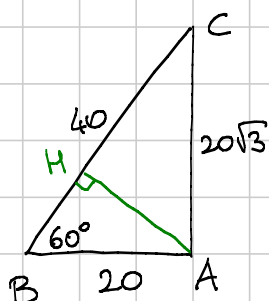
$$AC = 15 \cdot \sin 30^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Per calcolare AH considero il triangolo rettangolo HCA

$$\begin{array}{ccccccc} AH & = & AC & \cdot & \sin 60^\circ & = & \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{CATETO} & & \text{IPOT.} & & \text{ANGOLO} & & \\ & & & & \text{OPPOSTO} & & \\ & & & & \text{AL CATETO} & & \end{array}$$

Esercizio 2

$$AB = 20 \quad \hat{B} = 60^\circ \quad \hat{A} = 90^\circ$$



$$AB = BC \cdot \cos 60^\circ = BC \cdot \frac{1}{2}$$

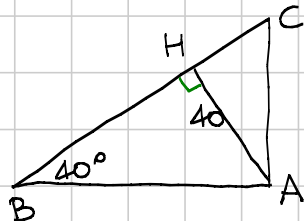
$$BC = 2AB = 40; \quad AC = BC \cdot \sin 60^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

Quando il triangolo rettangolo AHB

$$\begin{array}{ccccccc} AH & = & AB & \cdot & \sin 60^\circ & = & 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{cateto} & & \text{ipot.} & & \text{angolo} & & \\ & & & & \text{opposto} & & \end{array}$$

Esercizio 3

$$\hat{B} = 40^\circ \quad AH = 40 \quad \text{Quando AHB :}$$



$$\begin{array}{ccccccc} AH & = & AB & \cdot & \sin 40^\circ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{cateto} & & \text{ipot.} & & \text{angolo opposto} \end{array}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AH}{\sin 40^\circ} = \frac{40}{\sin 40^\circ} = \dots$$

$$BC \cdot \cos 40^\circ = AB \leadsto \text{trovo } BC \dots$$

TRIANGOLI QUALUNQUE

Quattro strumenti
fondamentali:

- ① FORMULA TRIGO PER AREA
 - ② TEO. CARNOT (TEO. COSENO)
 - ③ FORMULA DI ERONE PER AREA
 - ④ TEO. SENI
- o — o —

⑤ NOTAZIONI STANDARD

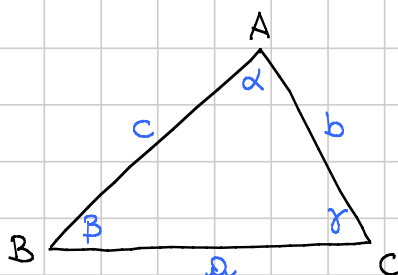
$$p = \text{semiperimetro} = \frac{a+b+c}{2}$$

S = Area

R = raggio circ. circoscritta
(quella che passa per A, B, C)

r = raggio circ. inscritta (tangente ai 3 lati)

— o — o —



① FORMULA TRIGONOMETRICA PER L'AREA

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

"Due lati per sin angolo compreso"

② TEOREMA DEL COSENO (CARNOT)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Per $\alpha = 90^\circ$ diventa pitagora

③ FORMULA DI ERONE PER L'AREA

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

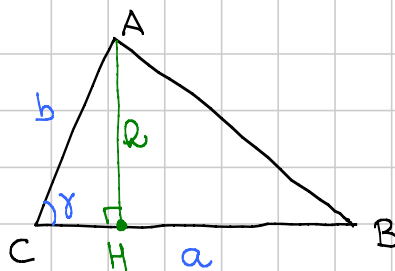
④ TEO. SENI

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

labo
sin ang. opposto

Come si dimostrano?

- ① Situazione: conosco a, b, γ .
Voglio calcolare l'area



$S = \frac{1}{2} a \cdot h$. Devo calcolare h . Considero il triangolo rett.

$$CAH: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cateto}}}{AH} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipot.}}}{AC} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin. angolo opposto}}}{\sin \gamma} = b \sin \gamma$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma$$

- ② Situazione: conosco a, b, γ . Voglio calcolare c , cioè AB .
Per Pitagora:

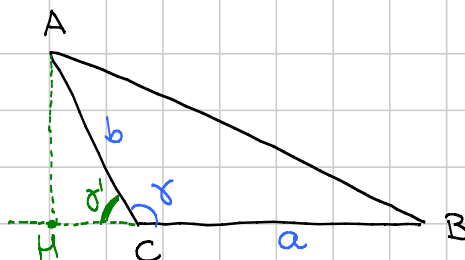
$$AB^2 = \underbrace{AH^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{si calcola} \\ \text{come prima}}} + HB^2 \quad HB = \underbrace{CB}_{\substack{\uparrow \\ \text{conosco}}} - \underbrace{CH}_{\substack{\uparrow \\ \text{posso calcol.}}}$$

$$AH = b \cdot \sin \gamma, \quad CH = b \cdot \cos \gamma, \quad HB = a - b \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} \boxed{c^2} &= AB^2 = AH^2 + HB^2 = (b \sin \gamma)^2 + (a - b \cos \gamma)^2 \\ &= b^2 \sin^2 \gamma + a^2 + b^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma \\ &= b^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + a^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= \boxed{b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma} \\ &\quad \text{--- o --- o ---} \end{aligned}$$

Fregatura:

In questa figura



$$\begin{aligned} AH &= AC \cdot \sin \gamma' \\ &= AC \cdot \sin (180^\circ - \gamma) \end{aligned}$$

$$= AC \cdot \sin \gamma \quad (\text{quindi le formule precedenti valgono ancora})$$

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = AH^2 + (CB + HC)^2$$

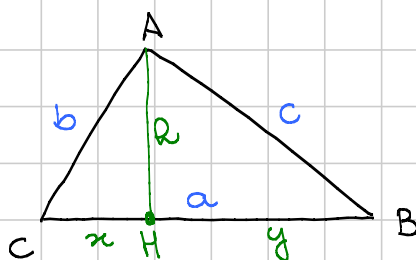
$$HC = b \cdot \cos \gamma' = b \cdot \cos (180^\circ - \gamma) = -b \cos \gamma$$

Aggiungere

$-b \cos \gamma$ è come
sottrarre $b \cos \gamma$

③ ERONE

Situazione:

conosco a, b, c .Voglio calcolare S 

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h \quad \text{Problema: calcolare } h. \text{ Chiamo } x = CH, y = HB$$

Scriviamo 3 equazioni che legano x, y, h (incognite)

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = b^2 & \text{Pitagora in } ACH \\ y^2 + h^2 = c^2 & \text{Pitagora in } ABH \\ x + y = a & \text{Somma di lunghezze} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema,
si trovano x, y, h

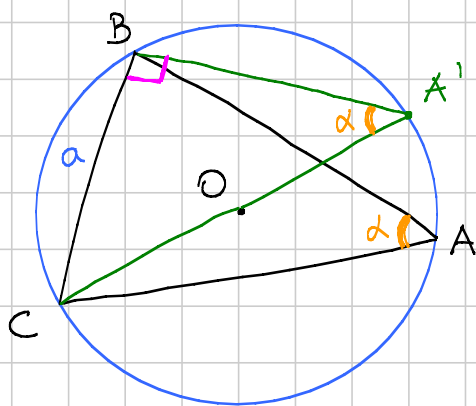
Come si risolve il sistema?

$$1^{\text{a}} \text{ equazione} - 2^{\text{a}} \text{ equazione: } x^2 - y^2 = b^2 - c^2$$

$$\underbrace{(x+y)}_a (x-y) = b^2 - c^2$$

$$x - y = \frac{b^2 - c^2}{a}; \quad x + y = a \quad \leadsto \text{trovo } x \text{ e } y \leadsto \text{trovo } h$$

④ TEO. SENI



- CA' è un diametro, quindi $\widehat{A'BC}$ è di 90°
- $\widehat{CA'B} = \alpha$ perché tutti gli angoli che insistono sulla corda BC e hanno il vertice sulla circonferenza hanno la stessa ampiezza

Considero il triangolo rettangolo $A'BC$

$$BC = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cateto}}}{a} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotenusa}}}{CA'} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{angolo opposto}}}{\sin \alpha}$$

(che è diametro)

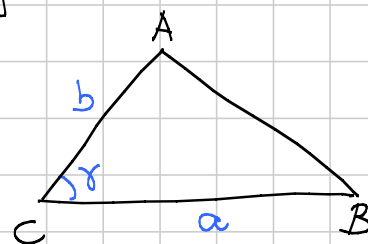
$$\text{cioè } a = 2R \cdot \sin \alpha, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

RISOLUZIONE DI TRIANGOLI

Caso 1 Noti 2 lati e l'angolo compreso.

1. Calcolo c con il teorema del COSENO
2. Per calcolare α e β posso ricorrere ancora al teo del coseno, oppure al teo dei seni

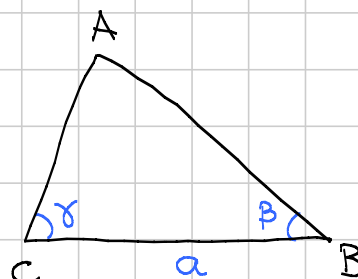


Caso 2 Noti 2 angoli e lato ad essi adiacente

1. $\alpha = \pi - \beta - \gamma$
2. Uso poi il teo dei seni

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

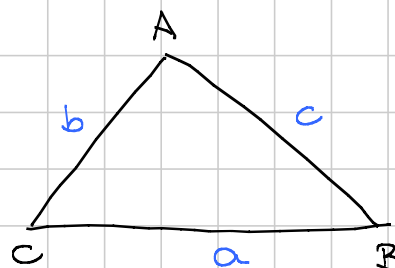
conosco tutto



Caso 3 Noti 3 lati. Voglio i 3 angoli

2 modi:

- * teo. coseno e trovo i coseni degli angoli
 - * calcolo l'area con ERONE e quindi i seni degli angoli con la formula trigo. per l'area
- o —



ACHTUNG! È meglio conoscere il seno o il coseno dell'angolo di un triangolo?

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ \text{ oppure } \alpha = 150^\circ$$

(Due possibilità)

Con il coseno ce n'è sempre UNO SOLO

MEGLIO IL COSENO !!!

TRIGONOMETRIA: ESERCIZI VARI

Titolo nota

23/09/2008

Esercizio 1 $a=7$ $b=6$ $c=5$, trovare angoli e area

Area si fa con Erone $p = \frac{a+b+c}{2} = 9$

$$\text{Area} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \dots$$

Per gli angoli uso CARNOT: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, quindi

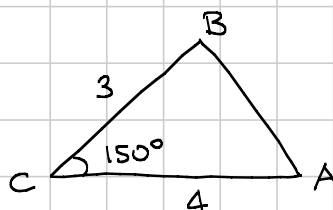
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{60} = \dots$$

Analogamente: $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Esercizio 2 $a=3$ $b=4$ $\gamma=150^\circ$

Per calcolare c uso

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \\ &= 9 + 16 - 24 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 9 + 16 + 12\sqrt{3} \end{aligned}$$



Una volta noto c conosco i 3 lati
e proseguo come prima

Esercizio 3 $a=5$ $\alpha=120^\circ$ $\gamma=40^\circ$

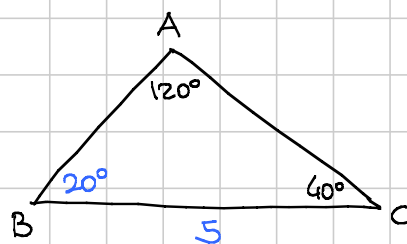
Si trova $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 20^\circ$.

Se voglio calcolare b uso tho. seni

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{Cosa conosco?}$$

$$\frac{b}{\sin 20^\circ} = \frac{5}{\sin 120^\circ} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 120^\circ} = \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Per calcolare } c: \quad \frac{c}{\sin \gamma} &= \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \\ &= a \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} = \dots \end{aligned}$$



Esercizio 4 Come capire se un triangolo è ottusangolo, rettangolo, acutangolo dati i lati

$$a = 4, b = 3, c = 2$$

L'angolo più grande (l'unico che può essere ottuso) è α .

Dunque basta capire se α è

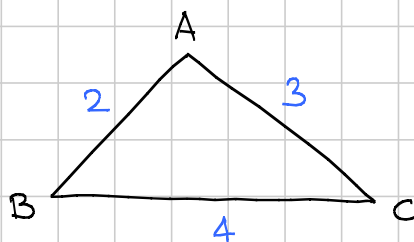
ottuso, retto, acuto. Si può capire dal segno di $\cos \alpha$, quindi uso teo. coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \text{tutto dipende dal segno di } b^2 + c^2 - a^2$$

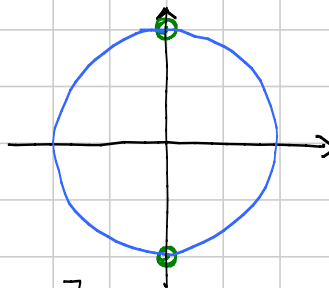
Nel vostro caso: $9 + 4 - 16 < 0 \Rightarrow$ OTTUSANGOLO.

In generale tutto dipende dalla somma dei quadrati dei 2 lati + piccoli - il quadrato del lato + grande.



Esercizio 5 $\cos x = 0 \quad x \in [0, 3\pi]$ Quando il cerchio
cerco i p.ti della
circ. trigonometrica
con ascissa = 0

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}$$

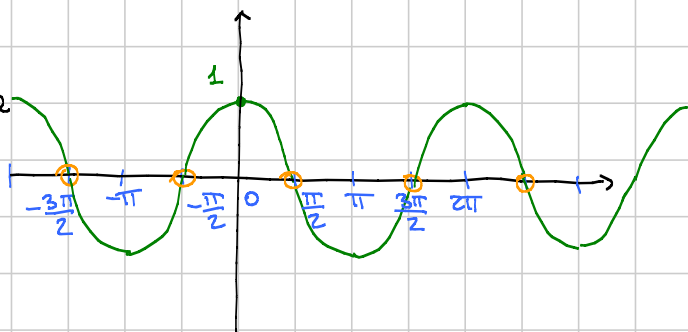


Se fosse stato: $\cos x = 0 \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$

$$x = -\frac{3\pi}{2} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

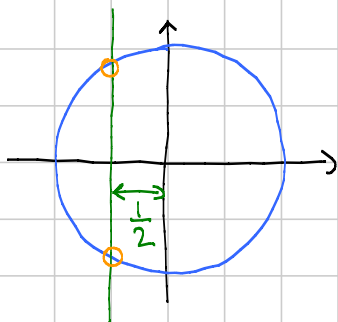
Grafico di $\cos x$

$\cos x = 0$ vuol dire trovare i valori di x in cui il grafico sta ad altezza 0, cioè tocca l'asse x



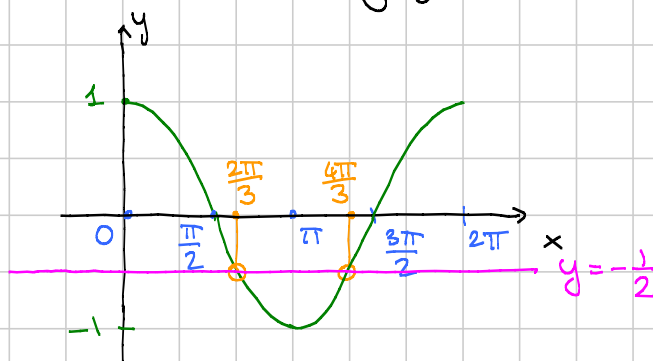
Es. 5 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x \in [0, 2\pi]$

Guardo il cerchio



$$x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

Guardo il grafico

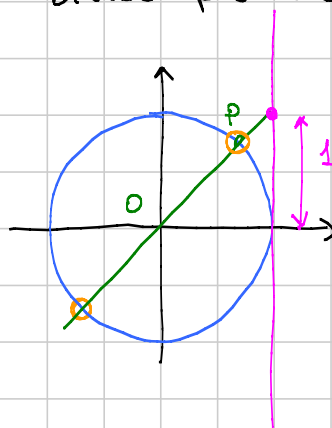


Es. 6 $\cos x = \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ Divido per $\cos x$:

$$1 = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$



Se fosse stato $x \in [-\pi, \pi]$?

$$x = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Es. 7 $\sin x \cdot \cos x = 1$ Moltip. per 2 : $2 \sin x \cdot \cos x = 2$
cioè $\sin(2x) = 2 \leadsto$ IMPOSSIBILE

Es. 8 $\cos^3 x = \cos x$; $\cos^3 x - \cos x = 0$
 $\cos x (\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \nearrow \cos x = 0$$

$$\searrow \cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0$$

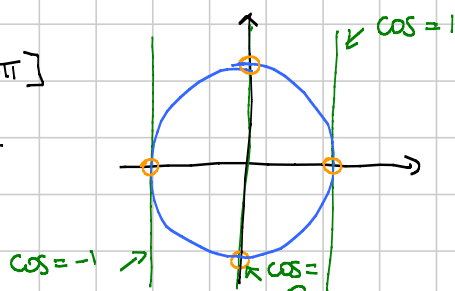
$$\cos^2 x = 1$$

$$\cos x = 0$$

$$\cos x = \pm 1$$

Se abbiamo come limitazione $[0, 2\pi]$

$$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi, x = \frac{3\pi}{2}, x = 2\pi$$



Es. 9 $2\cos^2 x + 5\sin x = 4 \quad x \in [0, 2\pi]$

Cerchiamo di scrivere usando solo $\sin x$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x = 4$$

$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \quad ; \quad -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \quad \sin x = t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

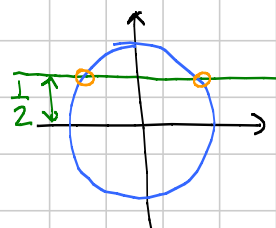
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tornando in $\sin x$ ottengo

$$t = 2 \quad \sin x = 2 \rightarrow \text{NULLA}$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$$

— o —



Es. 10 $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = 2\cos^2 x$

FORMULE DIPLICAZIONE

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{3}} = 2\cos^2 x - 1 \quad ; \quad \downarrow \quad \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3}} = \cos(2x)$$

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \sqrt{3} \quad ; \quad \tan(2x) = \sqrt{3}$$

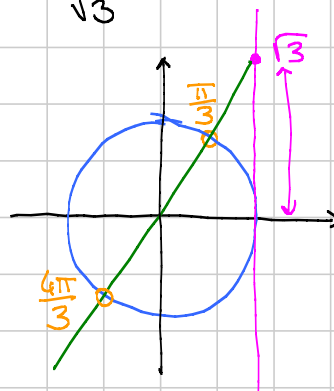
$$2x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$2x = \frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

soluzioni
in $[0, 2\pi]$
NO!!! solo
in $[0, \pi]$



È corretto che $2x = \frac{\pi}{3}$ e $2x = \frac{4\pi}{3}$, ma anche

$$2x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{e} \quad 2x = \frac{10\pi}{3}$$

Dividendolo per 2 trovo $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{3}$

sono tutte soluzioni tra 0 e 2π .

Morale: se ho un'eq. con $\sin/\cos/\tan(2x)$ e voglio $x \in [0, 2\pi]$,
devo considerare tutte le sol. con $2x \in [0, 4\pi]$

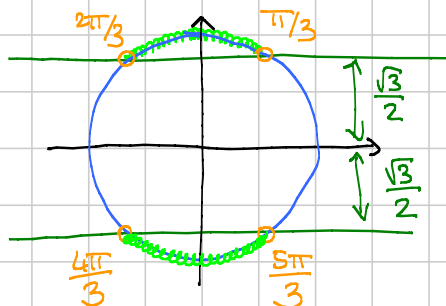
Es. 11 $4 \sin^2 x > 3$ $x \in [0, 2\pi]$

$$\sin^2 x > \frac{3}{4}$$

VALORI ESTERNI

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Guardo il cerchio e cerco i
punti con coord. y maggiore
di $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oppure minore di $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



In $[0, 2\pi]$ la sol. è $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

Es. 12 $\tan x \geq \sin(2x)$

Uso formule:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \geq 2 \sin x \cos x$$

VIETATO MOLTIPLICARE PER $\cos x$

Porto tutto a sx: $\frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x \geq 0$

$$\frac{\sin x - 2 \sin x \cos^2 x}{\cos x} \geq 0$$

$$\frac{\sin x (1 - 2 \cos^2 x)}{\cos x} \geq 0$$

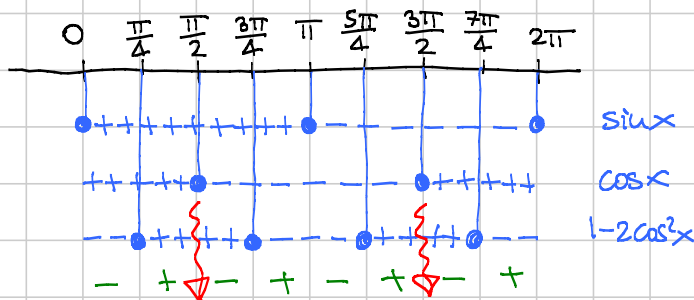
Risolvere come prodotto / quoziente, studiando il segno dei 3
termini in $[0, 2\pi]$

$$1 - 2 \cos^2 x > 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x < 1$$

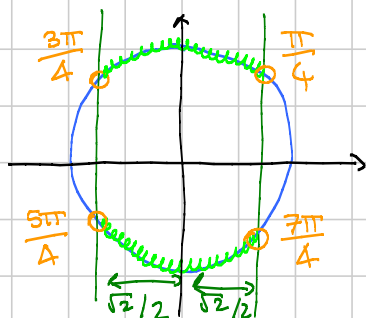
$$\Leftrightarrow \cos^2 x < \frac{1}{2}$$

Valori interni

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Guardo il cerchio!



A noi interessa ≥ 0 :

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

GEOMETRIA ANALITICA

Titolo nota

24/09/2008

Piano cartesiano, punti e coordinate,

DISTANZA TRA DUE PUNTI

$$P = (x_1, y_1)$$

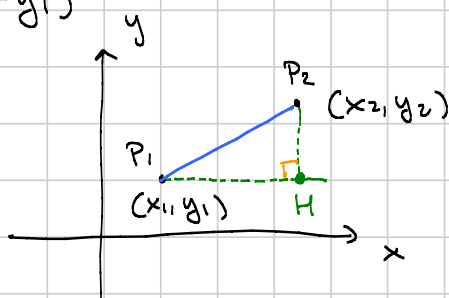
$$P_2 = (x_2, y_2)$$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Interpretazione geometrica

$$(P_1 P_2)^2 = (P_1 H)^2 + (P_2 H)^2 \quad (\text{Pitagora})$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



EQUAZIONE DELLA RETTA

2 forme

1ª FORMA

$$y = mx + n$$

m, n coefficienti dati

VANTAGGI: • m e n possono essere numeri qualsiasi

• due rette coincidono $\Leftrightarrow$ hanno stesso m e stesso n

SVANTAGGI: non tutte le rette si rappresentano in questa forma

Manca infatti quelle verticali che vanno scritte

come $x = a$

2ª FORMA

$$ax + by + c = 0$$

a, b, c coeff. dati

VANTAGGI: tutte le rette (comprese quelle verticali) si rappresentano in questa forma.

SVANTAGGI: • non è vero che per ogni terna a, b, c ottengo una retta (infatti almeno uno tra a e b deve essere $\neq 0$)

• non è vero che equazioni diverse rappresentano rette diverse (posso moltip. tutto per un numero)

Oss. In forma $ax+by+c=0$ due equaz. rappresentano la stessa retta $\Leftrightarrow$ sono l'una multipla dell'altra.

PASSAGGIO DA UNA FORMA ALL'ALTRA

$$\begin{array}{lll} y = mx + n & \rightsquigarrow & y - mx - n = 0 \\ x = a & \rightsquigarrow & x - a = 0 \\ ax + by + c = 0 & \rightsquigarrow & y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (\text{ricavo } y) \\ & & \text{Possibile } \Leftrightarrow b \neq 0 \end{array}$$

Se $b=0$, allora per forza $a \neq 0$, ma allora ricavo $x = -\frac{c}{a}$ e ottengo una retta verticale

Oss. In forma $ax+by+c=0$ una retta è
 VERTICALE $\Leftrightarrow b=0$
 ORIZZONTALE $\Leftrightarrow a=0$
 — 0 — 0 —

SIGNIFICATO GEOMETRICO DI m ED n.

n = valore di y quando metto $x=0$
 = ascissa dell'intersezione tra
 retta e asse y

ORDINATA: corretto dopo video!

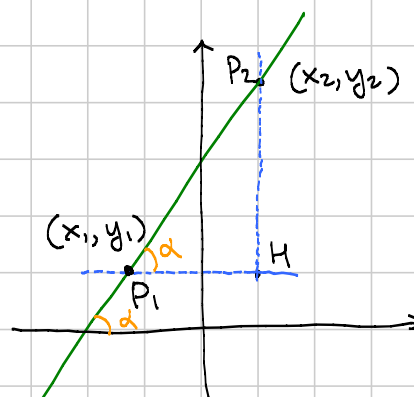
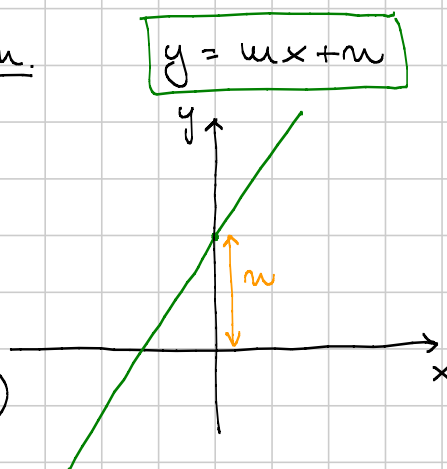
Incremento n (lasciando invariato m)
 vuol dire aggiungere ad y una
 quantità costante = traslare la retta
 in alto parallelamente a se stessa

$$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, mx_1 + n)$$

$$P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, mx_2 + n)$$

$$P_1H = x_2 - x_1$$

$$\begin{aligned} P_2H = y_2 - y_1 &= mx_2 + n - (mx_1 + n) \\ &= m(x_2 - x_1) \end{aligned}$$



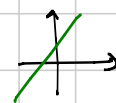
$$\frac{P_2 H}{P_1 H} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m = \text{rapporto tra i 2 cateti}$$

$$P_1 H = P_1 P_2 \cdot \cos \alpha$$

$$P_2 H = P_1 P_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{P_2 H}{P_1 H} = \frac{P_1 P_2 \cdot \sin \alpha}{P_1 P_2 \cdot \cos \alpha} = \tan \alpha$$

$m = \text{coeff. angolare} = \tan \alpha$, dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse x e con ogni retta ad esso parallela

Oss. $m > 0 \Leftrightarrow \tan \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow$ 

$m < 0 \Leftrightarrow \tan \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \Leftrightarrow$ 
— o — o —

Esercizio Scrivere l'eq. della retta che passa per $(1,1)$ e $(2,3)$.

0° modo: ricordare la formula per la retta che passa per 2 p.ti

1° modo: l'equazione sarà della forma $y = mx + n$.

Impongo di passare per i 2 p.ti

$$\begin{cases} 1 = m + n & \text{(sostituito (1,1))} \\ 3 = 2m + n & \text{(sostituito (2,3))} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Ottengo un sistema in } m \text{ ed} \\ n \text{ che si risolve} \end{array}$$

2ª eq. - 1ª eq. : $2 = m$ e dalla 1ª ottengo $n = -1$

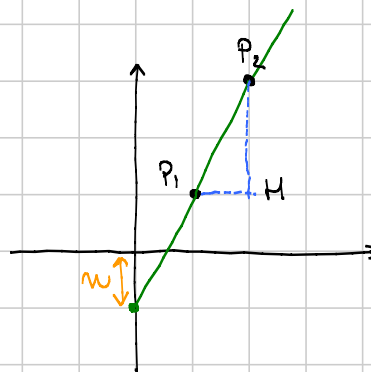
$$y = 2x - 1$$

2° modo: uso i quadretti !!

$$m = \frac{P_2 H}{P_1 H} = \frac{2}{1} = 2$$

$$n = -1$$

$$y = 2x - 1$$



RETTE PARALLELE " $\Leftrightarrow$ " stesso m (vale per rette non verticali)

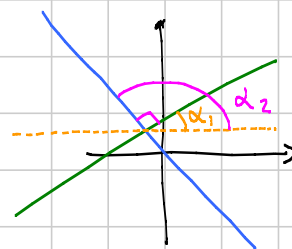
RETTE PERPENDICOLARI: Due rette $y = m_1x + n_1$ e $y = m_2x + n_2$ sono perpendicolari " $\Leftrightarrow$ "

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

In termini di angoli sia α_1 l'angolo corrisp. alla prima e α_2 quello corrispondente alla seconda

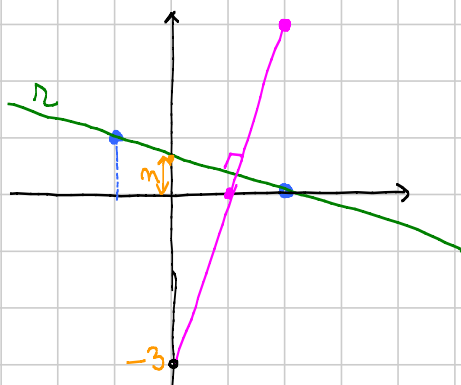
rette perpendicolari $\Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$

ma allora $m_2 = \tan \alpha_2 = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$



angoli associati $\kappa = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$

Esercizio 1) Scrivere eq. retta passante per $(-1, 1)$ e $(2, 0)$



Coeff. ang. negativo $m = -\frac{1}{3}$

$$m = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

2) Scrivere l'eq. della retta parallela ad r passante per $(0, 5)$.

Sarà del tipo $y = \boxed{m}x + n$ stesso di r $y = -\frac{1}{3}x + n$

Impiego di passare per $(0, 5)$: $5 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + n \Rightarrow n = 5$

3) Scrivere l'eq. della retta perpendicolare ad r e passante per $(2, 3)$. Sarà $y = mx + n$ con $m = 3 \Rightarrow y = 3x + n$
 Impiego di passare per $(2, 3)$: $3 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -3$
 Quindi la retta è

$$y = 3x - 3$$

Esercizio r = retta per C $\parallel$ ad AB s = retta per C $\perp$ ad AB d = distanza tra C e retta AB

$A = (1, 2)$

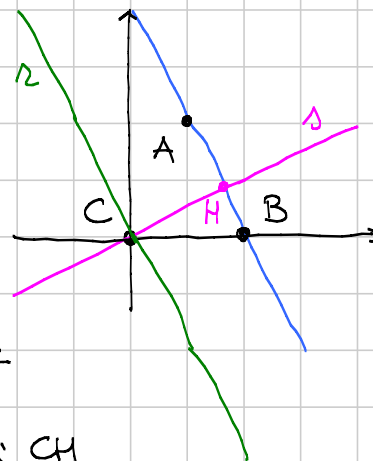
$B = (2, 0)$

$C = (0, 0)$

retta AB : $y = -2x + 4$

retta r : $y = -2x$

retta s : $y = \frac{1}{2}x$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTADistanza di C dalla retta AB = lung. di CH Quindi dovrai: 1. Scrivere l'eq. della $\perp$

2. Trovare l'intersezione

3. Calcolare la distanza

La formula che si ottiene è questa:

La distanza di $P = (x_0, y_0)$ da una retta di eq. $ax + by + c = 0$ è

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Il denom. non è mai $= 0$ Nel vostro caso $C = (0, 0)$ retta AB : $y = -2x + 4$, cioè

$y + 2x - 4 = 0$

$$d = \frac{|0 + 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

ALTRO CASO

$A = (0, 0), B = (1, 2), C = (2, 0)$

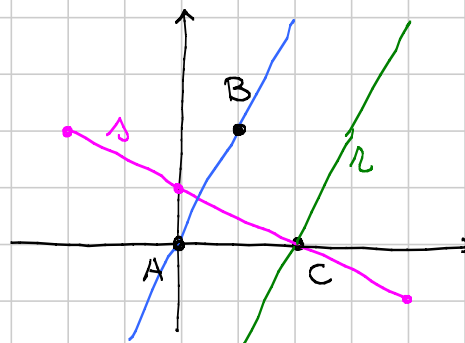
retta AB : $y = 2x$ oppure $y - 2x = 0$

retta per C $\parallel$ ad AB : $y = 2x - 4$

retta per C $\perp$ ad AB : $y = -\frac{1}{2}x + 1$

distanza di C da retta AB

$$d = \frac{|0 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \leftarrow \text{cometto dopo video}$$



GEOMETRIA ANALITICA 2

Titolo nota

24/09/2008

FORMULA DELLA RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

Siano $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. La retta sarà $y = mx + n$

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n & \text{Passare per } P_1 \\ y_2 = mx_2 + n & \text{Passare per } P_2 \end{cases} \quad \text{Risolvo il sistema nelle incognite } m \text{ ed } n$$

$$1^a \text{ eq.} - 2^a \text{ eq.}; \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\text{Per trovare } n \text{ uso } 1^a \text{ eq.}; \quad n = y_1 - mx_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

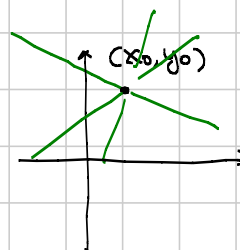
$$\text{Quindi } y = mx + n \text{ diventa } y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

$$\text{Faccio un po' di algebra } y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \text{ e dividendo}$$

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

oppure

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



FASCIO DI RETTE PER UN PUNTO $P = (x_0, y_0)$

Saranno rette del tipo $y = mx + n$. Impoigo di passare per P : $y_0 = mx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - mx_0$

Quindi $y = mx + y_0 - mx_0$, che equivale a $y - y_0 = mx - mx_0$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

al variare di m descrive tutte le rette (non verticali) passanti per (x_0, y_0)

EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Dati: Centro $P = (x_0, y_0)$, Raggio $R > 0$

Circonferenza con centro P e raggio R = insieme dei p.ti (x, y) del piano la cui distanza da P è $= R$.

$$\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{\text{Distanza di } (x,y) \text{ da } (x_0, y_0)} = \underbrace{R}_{\text{Raggio}}$$

Facciamo il quadrato:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - \underbrace{2x_0x}_a - \underbrace{2y_0y}_b + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - R^2}_c = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Oss 1 Possiamo esserci dei coeff. davanti a x^2 e y^2 . L'importante è che il coeff. sia lo stesso

Oss 2 Non compare MAI il termine xy .

1. Dati a, b, c , la formula rappresenta sempre una circonferenza?
2. Dati a, b, c , come ricostruire le coordinate del centro e il raggio?

$$a = -2x_0$$

$$b = -2y_0$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2$$

$$x_0 = -\frac{a}{2}$$

$$y_0 = -\frac{b}{2}$$

$$R^2 = -c + x_0^2 + y_0^2$$

$$= -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

La condizione affinché sia una circonferenza è che

$$-c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$$

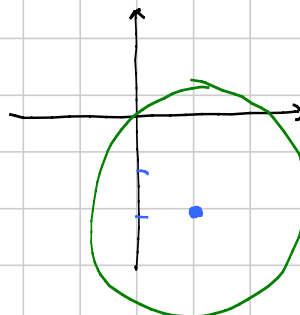
Esercizio 1 $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ $a = -2$ $b = 4$ $c = 0$

$$x_0 = -\frac{a}{2} = 1 \quad y_0 = -\frac{b}{2} = -2 \quad R^2 = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$= -0 + \frac{4}{4} + \frac{16}{4} = 5$$

$$R = \sqrt{5}$$

Quando $c=0$ la circ. passa per l'origine



2° modo $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \Rightarrow x_0 = 1, y_0 = -2, R = \sqrt{5}$$

— 0 — 0 —

Esercizio 2 $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$

1° modo $a = -6$ $b = 0$ $c = -7$

$$x_0 = -\frac{a}{2} = 3, \quad y_0 = -\frac{b}{2} = 0, \quad R^2 = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

$$= 7 + \frac{36}{4} + 0 = 16$$

$$R = 4.$$

2° modo $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$; $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 7 = 9$

$$(x-3)^2 + y^2 = 16$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

— 0 — 0 —

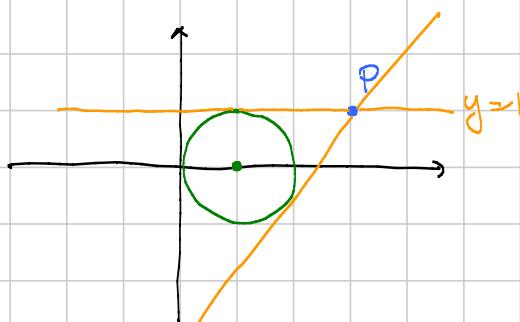
Esercizio 3 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ $P = (3,1)$. Determinare rette per P tangenti alla circonferenza.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0; \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad x_0 = 1, y_0 = 0, R = 1$$

Ci saranno 2 rette tangenti, di cui una si vede "ad occhio"



Scrivo tutte le rette per P

$y = mx + n$ e impongo di passare per P:

$$1 = 3m + n \Rightarrow n = 1 - 3m$$

$$\Rightarrow y = mx + 1 - 3m = m(x - 3) + 1$$

Devo imporre alla retta $y = m(x - 3) + 1$ di essere tg. alla circ. $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Le metto a sistema e impongo di avere un'unica intersezione.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = m(x - 3) + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + [m(x - 3) + 1]^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + m^2(x - 3)^2 + 1 + 2m(x - 3) - 2x = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 - 6m^2x + 9m^2 + 1 + 2mx - 6m - 2x = 0$$

$$x^2(1 + m^2) + (-6m^2 + 2m - 2)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

Equazione di 2° grado che deve avere 1 sola soluz. $\Rightarrow \Delta = 0$

$$(1 + m^2)x^2 - 2(3m^2 - m + 1)x + 9m^2 - 6m + 1 = 0$$

$$\Delta = (3m^2 - m + 1)^2 - (9m^2 - 6m + 1)(1 + m^2) = 0$$

Si ottiene così un'equazione in m le cui soluzioni sono i valori di m per cui la retta è tangente.

Quante soluz. ci aspettiamo? DUE perché 2 sono le rette tg, una di queste soluz. DEVE ESSERE $m = 0$ (e infatti lo è).

— 0 — 0 —

Esercizio 4 $x^2 + y^2 = 5$ centro $C = (0, 0)$ $R = \sqrt{5}$

$P = (2, 1)$ p.to della circ. Scrivere eq. retta tangente

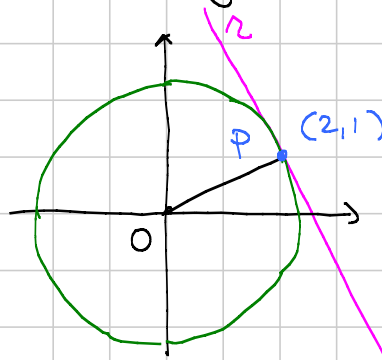
La retta tg. è $\perp$ al raggio OP

Eq. di OP: $y = \frac{1}{2}x$

retta r : $y = -2x + 5$ Perché

sarà $y = -2x + n$. Impongo di passare per P: $1 = -2 \cdot 2 + n$

$$\Rightarrow n = 5$$



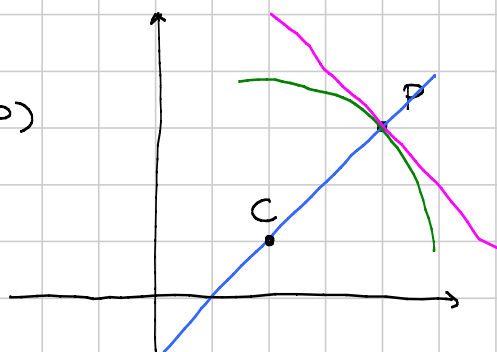
Esercizio 5 Circonferenza con centro in $(2,1)$ e passa per $(4,3)$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad R = \text{dist}(C,P)$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 8$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0}$$



retta CP : $y = x - 1$; retta tg : $y = -1 \cdot x + n$

impongo di passare per P : $3 = -4 + n \Rightarrow n = 7$

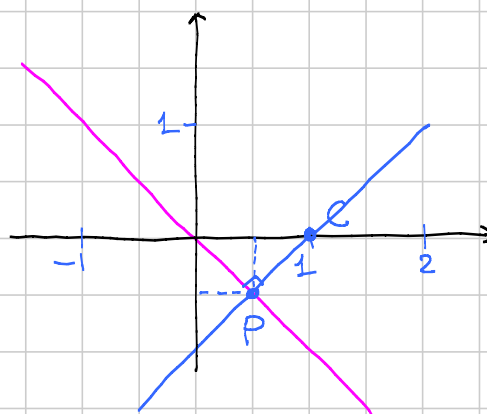
— o — o —

Esercizio 6 Centro $(1,0)$ Tangente alla retta $x+y=0$

Raggio = distanza di C
dalla retta

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

centro: $(1,0)$ e $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$



$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{1}{2} \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 = 1 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x + 1 = 0$$

Per trovare il p.to P in cui la circonferenza tangente la retta:

1° modo interseco la retta con la circonferenza

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4x + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Mi aspetto solus. unica,} \\ \text{cioè } \Delta = 0 \end{array} \right\}$$

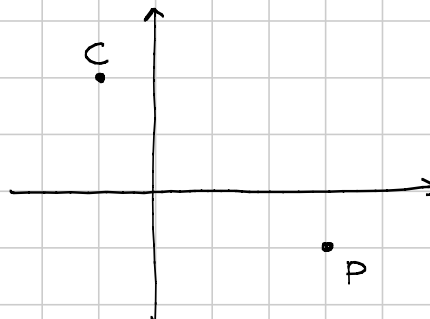
2° modo Nel punto in cui la perpendicolare per C trova la retta data. Si trova (facendo i conti o guardando la figura) $P = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Esercizio 7 Trovare il valore di a per cui la distanza tra $(3, -1)$ e la circ.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = a \quad \text{è } 2$$



Distanza di P da una circ =
 $= \text{dist}(P, \text{centro}) - \text{raggio}$



$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = a$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = a + 1 + 4$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = a+5$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad x_0 = -1, y_0 = 2$$

$$\text{Distanza}(P, \text{centro}) = \text{dist}((-1, 2), (3, -1)) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\text{Distanza} - \text{raggio} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{raggio} = 3$$

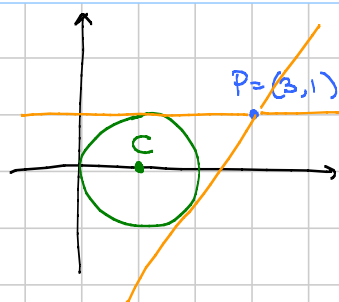
Per quale valore di a la circ. ha raggio 3?

$$R^2 = a + 5 \quad 3 = a + 5 \quad \rightarrow \quad a = 4.$$

GEOM. ANALITICA E INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota

25/09/2008



$$\begin{cases} y-1 = m(x-3) & \text{generica retta per } P \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & \text{Eq. circ.} \end{cases}$$

Sostituisco y nella 2ª eq.Ottengo una eq. di 2° grado in x Impongo $\Delta = 0$ e trovo i possibili valori di m 2° metodo Le rette tangenti sono le uniche rette r tali che

$$\text{dist}(C, r) = \text{raggio} = 1$$

La generica retta per P ha equazione $y - mx + (3m-1) = 0$ (1)

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|0 - m(1-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + m^2}} = 1, \text{ cioè } \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,$$

$$|2m-1| = \sqrt{m^2+1} \quad \text{Faccio il quadrato a dx e sx}$$

$$(2m-1)^2 = m^2+1, \text{ cioè } 4m^2 - 4m + 1 = m^2 + 1,$$

$$3m^2 - 4m = 0 \quad m(3m-4) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow m=0 \\ \searrow m=\frac{4}{3} \end{matrix}$$

Es.1 Retta $ax+3y+2=0$ passa per $(1,1)$.Sostituisco $(1,1)$ nell'eq: $a+3+2=0 \Rightarrow a=-5$ Es.2 Stessa retta parallela alla retta $y=2x$.Impongo stesso coeff. ang. $3y = -ax - 2$; $y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3}$

$$-\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = -6$$

Es.3 Stessa retta $\perp$ alla retta $y=2x$. Impongo coeff. ang. $= -\frac{1}{2}$

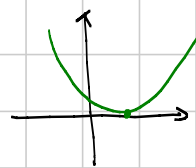
$$-\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Es.4 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente all'asse x

Impongo che l'eq. $ax^2 + ax + 1 = 0$ abbia una sola soluz., cioè $\Delta = 0$

$$\Delta = a^2 - 4a = 0, \quad a(a-4) = 0$$

$a = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{in questo caso però non è una parabola} \\ 4 \rightarrow \text{SOLUZIONE BUONA} \end{cases}$



Nel caso $a=4$, qual è il p.to di tangenza? Devo risolvere $4x^2 + 4x + 1 = 0$, $(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$

Es.5 Parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente a

L'eq. della brs. è $y = -x$



$$\begin{cases} y = -x \\ y = ax^2 + ax + 1 \end{cases} \Rightarrow -x = ax^2 + ax + 1; \quad ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Es.6 Retta $ax + 3y + 2 = 0$ tangente alla parabola $y = x^2 - 10$

Metto a sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = x^2 - 10 \end{cases} \Rightarrow -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} = x^2 - 10 \quad \frac{2}{3} - 10 = \frac{2-30}{3}$$

$$x^2 + \frac{a}{3}x - \frac{28}{3} = 0 \quad 3x^2 + ax - 28 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 + 28 \cdot 12 = 0 \Rightarrow \text{Non ci sono soluzioni}$$

Es.7 La retta $ax + 3y + 2 = 0$ tangente alla circ. $5x^2 + 5y^2 = 2a$

1° modo: metto a sistema, sostituisco y (o x) e impongo $\Delta = 0$

2° modo: distanza del centro dalla retta = raggio circ.

$$x^2 + y^2 = \frac{2a}{5}$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow \text{centro} = (0, 0)$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$R^2 = \frac{2a}{5} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2a}{5}} \quad (\text{senza } a > 0)$$

$$\text{Distanza}(C, \text{retta}) = \frac{|a \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{a^2 + 9}} = \text{raggio} = \sqrt{\frac{2a}{5}}. \text{ Faccio i quadr.}$$

$$\frac{4}{a^2 + 9} = \frac{2a}{5} \Leftrightarrow 20 = 2a^3 + 18a \Leftrightarrow a^3 + 9a - 10 = 0$$

Devo risolvere l'eq. di 3° grado $a^3 + 9a - 10 = 0$. Si spera che ci sia una radice razionale (tentativi da fare: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$)
 $a=1$ va bene $\Rightarrow$ posso dividere per $a-1$

$$\begin{array}{r|l}
 a^3 & + 9a - 10 \\
 -a^3 + a^2 & \\
 \hline
 a^2 + 9a - 10 & \\
 -a^2 + a & \\
 \hline
 10a - 10 & \\
 -10a + 10 & \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 a-1 \\
 \hline
 a^2 + a + 10
 \end{array}$$

$a^3 + 9a - 10 = (a-1)(a^2 + a + 10)$ Soluzioni: $a=1$, più le soluzioni di $a^2 + a + 10 = 0$ $\Delta = 1 - 40 < 0 \Rightarrow$ Nessun'altra soluzione.

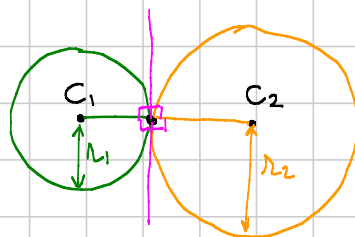
— 0 — 0 —

Es. 8 Circonf. $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 - 2x - a = 0$ sono tangenti
 1° modo Metto a sistema e impongo solus. unica

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \text{ sostituisco nella 2ª} \\ \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - 2x - a = 0 \end{cases}$$

$$2x = 1 - a$$

2° modo



$$\text{Dist}(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$

Funziona solo se le 2 circ. sono tang. esternamente

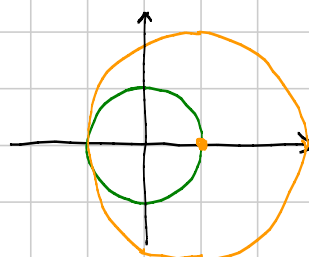
$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{centro } (0,0) \text{ e raggio } 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x - a = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - a = 1 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = a+1$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

$$x_0=1, y_0=0, R=\sqrt{a+1} \rightarrow \text{centro } (1,0) \text{ e raggio } \sqrt{a+1}$$

Le 2 circonferenze sono tangenti se
 e solo se il raggio della seconda è 2,
 cioè se $\sqrt{a+1} = 2 \Rightarrow a+1 = 4 \Rightarrow a=3$



Cosa non andava nel 1° modo?

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \text{ sostituisco nella 2ª} \\ \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - 2x - a = 0 \end{cases}$$

$2x = 1 - a \rightarrow$ Fin qui ho trovato che esiste un unico valore della x . Quali sono i valori di y corrispondenti?

Ritorno alla 1ª eq.

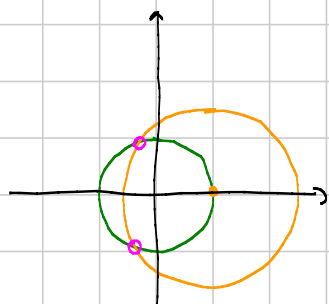
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{ sost. } x = \frac{1-a}{2} \quad \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \quad \text{cioè}$$

$$y^2 = 1 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \quad \text{Questa ha soluz. unica } (\Rightarrow \text{il termine a dx è } = 0$$

$$1 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{1-a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$\searrow \frac{1-a}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{a = 3} \text{ TROVATO PRIMA}$$

Perché $a = -1$ non è accettabile? Perché il raggio sarebbe $\sqrt{a+1} = 0$



Per valori abbastanza piccoli del raggio (dunque di a) le 2 circonferenze si intersecano in 2 p.ti che hanno la stessa x (e per questo x era univoc. det.) e le 2 y una opposta dell'altra (che derivava dall'ipotesi $y^2 = \dots$)

INSIEMI DEL PIANO

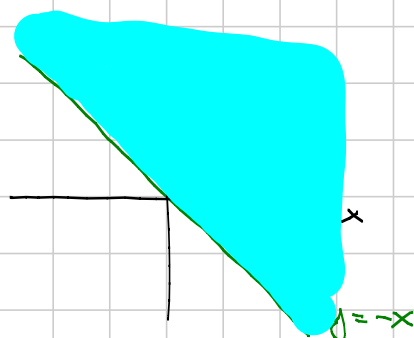
Es.1 Disegnare l'insieme dei punti (x,y) del piano t.c. $x+y \geq 0$
Più precisamente

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0\}$$

$x+y \geq 0$ vuol dire

$y \geq -x$ "sopra la retta

$y = -x$ "



Es.2 Insieme $2x+y+3 \leq 0$; $y \leq -2x-3$
 "Sotto la retta $y = -2x-3$ "

Es.3 $x+y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Sono date 3 condizioni che devono essere vere contemporaneamente

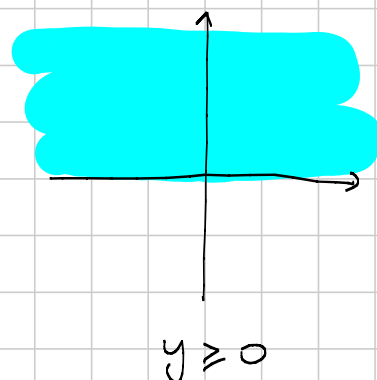
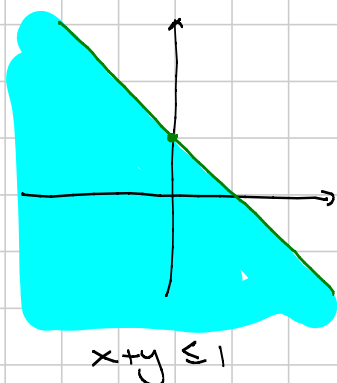
$x \geq 0$: 1° e 4° quadrante

$y \geq 0$: 1° e 2° quadrante

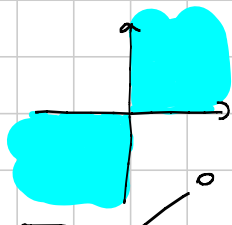
$x \geq 0, y \geq 0$: solo 1° quadrante

$x+y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq 1-x$

"Sotto la retta $y = 1-x$ "



Es.4 $xy \geq 0 \rightarrow x \text{ e } y \text{ entrambi positivi} \rightarrow 1^\circ \text{ quadrante}$
 $\rightarrow x \text{ e } y \text{ entrambi negativi} \rightarrow 3^\circ \text{ quadrante}$



Es.5 Determinare i p.ti (x,y) del piano t.c.

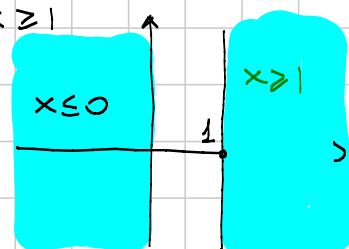
$$x^2 - x \geq 0 \quad x(x-1) \geq 0$$

VALORI ESTERNI: $x \leq 0$, $x \geq 1$

Tutti i p.ti con $x \leq 0$ sono ok

" " " " $x \geq 1$ sono ok

INDIPENDENTEMENTE DAL
VALORE DI y



INSIEMI DEL PIANO

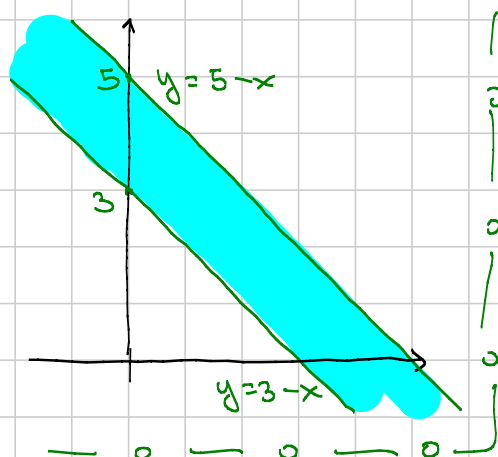
Titolo nota

25/09/2008

Es. 1 $3 \leq x+y \leq 5$. Sono 2 condizioni che devono essere verificate contemporaneamente

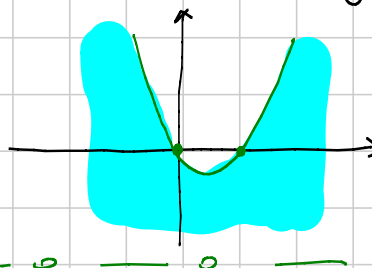
$$x+y \geq 3 \Leftrightarrow y \geq 3-x \text{ "sopra la retta } y=3-x"$$

$$x+y \leq 5 \Leftrightarrow y \leq 5-x \text{ "sotto la retta } y=5-x"$$



Es. 2 $y \leq x^2 - x$

"sotto la parabola $y = x^2 - x$ "

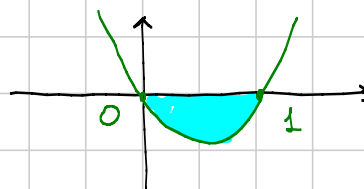


Es. 3 $x^2 - x \leq y \leq 0$

Le 2 condizioni devono valere contemporaneamente

$$y \leq 0 \text{ "sotto l'asse } x"$$

$$y \geq x^2 - x \text{ "sopra la parabola"}$$



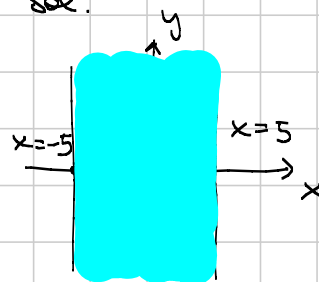
Es. 4 $|x| \leq 5$ vuol dire $-5 \leq x \leq 5$

(in generale la disequazione $|x| \leq A$ ha come sol:

- $\emptyset$ se $A < 0$
- $x=0$ se $A=0$
- $-A \leq x \leq A$ se $A > 0$.

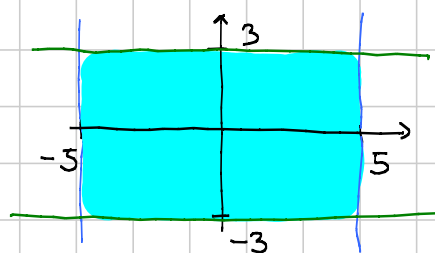
Similmente la diseq. $|x| \geq A$ ha come sol.

- tutto $\mathbb{R}$ se $A \leq 0$
- $x \leq -A$ e $x \geq A$ se $A > 0$)

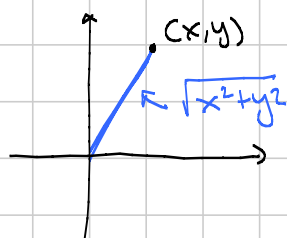


Es. 5

$$\begin{aligned} |x| &\leq 5 & |y| &\leq 3 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ -5 \leq x \leq 5, & & -3 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

Es. 8

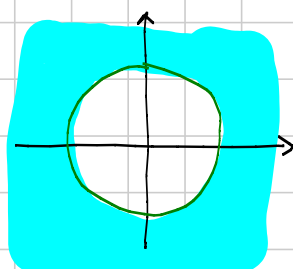
$$x^2 + y^2 \geq 8$$



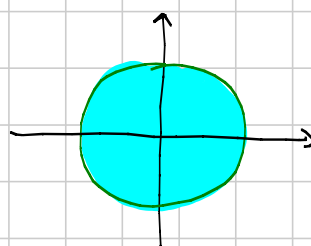
$x^2 + y^2$ è la distanza (al quadrato) di (x, y) dall'origine.

I p.ti (x, y) con $x^2 + y^2 \geq 8$ sono i p.ti del piano con distanza dall'origine $\geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Quindi sono i p.ti esterni alla circ. con centro in $(0, 0)$ e raggio $2\sqrt{2}$



$$x^2 + y^2 \geq 8$$

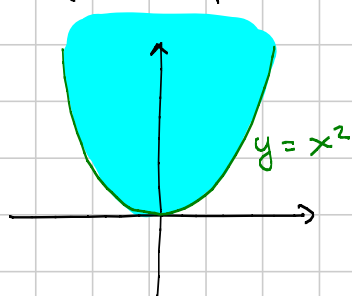


$$x^2 + y^2 \leq 8$$

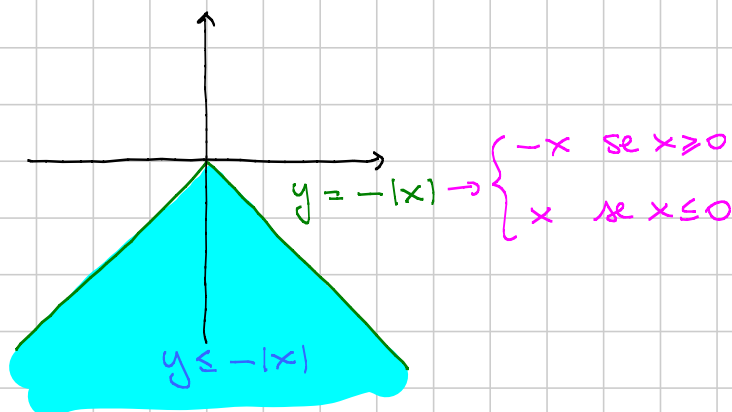
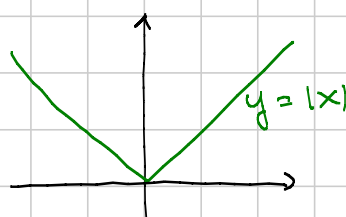
Es. 9

$$\begin{aligned} y - x^2 &\geq 0 \\ y &\geq x^2 \end{aligned}$$

"Sopra la parabola"

Es. 10

$$y + |x| \leq 0 \quad y \leq -|x|$$

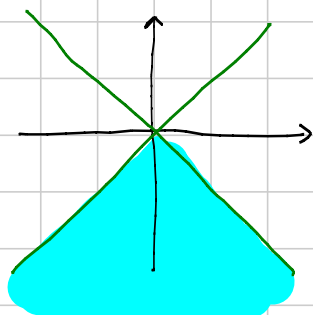


Es. 10 $x^2 - y^2 \leq 0$

Ci sono 2 casi

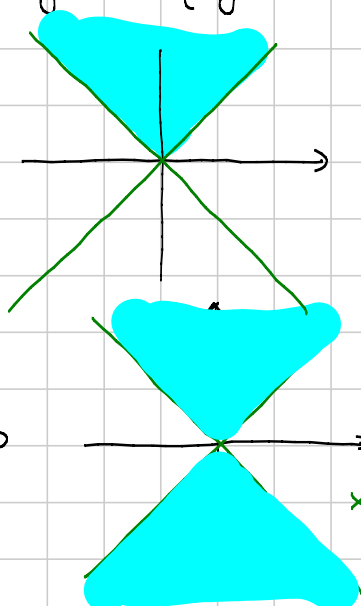
$$\begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x \end{cases}$$

UNIONE



$(x-y)(x+y) \leq 0$

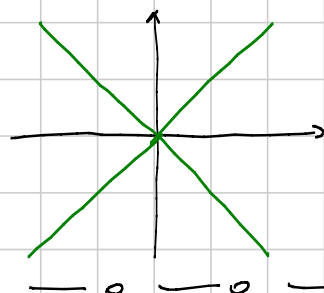
$$\begin{cases} x-y \leq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x \\ y \geq -x \end{cases}$$



Facendo l'unione dei 2 casi ottengo

Metodo "rapido": $x^2 - y^2 \leq 0$

$$x^2 - y^2 = 0; y^2 = x^2; y = \pm x$$

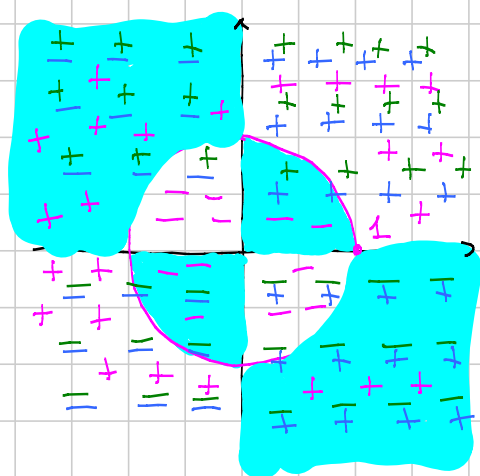


Es. 11 $xy(x^2 + y^2 - 1) \leq 0$

Prodotto di 3 fattori: 8 casi

PPP	PPN	PNP	NPP
NNP	NPN	PNN	NNN

Dovei fare l'unione di 4 casi (esercizio)



1° FATTORE, cioè x

2° FATTORE, cioè y

3° FATTORE, cioè $x^2 + y^2 - 1$. Cerco di capire dove è > 0 e dove è < 0 :

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$$

FUORI DALLA CIRC.

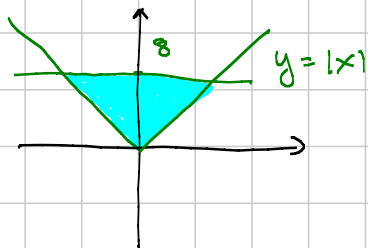
$$x^2 + y^2 - 1 < 0 \text{ DENTRO LA CIRC.}$$

Es. 12 $|x| \leq y \leq 8$

Due condizioni

$y \geq |x|$ "sopra il grafico di $|x|$ "

$y \leq 8$ "sotto la retta $y=8$ "

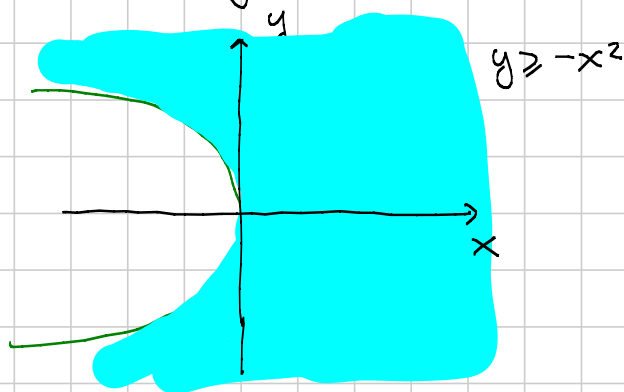
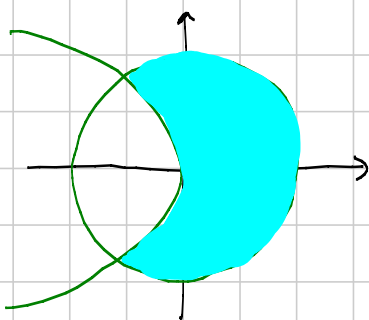


Es. 13 $x^2 + y^2 \leq 1$,
DENTRO IL CERCHIO

$x + y^2 \geq 0$
 $\downarrow$
 $x \geq -y^2$

Due condizioni vere contemporaneamente

$x = -y^2$ è una parabola con asse lungo asse x



TEST 2006/2007

[1] $\log_3 8 - \log_3 7 = \log_3 \frac{8}{7}$ [$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$]

[2] Risolvere $2 \sin^2 x + \sin(2x) = 2$ in $[0, 2\pi]$

$\sin(2x) = 2 - 2 \sin^2 x$

$2 \sin x \cdot \cos x = 2(1 - \sin^2 x)$

$\cancel{2} \sin x \cos x = \cancel{2} \cos^2 x$

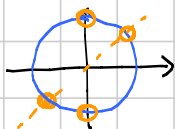
$\cos^2 x - \sin x \cos x = 0$

$\cos x (\cos x - \sin x) = 0$

$\nearrow \cos x = 0$
 $\searrow \cos x = \sin x$
cioè $\tan x = 1$

4 soluzioni:

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$



[4] Se $a = \frac{1}{2}$ e $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{7}$, quanto vale b ?

2^a eq.: $7a = a+b \Rightarrow b = 6a = 3$

[5] $9^{x+9} = 3^{x+3}$; $(3^2)^{x+9} = 3^{x+3}$; $3^{2x+18} = 3^{x+3}$
 $2x+18 = x+3 \Rightarrow x = -15$

[6] $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = a \frac{b+c}{bc} = \frac{a(b+c)}{bc}$

[7] $(x+1)(x^2+4)(x^3+3) = 0$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x = -1 \quad \text{NULLA} \quad x^3 = -3 \rightarrow x = -\sqrt[3]{3}$

[7bis] $(x-1)(x^2-4)(x^3-3) = 0$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x = 1 \quad x = \pm 2 \quad x = \sqrt[3]{3}$ 4 soluzioni

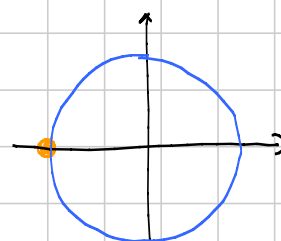
[7ter] $(x^2-2)(x^3-3)(x^4-4) = 0$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x = \pm\sqrt{2} \quad x = \sqrt[3]{3} \quad x^4 = 4 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ GIÀ PRESE} \\ x^2 = -2 \rightarrow \text{Nulla} \end{cases}$
 3 soluzioni !!!

[8] $x^5 + 5x^2 + 1$ diviso $x^2 - 1$

$$\begin{array}{r} x^5 x^2 - 1 \\ -x^5 x^3 + x + 5 \\ \hline x^3 + 5x^2 + 1 \\ -x^3 5x^2 + x + 1 \\ \hline 5x^2 + x + 1 \\ -5x^2 5 \\ \hline x + 6 \end{array}$$

[9] 540° individua lo stesso P sulla circ. di

$0^\circ \quad 40^\circ \quad 80^\circ \quad -80^\circ \quad -180^\circ$



$540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$

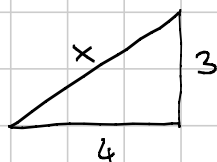
GEOMETRIA PIANA / SOLIDA

Titolo nota

26/09/2008

Es. 1 Triangolo rettangolo 2 lati sono lunghi 3 e 4.
Terzo lato ?

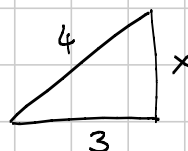
1° caso



$$x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$x = 5$$

2° caso

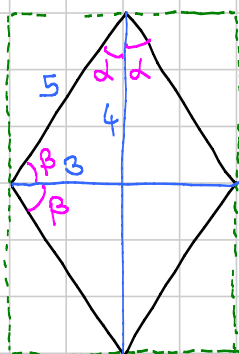


$$x^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$x = \sqrt{7}$$

Es. 2 Rombo con diagonali 6 e 8. Perimetro?

$$5 \cdot 4 = 20 = \text{perimetro}$$



Area rombo = metà area rettangolo

$$= \frac{1}{2} \text{diag. diag.} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

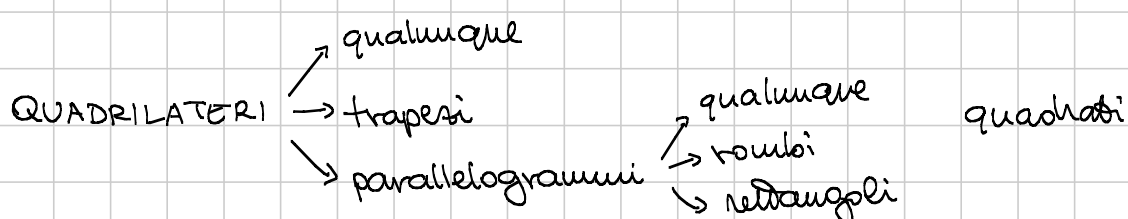
ROMBO = quadrilatero con LATI di uguale lunghezza

Proprietà del rombo: ① le diagonali sono perpendicolari e si dimezzano a 2 a 2.

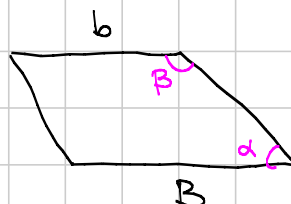
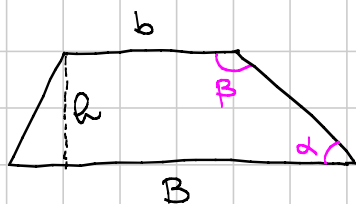
② i lati sono a 2 a 2 paralleli

③ Gli angoli sono a 2 a 2 uguali

④ La somma dei 2 angoli adiacenti ad un lato è 180°



TRAPEZIO : quadrilatero con 2 lati paralleli



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Area trapezio : $\frac{1}{2} (B+b) \cdot h$



trapezio rettangolo



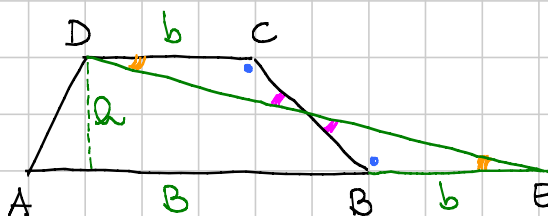
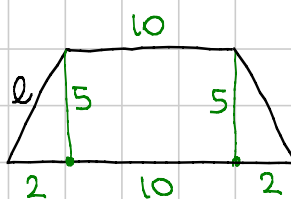
trapezio isoscele

Es.3 In un trapezio isoscele $b=10$ $B=14$ $h=5$.
Perimetro ?

$$l^2 = 25 + 4 = 29$$

$$l = \sqrt{29}$$

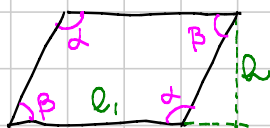
$$\text{Perim} = 10 + 14 + 2\sqrt{29}$$



I 2 triangolini hanno gli stessi angoli ed un lato corrispondente di lung. uguale
 $\Rightarrow$ sono uguali
 $\Rightarrow$ stessa area

$$\Rightarrow \text{Area (ABCD)} = \text{Area (AED)} = \frac{1}{2} (B+b) \cdot h$$

PARALLELOGRAMMO : quadrilatero con i lati a 2 a 2 paralleli,
N.B. Un parallelogrammo è un trapezio



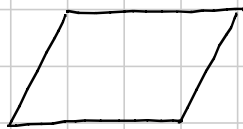
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

1 I lati sono a 2 a 2 uguali

2 Le diagonali si dimezzano a 2 a 2

3 Area = $l_1 \cdot h$ (si smonta e si ricompone in un rettangolo)

Note le lunghezze dei 2 lati di un parall., posso calcolare l'area?

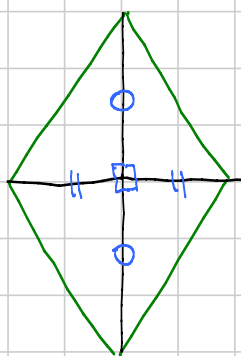


Hanno lati della stessa lunghezza, ma area diversa.

Se conosco anche α , allora $\text{area} = l_1 \cdot h = l_1 \cdot l_2 \cdot \sin \alpha$
 L'area è tanto maggiore, quanto maggiore è l'angolo α
 (massima quando $\alpha = 90^\circ$)
 — o — o —

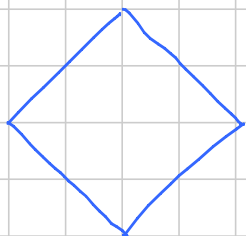
ROMBO = quadrilatero con lati tutti uguali
 NB. Un rombo è un parallelogramma.

Un parallelogramma con le diagonali $\perp$ è un rombo.
 Infatti, essendo un parall., le sue diagonali si dimezzano
 a 2 a 2



I 4 triangoli rettangoli sono uguali $\Rightarrow$ lati uguali

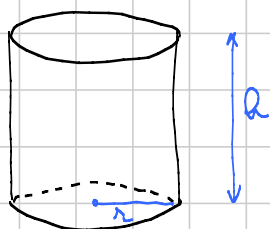
RETTANGOLO = quadrilatero con 4 angoli retti
 QUADRATO = rombo + rettangolo



Quadrato
 Trapezio
 Rombo
 Parallelogramma

Rettangolo

Un cono ed un cilindro hanno stessa base e stessa altezza.
Rapporto volumi?



$$\text{Volume cilindro} = \pi r^2 \cdot h$$

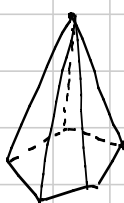
Area base

$$\text{Volume cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

Sup. laterale cilindro = $2\pi r \cdot h$ (svolgendolo diventa un rettangolo)



PRISMA



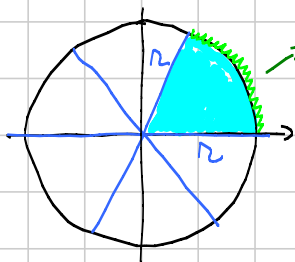
PIRAMIDE

$$\text{Volume prisma} = \text{Area base} \cdot \text{alt.}$$

$$\text{" piramide} = \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot \text{alt.}$$

$$\text{Sup. laterale prisma} = \text{altezza} \cdot \text{perimetro base}$$

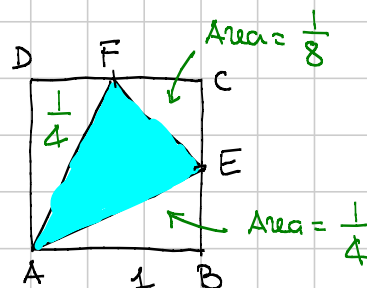
Es... Torta circolare divisa in 6 parti uguali.
Perimetro di ogni parte (raggio = 30)



$$\frac{1}{6} \text{lunghez. circ.} = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{3} r$$

$$\text{Perimetro fetta} = 2r + \frac{\pi}{3} r = \left(2 + \frac{\pi}{3}\right) r$$

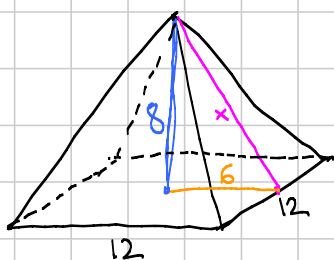
Es... Si possono calcolare le lunghezze dei lati e dell'altezza, ma è + comodo ragionare per diff.



$$\text{Area (AEP)} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

↑
Area quadrato

Es....

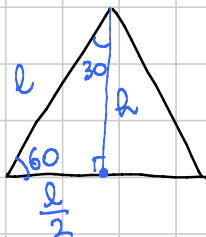


Altezza = 8. Sup. laterale = ?
 Seme l'area dei triangoli che
 formano la sup. laterale. Seme
 l'altezza di questi triangoli
 $x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = 10$

$$\text{Sup. laterale} = 4 \text{ Area triangolo} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 240.$$

Es.... Un quadrato di lato l_q ha la stessa area di un
 triangolo equilatero di lato l_T . Calcolare $\frac{l_T}{l_q}$

$$\text{Area quadrato} = l_q^2 \quad \text{Area triangolo equil.} = \frac{\sqrt{3}}{4} l_T^2$$



$$h = l \cdot \sin 60^\circ = l \frac{\sqrt{3}}{2}$$

oppure h si calcola con
 Pitagora

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} \text{ base} \cdot \text{altezza} \\ &= \frac{1}{2} l \cdot l \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \end{aligned}$$

$$\text{Uguagliando le 2 aree: } l_q^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_T^2$$

$$\left[\frac{l_T}{l_q} \right]^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{l_T}{l_q} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3}$$

Es.... Cocomero con diametro esterno 40 cm e buccia di 4 cm.

$$\text{Volume sfera} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad [\text{Sup. laterale sfera: } 4\pi R^2]$$

$$\text{Volume cocomero} = \frac{4}{3} \pi 20^3 \quad \text{Raggio cocomero}$$

$$\text{Volume parte edibile} = \frac{4}{3} \pi 16^3 \quad \text{Raggio parte buona}$$

$$\text{Percentuale buona} = \frac{\frac{4}{3} \pi 16^3}{\frac{4}{3} \pi 20^3} = \frac{16^3}{20^3} = \left(\frac{16}{20} \right)^3 = \left(\frac{4}{5} \right)^3 = \frac{64}{125}$$

$$\frac{64}{125} \text{ è poco più di } \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \quad \text{Parte buona} = \text{pochissimo + di } \frac{1}{2}.$$

TEST 2007/2008

Titolo nota

26/09/2008

$$\boxed{1} \quad \frac{10^{200}}{20} = \frac{2^{200} \cdot 5^{200}}{2^2 \cdot 5} = 2^{198} \cdot 5^{199} = 5 \cdot 10^{198} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{200} \text{ NO!!!!!!}$$

$$\boxed{2} \quad \log_2 (x \cdot 2^x) = \log_2 x + \log_2 2^x = x + \log_2 x$$

$\boxed{3}$ "Tutti gli studenti di Meccanica che hanno fatto precorso supereranno il test". Supponendo che l'ha detto abbia ragione, quale delle seguenti è sicuramente vera?

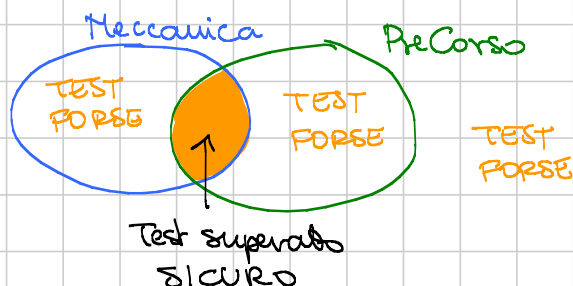
(A) Tutti quelli che superano Test sono di Mecc. e hanno fatto PCM

(B) Non superare il test vuol dire non aver seguito PCM

(C) Tutti quelli di Mec. che superano Test hanno fatto PCM

(D) Tutti quelli che non superano non sono di Mec.

$\rightarrow$ (E) Tutti quelli di Mec. che NON superano non hanno fatto PCM

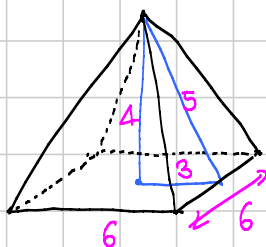


$$\boxed{4} \quad x^2 - 6x + 9 > 0 \quad (x-3)^2 > 0 \text{ sempre, tranne quando } x-3=0$$

$$\boxed{x \neq 3}$$

$$\boxed{4bis} \quad (x^2 - 3)^2 > 0 \text{ sempre tranne quando } x^2 = 3, \quad \boxed{x \neq \pm\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} \boxed{5} \quad 4 \sin^4 x + \sin^2(2x) &= 4 \sin^4 x + (2 \sin x \cos x)^2 \\ &= 4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \\ &= 4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x \\ &= 4 \sin^2 x \end{aligned}$$



$$\text{Vol} = \frac{1}{3} \text{Area base} \cdot h$$

$$\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot h = 48 \Rightarrow h = 4$$

$$\text{Altezza faccia} = 5$$

$$\text{Area faccia} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$$

$$\text{Sup. laterale} = 4 \cdot 15 = 60$$

12 Cerchio. Lung. circ. = p . Area = ?

Sta al raggio. $p = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{2\pi}$

$$\text{Area} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{p}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$$

13 $y = 3x - 2$ $ax + 5y + 7 = 0$. Per quale a sono $\perp$?

$$5y = -ax - 7$$

$$y = -\frac{a}{5}x - \frac{7}{5}$$

↑ coeff. ang. deve essere $-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow -\frac{a}{5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{5}{3}$$

14 $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

$$x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 + 9$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

Centro: $(-4, 3)$

Raggio: 5

In alternativa si potevano usare le formule

$$x_0 = -\frac{a}{2} = -\frac{8}{2} = -4 ; y_0 = -\frac{b}{2} = 3 ; R^2 = -c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$

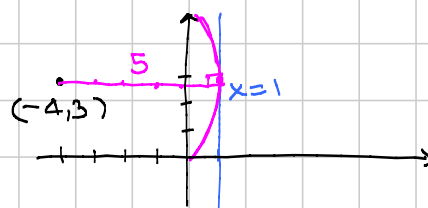
Passa per l'origine? Sostituisco $(0,0)$

$$= -0 + 16 + 9 = 25$$

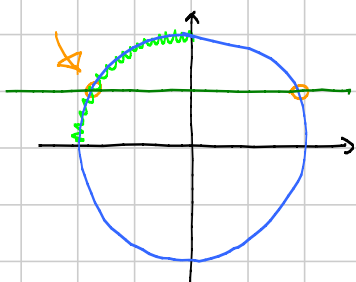
Passa per $(-1, -1)$? Sostituisco $(-1, -1)$: $1 + 1 - 8 + 6 = 0$ Sì!

(In alternativa: calcolare la distanza di $(-1, -1)$ dal centro)

È tangente alla retta $x=1$?



[15] $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{2}$. Quanto vale $\cos x$?



$$x = \frac{5\pi}{6}$$

$$150^\circ$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[15 bis] $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\sin x = \frac{1}{3}$. Quanto vale $\cos x$? $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \frac{1}{9} + \cos^2 x = 1; \quad \cos^2 x = \frac{8}{9}; \quad \cos x = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

scegliere!

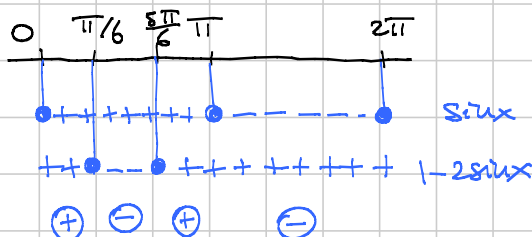
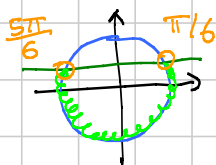
$$\cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Tra $\frac{\pi}{2}$ e π $\cos x < 0$ quindi $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

[16] $\frac{1}{\sin x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\sin x}{\sin x} < 0$

$$1 - 2\sin x > 0 \Leftrightarrow 2\sin x < 1$$

$$\Leftrightarrow \sin x < \frac{1}{2}$$

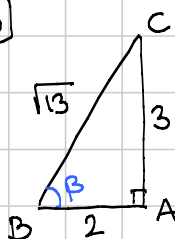


$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup (\pi, 2\pi)$$

[17] $-x^2 \geq 3x$; $x^2 + 3x \leq 0$; $x(x+3) \leq 0$ Radici $x=0, x=-3$
VALORI INTERNI: $[-3, 0]$

[18] $4 \cdot 2^x \geq 8^{2x-3}$ $2 \cdot 2^x \geq (2^3)^{2x-3}$; $2^{2+x} \geq 2^{6x-9}$
 $2+x \geq 6x-9$; $5x \leq 11 \Rightarrow x \leq 11/5$

[19]



$$\cos \beta = ?$$

$$BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$AB = BC \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

[20] $x = \sqrt[7]{3^{20}}$; $x^7 = 3^{20}$

$$x = 3^{\frac{20}{7}}$$

$$\sqrt[20]{x} = 3^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{3}, \quad \log_3 x = \frac{20}{7}$$

$$x = 3^{\frac{20}{7}} < 3^{\frac{21}{7}} = 3^3 = 27$$