

Precorso di Matematica 2007

Stampato integrale delle lezioni

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 1. Frazioni e potenze	4
Lezione 2. Polinomi ed equazioni polinomiali	13
Lezione 3. Disequazioni di secondo grado e con prodotti e quozienti	24
Lezione 4. Logaritmi e relative equazioni e disequazioni	41
Lezione 5. Equazioni e disequazioni con radici	53
Lezione 6. Equazioni e disequazioni con valori assoluti	63
Lezione 7. Trigonometria, equazioni e disequazioni trigonometriche	73
Lezione 8. Trigonometria e triangoli	84
Lezione 9. Geometria analitica	95
Lezione 10. Insiemi del piano e geometria euclidea	107

MASSIMO GOBBINO - PRECORSO

Titolo nota

17/09/2007

2 Fascicoletti MA-GI pomeriggio

8:30-13:00 LO-VE

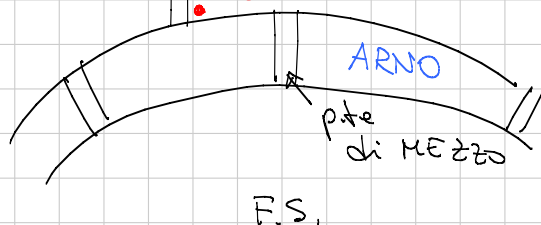
SEU

Servizio
EDITORIALE
UNIVERSITARIO

P.N.

P.zza
CAV.

SEU



$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$2^{30} + 2^{30} = 2^{60}$$

VIA CURTATONE E
MONTANARA

① Precorso di Matematica

② ESERCIZI X
PRECORSO

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

→ Trovare b

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+b} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + b \right)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$2a = a+b \rightarrow a=b$$

$$\text{Quindi } b=a=\frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}$$

$$a+b = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2a}{a+b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$2a = a+b$$

$$2a = b \rightarrow \text{sost. nella I eq.}$$

$$a+b = 3a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$b = 2a = \frac{2}{9}$$

$$a+b = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$$

1° modo: sost. la 1ª nella 2ª

$$\frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \rightarrow 2a = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

2° modo: ui lavoro la 2ª eq.

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$$

$$3a = a+b$$

$$b = 2a$$

Sost. nella 1ª eq.

$$a+b = 3a = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$x \geq 3 \Rightarrow x^2 > 0$$

VERA

$$x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$$

FALSA per colpa dei negativi

$$\underset{x}{-1000} < 3$$

$$1000^2 < 9$$

$$x^2 \uparrow \text{NO}$$

$$x > 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$$

VERA

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

VERA

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x^2 \leq 0$$

VERA

Basta prendere $x = 0$

$$x^2 = 0 \leq 0$$

POTENZE

e

RADICALI

- Esponente intero positivo (positivo vuol dire > 0)

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a \text{ volte}}$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$x^1 = x$$

Richieste su x : NESSUNA

Proprietà

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{a \text{ volte}} \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{b \text{ volte}}$$

in tutto x compare $a+b$ volte $= x^{a+b}$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$$\begin{aligned} (x^3)^4 &= x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \\ &= (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) \\ &= x^{12} \end{aligned}$$

$$x^a \cdot y^a = (xy)^a$$

$$\begin{aligned} x^3 \cdot y^3 &= x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \\ &= (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \\ &= (xy)^3 \end{aligned}$$

$$x^a + x^b =$$

$$x^a - x^b =$$

NULLA DI FURBO !!

$$2^{100} + 2^{100} = 4^{100} \quad \text{NO !!!!!}$$

$$= 2 \cdot 2^{100} = 2^1 \cdot 2^{100} = 2^{101}$$

- EspONENTE $= 0$ $x^0 = 1$ (MEGLIO PER $x \neq 0$)
- EspONENTE INTERO negativo $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Restrizioni su x : deve essere $\neq 0$

Continuano a valere le stesse proprietà

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

somma esponenti

$$\frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot \frac{1}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$$

• Esponente frazionario

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \text{ deve venire } x^{\frac{1}{2} \cdot 2} = x^1 = x$$

Quindi $x^{\frac{1}{2}}$ è q.c. che elevato al quadrato fa x

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = (xy)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{xy}$$

$$x^a \cdot y^a = (xy)^a$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} =$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} =$$

NULLA DI FURBO

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$$

$$2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} \quad \text{FALSA PARTENZA !!}$$

$$x^a \cdot y^b = \text{NDF}$$

$$\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}} =$$

$$2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$$

$$= 2^{\frac{3+10}{15}} = 2^{\frac{13}{15}} = \sqrt[15]{2^{13}}$$

$$a^4 = 2^5 \quad \text{elevo tutto alla } \frac{1}{4}$$

$$(a^{\cancel{4}})^{\frac{1}{\cancel{4}}} = (2^5)^{\frac{1}{4}} \quad a = 2^{\frac{5}{4}}$$

$$4^{3a} = 2^7 \rightarrow \text{Trovare } a$$

1° Scrivo tutto con la stessa base

$$(2^2)^{3a} = 2^7$$

↓

$$2^{6a} = 2^7$$

Se la base è la stessa, gli esponenti devono essere uguali

$$6a = 7 \rightarrow a = \frac{7}{6}$$

$\sqrt{a} = 2$		$\sqrt[3]{9} = 3$	
$\sqrt[3]{16} = 2$		$\sqrt[3]{16} = 4$	
$\sqrt[4]{a} = 3$		$a^{1/2} = 5$	
$a^{3/2} = 27$		$a^{-1/2} = 1/4$	
$2^{-a} = 1/8$		$8^a = 4$	
$\sqrt[3]{16} = 8$		$2^{20} - 2^{19} = 2^a$	
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a}$		$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{a}$	

$$\sqrt[3]{16} = 2 \rightarrow \sqrt[3]{2^4} = 2 \rightarrow 2^{\frac{4}{3}} = 2^1$$

$$\frac{4}{3} = 1 \rightarrow a = 4$$

$$\sqrt[4]{a} = 3 \rightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3 \rightarrow (a^{\frac{1}{4}})^4 = 3^4$$

$$a = 3^4 = 81$$

$$a^{\frac{1}{2}} = 5 \quad \text{elevo alla 2:} \quad (a^{\frac{1}{2}})^2 = 5^2 \rightarrow a = 25$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 27 \quad a^{\frac{3}{2}} = 3^3 \quad \text{elevo alla } \frac{2}{3}:$$

$$(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$a = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad a^{-\frac{1}{2}} = 2^{-2} \quad \text{elevo alla } (-2):$$

$$(a^{-\frac{1}{2}})^{-2} = (2^{-2})^{-2}$$

$$a = 2^{(-2) \cdot (-2)} = 2^4 = 16$$

$$2^{-a} = \frac{1}{8} \quad ; \quad 2^{-a} = \frac{1}{2^3} \quad ; \quad 2^{-a} = 2^{-3}$$

$$\text{stessa base:} \quad -a = -3 \Rightarrow a = 3$$

$$8^a = 4 \quad ; \quad (2^3)^a = 2^2 \quad ; \quad 2^{3a} = 2^2 \quad \text{stessa base}$$

$$3a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[a]{16} = 8 ; \sqrt[a]{2^4} = 2^3 ; 2^{\frac{4}{a}} = 2^3 \text{ stessa base}$$

$$\frac{4}{a} = 3 \rightarrow a = \frac{4}{3}$$

— 0 — 0 —

$$2^{20} - 2^{19} = \text{USO CHE } 2^{20} = 2^1 \cdot 2^{19}$$

$$2 \cdot \boxed{2^{19}} - \boxed{2^{19}} = 2^{19}$$

CANE CANE

Risultato

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{a}$$

$$2^{20} - 2^{19} = 2^{19}$$

$$\overset{0}{2^{\frac{1}{2}}} \cdot \overset{0}{2^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \rightarrow (2)^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 \rightarrow a = 4.$$

Titolo nota

18/09/2007

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{6}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$$

$$6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{a}}$$

$$\rightarrow a=2$$

$$x^k \cdot y^k = (xy)^k$$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$$

$$\sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{8}}$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$$

$$(x^k)^2 = x^{k2}$$

$$2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{8}}$$

$$a = 2^{\frac{1}{4} \cdot 8} = 2^2 = 4$$

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8 = \left(a^{\frac{1}{8}}\right)^8 \quad \text{elevo alla 8-va}$$

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[4]{4} \quad ; \quad \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[4]{2^2} \quad ; \quad 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{2}{4}}$$

$$\text{stessa base} \Rightarrow \text{esp. uguali} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{a} \quad ; \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{a} \quad ; \quad a=4$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{a}} = 2^{-1} \quad ; \quad \frac{2^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = 2^{-1} \quad ; \quad 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1}$$

elevo alla -6

$$\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}\right)^{-6} = \left(2^{-1}\right)^{-6}$$

$$(xy)^k = x^k y^k$$

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{-6} \cdot \left(a^{-\frac{1}{6}}\right)^{-6} = \left(2^{-1}\right)^{-6}$$

$$2^{-2} \cdot a = 2^6$$

$$2^{-2} \cdot a = 2^6$$

$$\frac{a}{2^2} = 2^6$$

$$a = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8$$

In alternativa;

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1}$$

Moltiplico dx e sx
per $2^{-\frac{1}{3}}$

$$a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$a^{-\frac{1}{6}} = 2^{-1-\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}}$$

elevo alla -6

$$a = 2^{-\frac{4}{3}(-6)} = 2^8$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[9]{4} = 2$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{9}} = 2^1$$

$$x^k \cdot x^m = x^{k+m}$$

$$2^{\frac{1}{2} + \frac{2}{9}} = 2^1$$

stessa base $\Rightarrow$ esp. uguali

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = 1 \rightsquigarrow \text{ricavo } a = 4$$

— o — o —

$$\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{a}$$

$$\boxed{a = 30}$$

NO !!!!!

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} =$$

Nulla di Furbo !!!

$$\sqrt{2^5} - \sqrt{2}$$

$$; \quad \sqrt{2 \cdot 2^4} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^4} - \sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$\boxed{3}\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{?}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{a} \leadsto \text{ricavo } a$$

$$2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \quad \text{elevo tutto al cubo:}$$

$$(2 \cdot 3^{\frac{1}{3}})^3 = (a^{\frac{1}{3}})^3; \quad 2^3 \cdot 3 = a, \quad 24 = a.$$

POLINOMI

$$3x^{\boxed{4}} + 4x^{\boxed{-5}} \quad \text{grado 4}$$

↑
termine noto

$$\begin{aligned} (3x^4 + 4x - 5)(x - 2) &= 3x^5 + 4x^2 - 5x - 6x^4 - 8x + 10 \\ &= 3x^5 - 6x^4 + 4x^2 - 13x + 10 \end{aligned}$$

Il grado del prodotto di 2 polinomi = somma dei gradi

(gli esponenti dei termini di grado massimo si sommano)

Il grado della somma di 2 polinomi è il grado più alto tra quelli dei polinomi sommati?

[N1] Se i 2 polinomi che sto sommando hanno grado diverso, allora il grado della somma è il più grande dei gradi

Se i 2 polinomi che sto sommando hanno lo stesso grado, può succedere che i termini di grado max si semplifichino.

Es. $3x^2 + 2x + 1$ $-3x^2 + 6x - 2$

Se sommo ottengo: $8x - 1$

In ogni caso il grado può solo scendere o restare costante.

DIVISIONE TRA POLINOMI

$$\begin{array}{r}
 \cancel{2x^4} + 3x^3 - x^2 + 3x - 1 \\
 - \cancel{2x^4} + 4x^3 - 6x^2 \quad \text{prod. con} \\
 \hline
 7x^3 - 7x^2 + 3x - 1 \quad \text{segua -} \\
 - \cancel{7x^3} + 14x^2 - 21x \\
 \hline
 7x^2 - 18x - 1 \\
 - \cancel{7x^2} + 14x - 21 \\
 \hline
 -4x - 22
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 3 \\
 \hline
 2x^2 + 7x + 7 \\
 \hline
 \end{array}$$

$7x^2$ diviso x^2
 $2x^4$ diviso x^2
 $7x^3$ diviso x^2
QUOZIENTE
RESTO

$$2x^4 - 1 \mid x^2 - 2x + 3$$

Scriviamolo "con i buchi"

se questo coefficiente è 1, non
veniamo fuori grazie
strada facendo

$$\begin{array}{r}
 2x^4 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 6x^2} \\
 4x^3 - 6x^2 \\
 \underline{-4x^3 + 8x^2 - 12x} \\
 2x^2 - 12x - 1 \\
 \underline{-2x^2 + 4x - 6} \\
 -8x - 7
 \end{array}$$

Quoziente

← resto

$$x^3 + x + 1 \mid x - 2$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad \quad \quad + x + 1 \\
 \underline{-x^3 + 2x^2} \\
 2x^2 + x + 1 \\
 \underline{-2x^2 + 4x} \\
 5x + 1 \\
 \underline{-5x + 10} \\
 11
 \end{array}$$

Nota: quando divido un pol.
 $p(x)$ per $x-a$, il resto
che ottengo è sempre
un numero, e quel numero
è $p(a)$, cioè quello che
ottengo sostituendo a
nel polinomio iniziale
Nel nostro caso:
 $p(2) = 2^3 + 2 + 1 = 11$

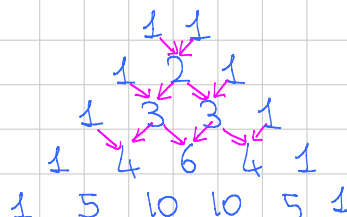
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triangolo di
TARTAGLIA



$$(x+2)^4 = x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$$

$\uparrow$
 $a=x$
 $b=2$

$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

VALGONO QUANDO C'È SEGNO -
E STESSO ESPONENTE

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

QUELLE CON IL SEGNO + FUNZIONANO SOLO
CON ESPONENTI DISPARI

$$a^2 + b^2$$

$$a^4 + b^4$$

$$a^6 + b^6$$

N.D.F.

$$a^4 - b^2 = (a^2 - b)(a^2 + b)$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \quad \text{con } x = a^2, y = b$$

$$a^6 - b^6 \quad \text{si può vedere in tanti modi}$$

$$= (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$

$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \quad \begin{array}{l} x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) \\ \text{con } x = a^3, y = b^3 \end{array}$$

$$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \quad \begin{array}{l} \text{ho usato} \\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ \text{con } x = a^2, y = b^2 \end{array}$$

Voleendo si può anche scrivere

$$a^6 - b^6 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$$

$$= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$$

Eq. II grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 2 \text{ soluzioni}$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 0 \text{ soluzioni REALI}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 1 \text{ soluzione}$$

(2 radici coincidenti)

Espressione alternativa:

1 RADICE DI MOLTEPLICITÀ
2.

— o —

Trovare le radici = scomporre il polinomio

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$$

Le 2 soluzioni (cioè le 2 radici del polinomio) sono

$x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Da questo si ha che

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) \quad \text{Radici: } x = \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}$$

Relazioni fra radici e coeff. di un pol. di II grado

Supponiamo che il coeff. di x^2 sia 1. Siano

x_1 e x_2 le 2 radici. Allora

$$x_1 + x_2 = \text{COEFF. DI } x \text{ CAMBIATO DI SEGNO}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \text{TERMINE NOTO}$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Le radici (se ci sono) sono 2 numeri che moltiplicati danno -6 e sommati danno 1

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow -\frac{4}{2} = -2 \end{matrix}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \dots = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Quindi $x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\text{Somma} = -3$$

$$\text{Prodotto} = -4$$

$$t = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t = -4$$

$$x^2 = -4$$

NULLA

2 RADICI

$$t = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

La scomposizione, vista in t , sarebbe

$$t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4)$$

Vista in x diventa

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 - 1)(x^2 + 4) = (x+1)(x-1)(x^2 + 4)$$

RADICE -1

RADICE 1

NON PRODUCE
RADICI

$$x^4 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

3 SOLUZIONI

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

2 SOLUZIONI

Scomposizione :

$$x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2 - 2)^2 = (x + \sqrt{2})^2 (x - \sqrt{2})^2$$

La molteplicità di una radice è l'esponente con cui il rispettivo fattore compare nella scomposizione

$\sqrt{2} \rightsquigarrow$ corrispondente fattore è $x - \sqrt{2}$

e compare con esponente 2, quindi

$\sqrt{2}$ è una radice di molteplicità 2

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3/2$$

1 RADICE di molt. 2

Titolo nota

19/09/2007

DISuguAZIONI.

$$x > a \quad]a, +\infty[\quad (a, +\infty[$$

$$x \geq a \quad [a, +\infty[$$

$$x < a \quad]-\infty, a[\quad]-\infty, a)$$

$$x \leq a \quad]-\infty, a]$$

$$a < x < b \quad]a, b[\quad (a, b)$$

$$a \leq x < b \quad [a, b[\quad [a, b)$$

$$a < x \leq b \quad]a, b] \quad (a, b]$$

$$a \leq x \leq b \quad [a, b]$$

DISuguAZIONI DI PRIMO GRADO

$$2x \geq 3 \quad x \geq \frac{3}{2} \quad [\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$2x + 1 \geq x + 3$$

$$2x - x \geq 3 - 1$$

$$x \geq 2$$

$$[2, +\infty[$$

$$-x \geq 2$$

$$x < -2$$

$$]-\infty, -2[$$

$$-2x \leq -6$$

$$2x \geq 6$$

$$x \geq \frac{6}{2} = 3 \quad [3, +\infty[$$

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$a x^2 + b x + c > 0$$

$$x^2 + 3x - 1 \geq 0$$

$$a > 0$$

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{ha 2 RADICI}$$

DISTINTE E REALI

$$x_1, x_2$$

$$x_1 > x_2$$

$$a x^2 + b x + c > 0 \quad \text{se} \quad x > x_1$$

oppure $x < x_2$

quando? in $] -\infty, x_2[\cup] x_1, +\infty[$

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{per} \quad x = x_1 \quad \text{oppure} \quad x = x_2$$

$$a x^2 + b x + c < 0 \quad \text{se} \quad x_2 < x < x_1$$

in $] x_2, x_1[$

1 sola radice reale (doppia) x_1

$$a x^2 + b x + c > 0 \quad \text{se} \quad x \neq x_1 \quad \text{cioè}$$

in $] -\infty, x_1[\cup] x_1, +\infty[$

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{se} \quad x = x_1$$

$$a x^2 + b x + c < 0$$

MA!!!

INSIEME
~~Ø~~ VUOTO

NON CE SONO RADICI REALI

$$a x^2 + b x + c > 0 \text{ SEMPRE}$$

$$]-\infty, +\infty[\text{ oppure } \mathbb{R}$$

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{MAI}$$



$$a x^2 + b x + c < 0 \quad \text{MAI}$$



$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad (x-1)^2$$

$$a x^2 + b x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a x^2 + 2b x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

Sempre $\mathbb{R}$ $]-\infty, +\infty[$

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

$x \neq 1$ $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$$x^2 + x + 1 < 0$$

$\Delta < 0$ non ci sono radici
reali



Soluzioni :

$\emptyset$

NON ci sono
soluzioni

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

$x_1 = 3$ $x_2 = -1$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

$$x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 3 \quad]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

a $x^2 + bx + c$ ha 2 radici x_1, x_2
distinte

||
 $a(x - x_1)(x - x_2)$

$$a x^2 + b x + c > 0$$

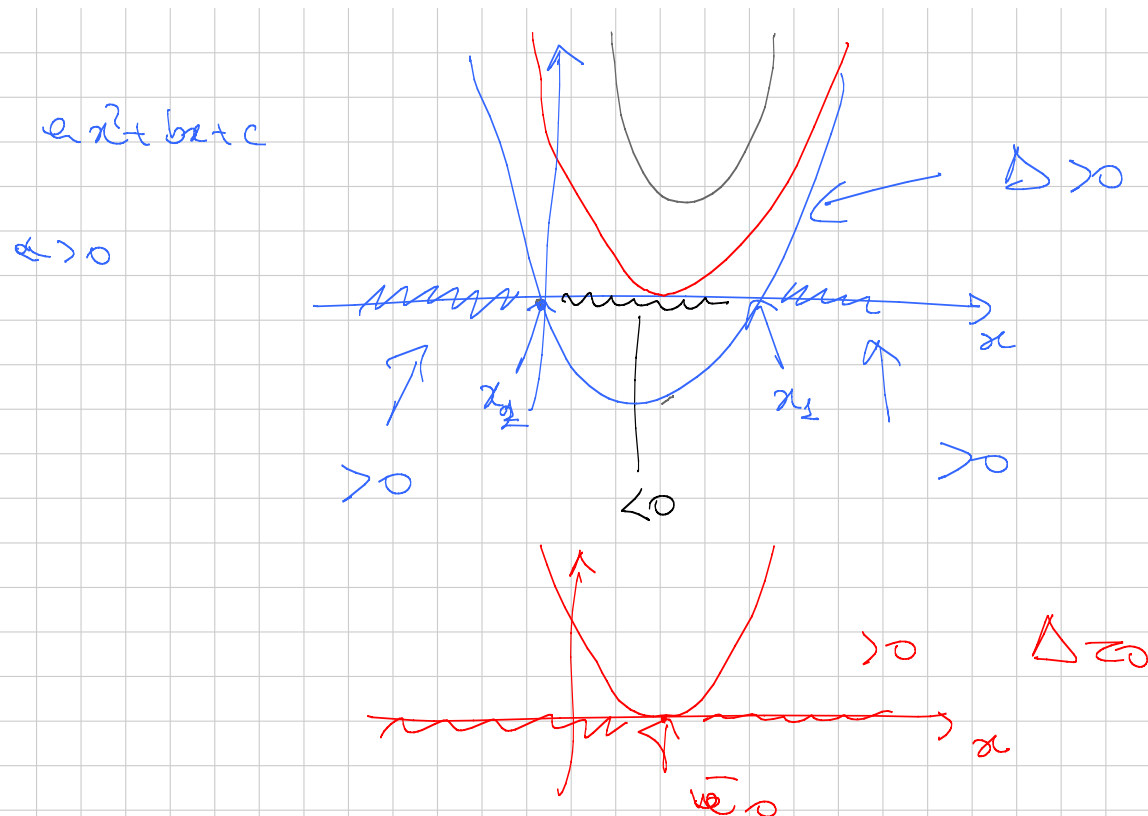
$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

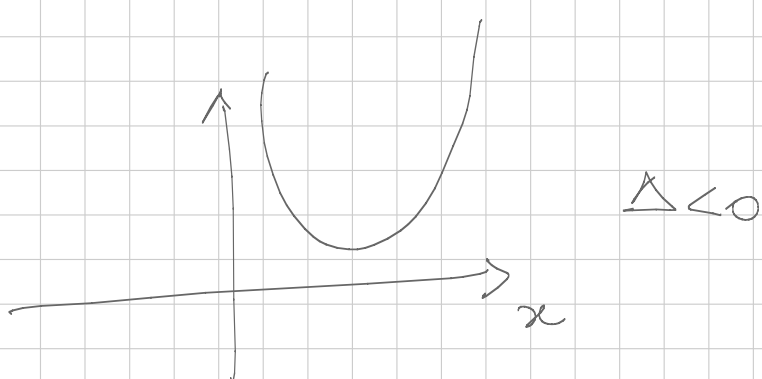
Prodotto di 2 fattori $\bar{e} > 0$ se sono tutti
e 2 > 0 oppure tutti e 2 negativi < 0

Tutti e 2 > 0 $x - x_1 > 0$ e $x - x_2 > 0$
vuol dire $x > x_1$ e $x > x_2$

Tutti e 2 < 0 $x - x_1 < 0$ e $x - x_2 < 0$

x più grande della più grande radice





$$a < 0$$

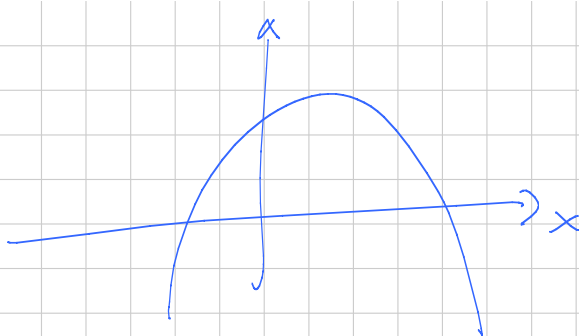
$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$-x^2 + x + 1 > 0$$

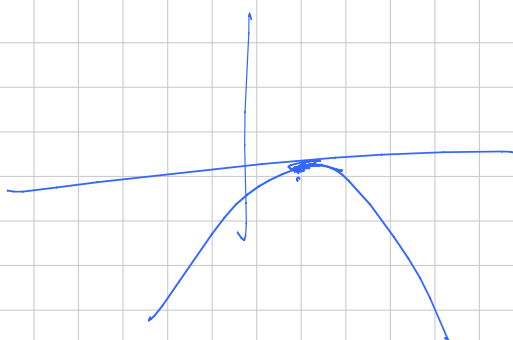
$$\downarrow$$

$$x^2 - x - 1 < 0$$

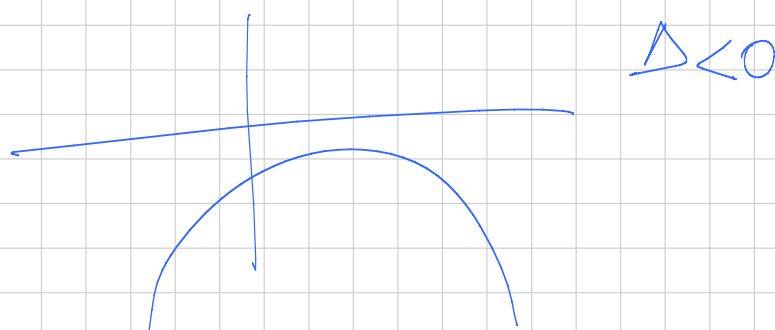
$$a < 0$$



$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



Titolo nota

19/09/2007

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$$1 \leq x \leq 3$$

$$[1, 3]$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$x < 1 \cup x > 3$$

$$]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \quad \text{diventa } x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

$$-1 \leq x \leq 3 \quad [-1, 3]$$

$$-x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \text{diventa } x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$-1 < x < 3 \quad]-1, 3[$$

$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \quad \text{solo per } x = -2$$

Sempre: ≥ 0 per $x \neq -2$ e $= 0$ per

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\quad x = -2$$

$$x^2 + 4x + 4 > 0$$

$$x \neq -2 \quad]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$$

$$x^2 + 4x + 4 < 0 \quad \text{MAI!} \quad \emptyset$$

$$x^2 + 4x + 4 \leq 0 \quad \text{può essere } < 0 \quad \text{oppure}$$

SOLUZIONE

$$x = -2 \quad \{-2\}$$

$$\begin{array}{c} \text{zero} \\ \uparrow \\ x = -2 \end{array} \quad \begin{array}{c} < 0 \\ \uparrow \\ \text{NON SUCCEDE} \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 5 \geq 0 \quad \Delta = 16 - 20 < 0$$

$$x^2 - 4x + 5 \quad \text{è sempre } > 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 5 \geq 0 \quad \text{SEMPRE } \mathbb{R} \quad]-\infty, +\infty[$$

$$x^2 - 4x + 5 \leq 0 \quad \emptyset \quad \text{MAI} \quad \text{XCHÉ } \in \text{ SEMPRE } > 0$$



$$x^2 \geq 4$$

$$\cancel{x \geq \pm 2} \quad \text{NO}$$

$$x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 2$$

$$]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

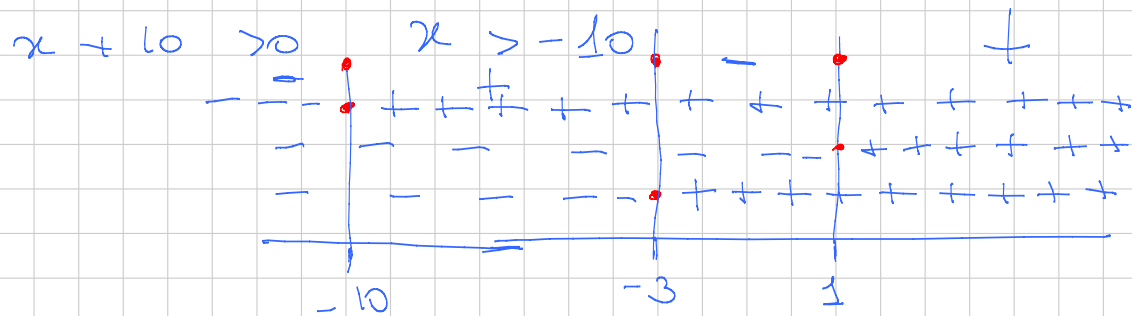
Titolo nota

19/09/2007

$$(x+3)(x-1)(x+10) > 0$$

$$x+3 > 0 \quad x > -3 \quad "$$

$$x-1 > 0 \quad x > 1 \quad "$$



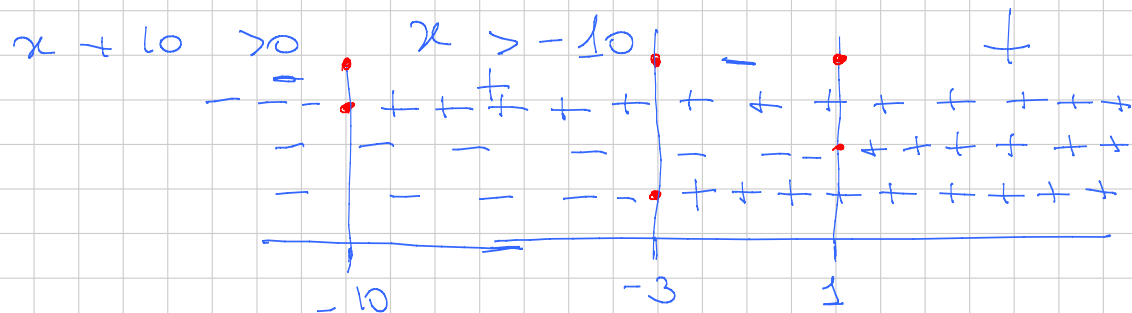
Titolo nota

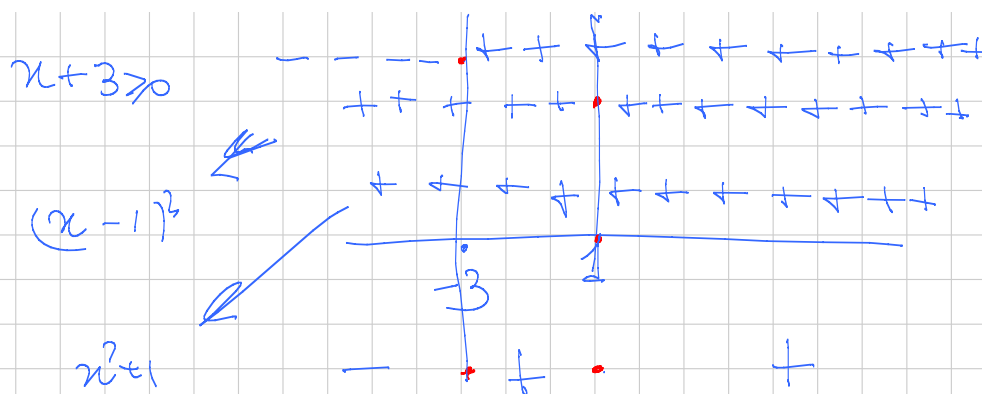
19/09/2007

$$(x+3)(x-1)(x+10) > 0$$

$$x+3 > 0 \quad x > -3 \quad "$$

$$x-1 > 0 \quad x > 1 \quad "$$





SOLUZIONE È $x < -3$

$$(x^2+1)(x-1)^2(x+3) \leq 0$$

SOLUZIONE : $x \leq -3 \vee x = 1$

$$]-\infty, -3] \cup \{1\}$$

$$(x^2 - x)(x+1) \geq 0$$

$$x^2 - x > 0$$

||

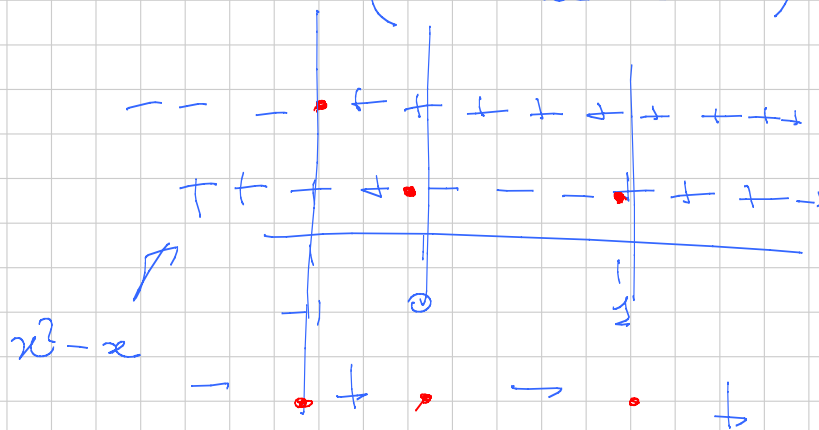
$$x(x-1)$$

$$x(x-1) = 0 \text{ per } x=0$$

$$\text{oppure } x=1$$

$$x^2 - x > 0 \quad \text{se } x < 0 \vee x > 1 \quad \left[\begin{array}{l} = 0 \text{ se } x=0 \vee \\ x=1 \end{array} \right]$$

$$x+1 > 0 \quad x > -1 \quad (=0 \text{ se } x=-1)$$



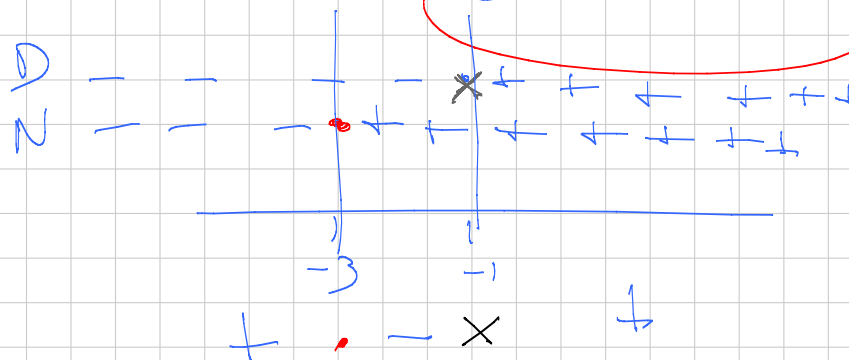
SOLUZI.

$$-1 < x < 0 \quad \vee \quad x > 1$$

$$\frac{x+3}{x+1} \geq 0$$

$$N \quad x+3 > 0 \quad x > -3 \quad (=0 \text{ se } x=-3)$$

$$D \quad x+1 > 0 \quad x > -1 \quad (=0 \text{ se } x=-1)$$



SOLUZIONE $x \leq -3 \cup x > -1$

$$\frac{1}{x-1} > 1$$

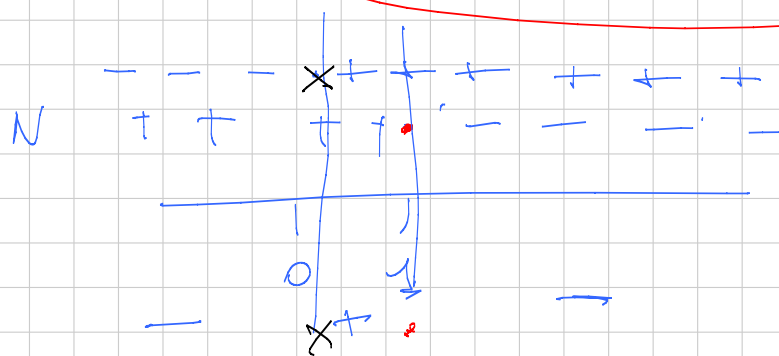
~~$1 > x$~~ NO x può essere < 0

$$\frac{1}{x} - 1 > 0$$

$$\frac{1-x}{x} > 0$$

N $1-x > 0 \quad x < 1 \quad (=0 \text{ se } x=1)$

D $x > 0 \quad (=0 \text{ se } x=0)$



SOLUZIONE

$$0 < x < 1$$

Titolo nota

19/09/2007

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6x + 5) \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \& \quad x < -1 \vee x > 3 \quad (= 0 \& \ x = -1 \text{ oppure } x = 3)$$

$$\text{Radici di } x^2 - 2x - 3 \quad x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 6x + 5 > 0 \quad \& \quad x < 1 \vee x > 5 \quad (= 0 \& \ x = 1 \text{ oppure } x = 5)$$

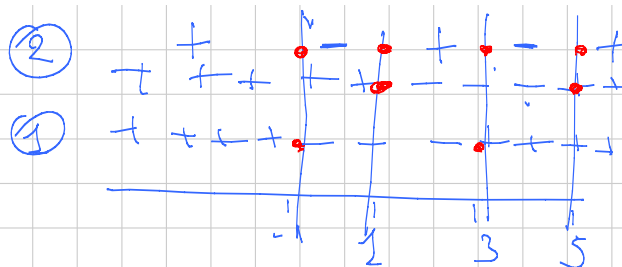
$$\text{Radici} \quad x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

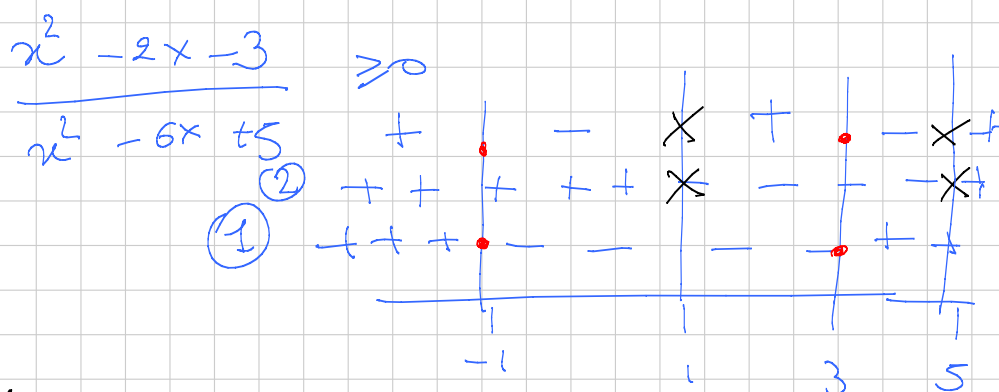
SOLUZIONE

$$x \leq -1 \quad \vee \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \vee \quad x \geq 5$$

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6x + 5) > 0$$

$$\text{SOLUZIONE} \quad x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 3 \quad \vee \quad x > 5$$





SOLUZIONE

$$x \leq -1 \quad \vee \quad 1 < x \leq 3 \quad \vee \quad x \geq 5$$

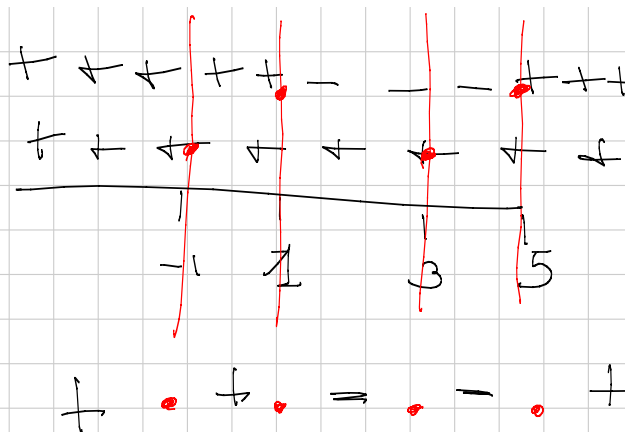
$$(x^2 - 2x - 3)^{2000} (x^2 - 6x + 5)^{1999} \leq 0$$

① $(x^2 - 2x - 3)^{2000} \geq 0$ Sempre $\Rightarrow 0$ se
 $x = 3$ oppure $x = -1$

② $(x^2 - 6x + 5)^{1999} \geq 0$ se e solo se $(\Leftrightarrow)$ $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$$x^2 - 6x + 5 > 0 \quad \text{se} \quad x < 1 \quad \text{oppure} \quad x > 5$$

$$(\text{ed } = 0 \text{ se } x = 1 \text{ oppure } x = 5)$$



SOLUZIONE:

$$\{-1\} \cup 1 \leq x \leq 5$$

Titolo nota

20/09/2007

$$x^6 + 5x^3 + 6 = 0$$

$$t = x^3$$

$$t^2 = x^6$$

$$t^2 + 5t + 6 = 0$$

Risolvo in t

$$\text{Somma} = -5$$

$$\text{Prod.} = 6$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} -2 & \rightarrow x^3 = -2 \rightarrow x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \\ -3 & \rightarrow x^3 = -3 \rightarrow x = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0 ; x(x^2 - 2x + 1) = 0 ; x(x-1)^2 = 0$$

Soluzioni $\nearrow x=0$ Moltiplicità 1
 $\searrow x=1$ Moltiplicità 2

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

SPERARE !! CHE CI SIA UNA RADICE
RAZIONALE, cioè del
tipo $\frac{m}{n}$

Come trovare le radici (eventuali) che si scrivono come
Frazione (o numero intero) ?

Bisogna provare (sostituendo) tutte le frazioni $\frac{m}{n}$ in
cui

- m è un divisore del termine noto
- n è un divisore del coeff. del termine di grado max

Nell'esempio: term. noto: 1 ; coeff. term. grado max: 1

Nel nostro caso bisogna provare $x=1$, $x=-1$

$$\boxed{x=1} \quad 1 - 2 + 1 = 0 \quad \text{Ok} \quad x=1 \text{ è UNA SOLUZIONE}$$

Quunque $x-1$ divide il pol. originario

$$\begin{array}{r} x^3 \quad -2x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \hline x^2 + x - 1 \end{array} \right. \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ x^2 - 2x + 1 \\ \underline{-x^2 + x} \\ -x + 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Conclusione:

$$x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$$

$$\text{Quindi } 0 \quad x=1$$

$$0 \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad 3 \text{ soluz.}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \quad \text{Devo provare tutte le fras. } \frac{m}{n}$$

in cui

m divide 6, n divide 1

Quindi devo provare $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$x=1 \quad 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$$

$$x=-1 \quad -1 - 4 - 1 + 6 = 0 \quad \text{Ok. } x=-1 \text{ è soluz.}$$

Divido per $x+1$ e mi riduco al II grado.

$$18x^4 - 45x^3 + 16x^2 + 5x - 2 = 0. \text{ Tentativi da fare: tutte le } \frac{m}{n} \text{ in cui } m \text{ divide 2 e } n \text{ divide 18.}$$

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{18}$$

$$\pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{9}$$

$x^{100} + x^2 + 1 = 0$ Non può avere radici reali perché
 è di sicuro $ROBA \geq 1$.

↑
sempre ≥ 0

— 0 — 0 —

LOGARITMI

$$a^b = c$$

VOGLIO RICAIVARE a : devo tutto
alla $\frac{1}{b}$. Ottengo

$$a = c^{\frac{1}{b}}$$

Voglio ricavare b ;

$$b = \log_a c$$

← L'esponente al
quale elevare
 a per ottenere c .

Esempi

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\log_3 27 = 3$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2 \text{ perché } 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

$$\log_4 8 = x \text{ . Allora } 4^x = 8 \text{ (definizione di log)}$$

$$(2^2)^x = 2^3 ; 2^{2x} = 2^3 ; 2x = 3 ; x = \frac{3}{2}$$

$$\log_4 8 = \frac{3}{2}.$$

Proprietà dei logaritmi

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad [1]$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad [2]$$

$$\log_a (x^k) = k \log_a x \quad [3]$$

$$\begin{aligned}
 \log_a \left(\frac{x}{y} \right) &= \log_a \left(x \cdot \frac{1}{y} \right) = \log_a (x \cdot y^{-1}) \stackrel{\text{REGOLA [1]}}{=} \\
 &= \log_a x + \log_a (y^{-1}) \stackrel{\text{REGOLA [3]}}{=} \\
 &= \log_a x - \log_a y
 \end{aligned}$$

Quindi la [2] è conseguenza di [1] e [3]

FORMULA DI CAMBIO DI BASE

$a^x = b$
Per definizione: $x = \log_a b$
Faccio a dx e sx il log in base c
 $\log_c (a^x) = \log_c b$
REGOLA [3] ↓
 $x \cdot \log_c a = \log_c b$
 $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Uguagliando i 2 valori della x ottengo

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (4)$$

$$\log_a (x+y) =$$

$$\log_a (x-y) =$$

NULLA DI FURBO!!!

$$\log_2 7 - \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{7}{6} \right)$$

$$\log_a x$$

Questa scrittura sottintende

- $x > 0$
- $a > 0$ e $a \neq 1$

$\log_1 8 =$ potenza a cui elevare 1 per ottenere 8
IMPOSSIBILE!!!

$\log_2 (-4) =$ IMPOSSIBILE: potenza a cui elevare 2 per ottenere -4 .

$\log_a (1) =$ potenza a cui elevare a per ottenere 1
 $= 0$ ($a^0 = 1$ per ogni a)

$\log_a (a) = 1$ qualunque sia a .

$$\log_3 (2^4) = a \log_3 (2)$$

$$4 \log_3 2 \rightarrow a = 4,$$

$$\log_3 \sqrt{2} = \log_3 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 2$$

$$\log_2 (8 \cdot 16 \cdot 64) = \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 64$$

$$= 3 + 4 + 6 = 13$$

$$\log_3 (20) + \log_3 (4) = \log_3 (20 \cdot 4) = \log_3 80$$

$$\log_5 3 - \log_5 2 = \log_5 (3/2)$$

$$\log_2 4 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\log_2 a \cdot \log_2 b = \text{NDF}$$

$$6 = \log_2 a$$

$$6 = \log_2 2^6$$

$$a = 2^6 = 64$$

$$2^{\log_2 a} = 9$$

$$x = \log_2 a$$

$$2^x = 9$$

$$x = \log_2 9 = \log_2 a \rightarrow a = 9$$

In generale

$$\boxed{b^{\log_b a} = a}$$

b elevato all'esponente a cui
elevare b per ottenere a.

$$\log_2 2^a = 9$$

$$a \cdot \log_2 2 = 9$$

$$a = 9$$

$$\log_2 (4^a) = 9$$

$$\log_2 (2^{2a}) = 9$$

$$2a \log_2 2 = 9$$

$$2a = 9$$

$$a = 9/2$$

$$2^{\log_4 a} = 9$$

$$x = \log_4 a$$

$$2^x = 9$$

$$x = \log_2 9$$

Ritornando in a:

CAMBIO IN BASE 2

$$\log_2 9 = \log_4 a \stackrel{\downarrow}{=} \frac{\log_2 a}{\log_2 4} = \boxed{\frac{1}{2}} \log_2 a = \log_2 a^{\frac{1}{2}}$$

In conclusione

$$\log_2 9 = \log_2 a^{\frac{1}{2}}, \quad 9 = a^{\frac{1}{2}}, \quad a = 9^2 = 81$$

$$2^{\log_a 3} = 2 \quad x = \log_a 3 \quad 2^x = 2$$

$$x = 1 \quad \log_a 3 = 1 \quad a = 3$$

$$\log_2 (\log_3 a) = 2 \quad x = \log_3 a$$

$$\log_2 x = 2 \quad x = 4$$

$$\log_3 a = 4 \rightarrow a = 3^4 = 81$$

$$\log_3 a = 4 ; \log_3 a = \underbrace{4 \cdot \log_3 3}_{=1} = \log_3 3^4$$

$$\log_3 a = \log_3 3^4 \rightarrow a = 3^4$$

$$\log_3 9 = \log_2 a$$

$$\log_2 a = 2$$

$$\log_2 a = \boxed{2} \log_2 2$$

$$\log_2 a = \log_2 2^2$$

$$a = 2^2$$

$$a = 4.$$

$$\log_3 9 = \log_a 25$$

$$\log_a 25 = 2$$

$$\log_a 5^2 = 2$$

$$2 \log_a 5 = 2$$

$$\log_a 5 = 1 \quad a = 5$$

$$\log_3 \sqrt{2} = a \log_3 4$$

$$\sqrt{\log_3 2} = a \log_3 2$$

$$\frac{1}{2} \log_3 2 = 2a \log_3 2$$

$$\frac{1}{2} = 2a ; a = \frac{1}{4}$$

$$\log_7 13 \cdot \log_5 7 = \log_5 a$$

CAMBIO BASE

$$\frac{\log_5 13}{\log_5 7} \cdot \log_5 7 = \log_5 a$$

$$\log_5 13 = \log_5 a \rightarrow a = 13$$

$$\log_7 3 \cdot \log_8 49 = \log_2 a$$

CAMBIO IN BASE 2

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 49}{\log_2 8} = \log_2 a$$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 7} \cdot \frac{2 \cdot \log_2 7}{3} = \log_2 a ; \log_2 a = \frac{2}{3} \log_2 3$$

$$\log_2 49 = \log_2 7^2 = 2 \log_2 7$$

$$\log_2 a = \log_2 3^{\frac{2}{3}}, a = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 (1 + 2^a)$$

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 + 2^8 \cdot 2^a$$

$$2^{20} = 2^8 \cdot 2^a = 2^{8+a}$$

$$20 = 8 + a \quad a = 12$$

Alternativa

$$2^8 + 2^{20} = 2^8 + 2^{8+12} = 2^8 + 2^8 \cdot 2^{12}$$

$$= 2^8 (1 + 2^{12})$$

$$2^x = 3$$

$$x = \log_2 3$$

$$(2^x)^2 = 3$$

$$2^{2x} = 3$$

$$2x = \log_2 3$$

$$x = \frac{1}{2} \log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$$

$$2^{x^2} = 3, \quad x^2 = \log_2 3, \quad x = \pm \sqrt{\log_2 3} \quad (2 \text{ solus.})$$

$$2^{3^2} = 2^9$$

$$2^{(3^2)}$$

↑
si fa prima
l'esponentiale
all'esponente

$$(2^3)^2 = 2^6$$

$$8^2$$

↑
si fa prima la base

$$4 \cdot 2^{x^2} = 8^x$$

$$2^2 \cdot 2^{x^2} = (2^3)^x$$

$$2^{x^2+2} = 2^{3x}$$

$$x^2 + 2 = 3x; \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$3 \cdot 2^{x^2} = 1$$

$$2^{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\log_2 \frac{1}{3}} \quad (2 \text{ soluzioni})$$

NO!!!!

$$x^2 = \log_2 \frac{1}{3}$$

QUANTITÀ
NEGATIVA

$\log_2 (\text{ROBA} < 1)$ è < 0

$$\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3^{-1} = -\log_2 3$$

$x^2 = \text{ROBA NEG} \Rightarrow 0 \text{ soluzioni}$

$$2^{x^2} = 2^{\text{ROBA} \geq 0} \geq 1$$

— 0 — 0 —



$$4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$$

$$2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$$

$$2^{2x} - 2^x \cdot 2^2 + 3 = 0$$

$$(2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x + 3 = 0$$

Pongo $t = 2^x$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = \begin{cases} 1 & \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x = \log_2 1 = 0 \\ 3 & \rightarrow 2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 soluzioni

$$2^x = 3^x$$

1° metodo: divido per 3^x

$$\frac{2^x}{3^x} = 1 ; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$x = \log_{\frac{2}{3}}(1) = 0$$

2° metodo: faccio a dx e sx il log in base 41

$$\log_{41}(2^x) = \log_{41}(3^x)$$

$$x \log_{41} 2 = x \log_{41} 3 ;$$

$$x \underbrace{(\log_{41} 2 - \log_{41} 3)}_{\neq 0} = 0 \rightarrow x \text{ DEVE ESSERE } 0$$

$$\log_2 (x-1) = 5$$

$$x-1 = 32$$

$$x = 33$$

Con tutti i passaggi:

$$\log_2 (x-1) = 5$$

$$\log_2 (x-1) = 5 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 (x-1) = \log_2 (2^5)$$

$$x-1 = 2^5$$

$$x-1 = 32 \quad x = 33$$

— 0 — 0 —

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (x+1) = 3$$

$$\log_2 [(x-1)(x+1)] = 3 \log_2 2$$

$$\log_2 (x^2-1) = \log_2 2^3 ; \quad x^2-1=8 ; \quad x^2=9, \quad x=\pm 3$$

NO !!!!!

2 SOLUTIONS



Provo a sostituire $x=3$

$$\log_2 2 + \log_2 4 = 3$$

$$1 + 2 = 3$$

OK !!!

Sostituisco $x = -3$: $\log_2 (\text{green}) + \log_2 (\text{green}) = 3$

NON HANNO
SENDO

Quindi : solo $x=3$ è soluzione.

Morale : quando ci sono i logaritmi bisogna sempre controllare che gli argomenti siano > 0

— 0 — 0 —

$$\log_x 3 = 9$$

Cambio in base 3 :

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 x} = 9$$

$$\frac{1}{\log_3 x} = 9 ; \quad \log_3 x = \frac{1}{9}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{9} \log_3 3 ; \log_3 x = \log_3 3^{\frac{1}{9}}$$

$$x = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3}$$

$$(\log_2 (x+2))^2 + 3 \log_2 (x+2) = 4 \quad t = \log_2 (x+2)$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\text{Prod: } -4$$

$$\text{Somma: } -3$$

$$t = \begin{cases} -4 & \rightarrow \log_2 (x+2) = -4 & \textcircled{1} \\ 1 & \rightarrow \log_2 (x+2) = 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \log_2 (x+2) = -4 ; \log_2 (x+2) = -4 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 (x+2) = \log_2 2^{-4} ; x+2 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

$$\textcircled{2} \log_2 (x+2) = 1 = \log_2 2 ; x+2 = 2 ; x = 0$$

$$\log_2 \sqrt{x} \cdot \log_2 \sqrt[4]{x} = 2^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x \cdot \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$(\log_2 x)^2 = 4 \quad \log_2 x = \pm 2$$

$$\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$$

$$\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Titolo nota

21/09/2007

Esempi di disequazioni

① $\frac{x+1}{x+2} > 3$ Non fare MAI $x+1 > 3(x+2)$

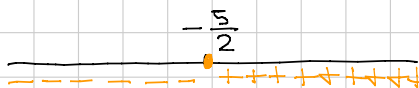
$$\frac{x+1}{x+2} - 3 > 0 ; \frac{x+1-3x-6}{x+2} > 0 ; \frac{-2x-5}{x+2} > 0$$

$$\frac{2x+5}{x+2} < 0$$

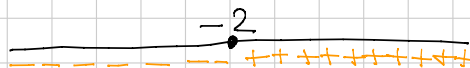
CAMBIO DI
VERSO

Studio separatamente numeratore e denominatore

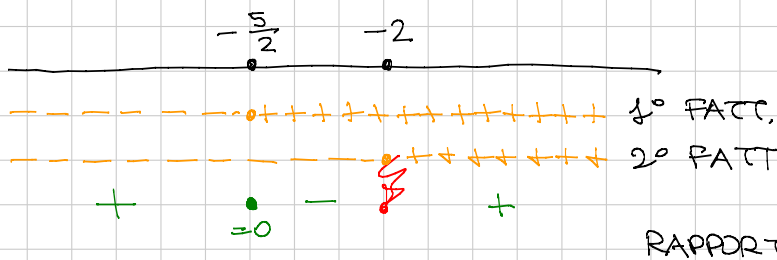
- Guardo il fattore $2x+5$, si annulla per $x = -\frac{5}{2}$



- Guardo il fattore $x+2$



Metto insieme num e denom.



CONCLUSIONE : vado a vedere il simbolo di disug.
contenuto nel testo.
Essendo $<$ la soluzione è

$$-\frac{5}{2} < x < -2 \quad \left(-\frac{5}{2}, -2\right) \quad \left]-\frac{5}{2}, -2\right[$$

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

$$\begin{cases} 3x+2 > 0 \\ 5x-1 < 0 \end{cases}$$

Risolvere il sistema = trovare i valori di x che soddisfanno **CONTEMPORANEAM.** tutte le diseq. coinvolte

Operativamente:

① Si risolvono sep le diseq. coinvolte

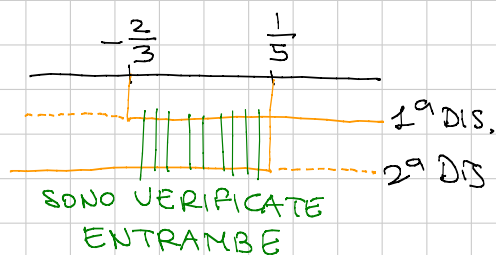
$$3x+2 > 0 \rightsquigarrow x > -\frac{2}{3}$$

$$5x-1 < 0 \rightsquigarrow x < \frac{1}{5}$$

② Si traggono le conclusioni

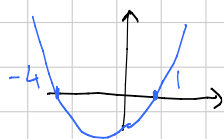
Continua = "verificato"

SOL. SISTEMA $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$



$$\begin{cases} x^2+3x-4 \leq 0 \\ x^2+2x > 0 \end{cases}$$

1^a Diseq.: $x^2+3x-4 \leq 0$ $x_{1,2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$ valori interni



Verificata per $-4 \leq x \leq 1$

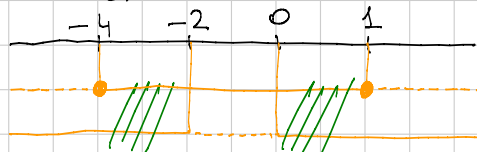
2^a Diseq.: $x^2+2x > 0$ $x(x+2) > 0$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

valori esterni

Verificata per $x < -2$ e per $x > 0$

Conclusioni:



Sol. sistema:

$[-4, -2) \cup (0, 1]$

Equas. e diseq. con radici

$$\sqrt{x+3} = 2$$

$$x+3=4$$

$$x=1$$

$$\sqrt{x+3} = x-3$$

Faccio il quadrato:

$$x+3 = x^2 - 6x + 9 ; \quad x^2 - 7x + 6 = 0 ; \quad x_{1,2} = \begin{matrix} 1 \\ 6 \end{matrix}$$

2 SOLUZIONI? Sostituisco:

$$x=6 : \quad \sqrt{6+3} = 6-3$$

$$3=3$$

O.K.

← UNICA
SOLUZIONE

$$x=1 : \quad \sqrt{1+3} = 1-3$$

$$2=-2$$

NO!!!!

MORALE: OK PARE IL QUADRATO, MA POI BISOGNA
CONTROLLARE CHE LE SOLUZIONI
OTTENUTE VERIFICHINO!!!

$$\sqrt{x+3} = x-3$$

La radice di sicuro è ≥ 0 . Quindi il
termine a dx deve essere ≥ 0 .
l'unico che lo sia

$$x-3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Ora faccio i quadrati, risolvo e trovo

$$x = \begin{matrix} / & 1 \\ \backslash & 6 \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0 \end{matrix}$$

→ Non verifica $x \geq 3$: NO SOLUZIONE→ verifica la condizione $x \geq 3$: OK

$$\sqrt{x+3} < 2$$

$$x+3 < 4$$

$$x < 1$$

NO!!!!!!!!!!

L'argomento della radice deve essere ≥ 0

Caso $\sqrt{\dots} > \dots$

$$\sqrt{x+3} > x-3$$

Se il termine a dx è < 0 , allora la disequazione è AUTOMATICAMENTE soddisfatta purché la radice abbia senso.

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \leftarrow a dx \text{ è } < 0 \\ x+3 \geq 0 \leftarrow \text{la radice ha senso} \end{array} \right\} \text{PRIMO INSIEME DI SOLUZIONI}$$

C'è un secondo insieme di soluzioni dato dal sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \leftarrow a dx \text{ è } \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \leftarrow \text{la radice ha senso} \\ x+3 > (x-3)^2 \leftarrow \text{fare i quadrati} \end{array} \right\} \text{SECONDO INSIEME DI SOLUZIONI}$$

INTUIVE PERCHÉ SEGUE DALLA TERZA
ALLA FINE SI FA L'UNIONE

1° SISTEMA

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 3 \\ x \geq -3 \end{array} \right.$$

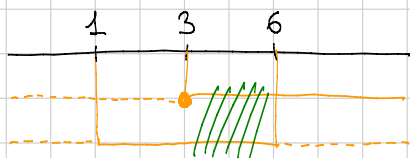
$$[-3, 3)$$

↑
SOLUZ. 1° SIST.

2° SISTEMA

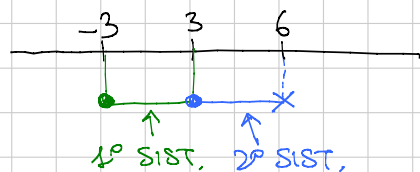
$$\left\{ \begin{array}{l} x-3 \geq 0 \\ x+3 > (x-3)^2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x+3 > x^2 - 6x + 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x \geq 3 \\ 1 < x < 6 \end{array} \right.$$



$[3, 6)$ ← SOLUZ. 2° SIST.

DEVO UNIRE i 2 insiemi di soluzioni



UNIONE = soluz. diseq. iniz.

$$= [-3, 6)$$

In generale la diseq.

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

ha come soluzioni l'UNIONE delle solus. dei sistemi

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad 1^{\circ} \text{ SISTEMA}$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

↓ Assicura la positività dell'argomento della radice.

$$3^A > 3^B \rightsquigarrow A > B$$

$$3^{x^2+2} > 3^{2x+1} \rightsquigarrow x^2+2 > 2x+1$$

$$\log_2 A > \log_2 B \quad \boxed{\rightsquigarrow A > B} \quad \text{NO!!! o meglio N!}$$

L'argomento del log deve essere > 0

$\log_2 A > \log_2 B$ diventa

$$\begin{cases} \boxed{A > 0} & \text{inutile perché segue} \\ B > 0 & \text{dalle altre 2} \\ A > B \end{cases}$$

$$\begin{cases} B > 0 \\ A > B \end{cases}$$

$$\log_5 (2x+1) > \log_5 (3x-2) \rightsquigarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 & (B > 0) \\ 2x+1 > 3x-2 & (A > B) \end{cases}$$

$$\log_2 (3x+1) > 4 ; \log_2 (3x+1) > 4 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 (3x+1) > \log_2 16$$

$$\begin{cases} 16 > 0 & (B > 0) \\ 3x+1 > 16 & (A > B) \end{cases}$$

$$\log_7 (2x+1) \leq 1$$

$$\log_7 (2x+1) \leq \log_7 7$$

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 7 & \leftarrow \text{togliere i log} \\ 2x+1 > 0 & \leftarrow \text{imporre che il log esista} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+1 \leq 7 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \leq 6 \\ 2x > -1 \end{cases} ; \begin{cases} x \leq 3 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 3\right]$$

$$3^x > 2 \quad x > \log_3 2$$

Prendo il $\log_3$ a dx e sx

$$\log_3 (3^x) > \log_3 2$$

$$x \log_3 3 > \log_3 2 \quad x > \log_3 2$$

$$3^{x^2} < 9 ; 3^{x^2} < 3^2 ; x^2 \leq 2 ; x^2 - 2 \leq 0$$

$$\text{Valori INTERNI: } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$3^{x+3} > 3 ; \quad 3^{x+3} > 3^1 ; \quad x+3 > 1 ; \quad x > -2.$$

$$\log_3(x+3) > 0 ; \quad \log_3(x+3) > \log_3 1$$

$$x+3 > 1 \quad \rightarrow \quad x > -2$$

implica argom.
di log è > 0

$$\log_3(x+3) \leq 0 ; \quad \log_3(x+3) \leq \log_3 1$$

$$\begin{cases} x+3 \leq 1 \\ x+3 > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq -2 \\ x > -3 \end{cases} \quad -3 < x \leq -2 \quad (-3, -2]$$

$$\log_2(2x-4) > 3 ; \quad \log_2(2x-4) > 3 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2(2x-4) > \log_2 8 ; \quad 2x-4 > 8 ; \quad 2x > 12 ; \quad x > 6.$$

$$\log_2(2x-4) \leq 3 ; \quad \log_2(2x-4) \leq \log_2 8$$

$$\begin{cases} 2x-4 \leq 8 \\ 2x-4 > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x \leq 12 \\ 2x > 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \leq 6 \\ x > 2 \end{cases} \quad (2, 6]$$

$$2 \log_4 x < 1 ; \quad 2 \log_4 x < \log_4 4 ; \quad \log_4 x < \frac{1}{2} \log_4 4$$

$$\log_4 x < \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$$

$$\log_4 x < \log_4 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \quad (0, 2)$$

$$\text{---} \text{---} \text{---}$$

← condizione
esistenza
del log

$$\log_4 x^2 < 1 ; \quad \log_4 x^2 < \log_4 4$$

$$\begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad (-2, 0) \cup (0, 2)$$

$\log_4 x^2$ ha senso se e solo se $x^2 > 0$, cioè
se e solo se $x \neq 0$

$2 \log_4 x$ ha senso se e solo se $x > 0$

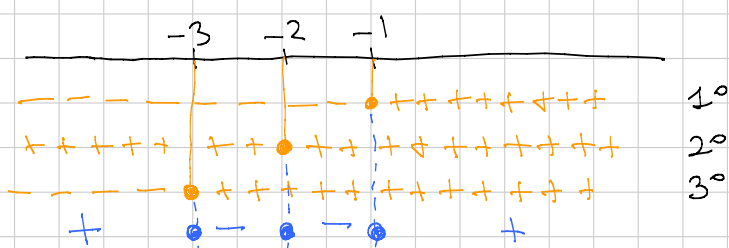
Quindi: le 2 espressioni COINCIDONO quando hanno
senso entrambe

$$\begin{array}{ccc} (x+1) & (x+2) & (x+3) \\ 1^\circ F & 2^\circ F & 3^\circ F \end{array} \leq 0$$

Studio SEPARATAMENTE il segno dei 3 fattori



$$\begin{array}{ccc} (x+1) & (x+2)^2 & (x+3) \\ 1^\circ F & 2^\circ F & 3^\circ F \end{array} \geq 0$$



$$(-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup [1, +\infty)$$

$$\begin{array}{ccc} (x+2) & (x^4+4) & (x+8) \\ 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ \end{array} < 0$$



$x^4 - 5x^2 + 4 > 0$ Cercando le radici si trova che sono $x = \pm 1, x = \pm 2$

Trovate le radici abbiamo la fattorizzazione

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) > 0$$

A questo punto si fa con i prodotti.

$$x^4 - 3x^2 - 4 > 0 \quad x^2 = t \quad t^2 - 3t - 4$$

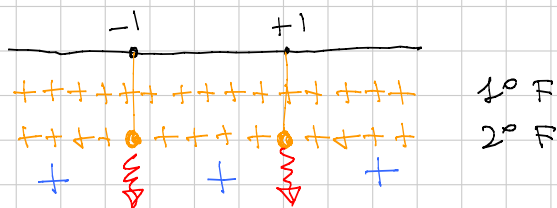
$$t = \begin{cases} 4 & x^2 = 4 & x = \pm 2 \\ -1 & x^2 = -1 & \leadsto \text{NULLA} \end{cases}$$

$$t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) \quad \text{in } t$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = (x^2 - 4)(x^2 + 1) = \underset{1^\circ}{(x+2)(x-2)} \underset{2^\circ}{(x^2 + 1)} \underset{3^\circ}$$

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2} \quad \begin{array}{l} \leftarrow 1^\circ \text{ fatt. sempre } > 0 \\ \leftarrow 2^\circ \text{ fatt. sempre } \geq 0 \\ \text{e si annulla per } x = \pm 1 \end{array}$$



Se la richiesta era $\leq 0 \leadsto$ soluz. : $\emptyset$

Se " " " $\geq 0 \leadsto$ tutto tranne $x = \pm 1$
 $x \neq \pm 1$

" " " $> 0 \leadsto$ stessa cosa

Titolo nota

22/09/2007

$$\sqrt{x+1} = 9 \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x+1=81, \quad \boxed{x=80}$$

Sostituisco $x=80$ e vedo che $\sqrt{81} = 9$ ok. 1 sol.
 — 0 — 0 —

$$\sqrt{x+1} = -9 \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x+1=81, \quad x=80$$

Sostituisco e ottengo $\sqrt{81} = -9$ NO!! 0 solus.
 — 0 — 0 —

$$\sqrt{x^2-5x+5} = 1 \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x^2-5x+5=1$$

$$x^2-5x+4=0 \quad x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \quad \text{ACCETTABILI ENTRAMBE}$$

$$\sqrt{x+14} = x+2 \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x+14 = (x+2)^2$$

$$x+14 = x^2+4x+4; \quad x^2+3x-10=0$$

$$S = -3 \\ P = -10$$

$$x = \begin{cases} -5 \\ \boxed{2} \end{cases}$$

Sostituisco

$$\sqrt{9} = -3 \quad \text{Non accettabile}$$

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{OK}$$

— 0 — 0 —

$$\sqrt{x+14} = -x-2 \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x+14 = (-x-2)^2$$

$$x = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases}$$

Sostituisco

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{OK}$$

$$\sqrt{16} = -4 \quad \text{NO}$$

— 0 — 0 —

$$\sqrt[3]{x-8} = 3 \quad \text{Faccio il cubo} \\ \text{IMPUNEMENTE}$$

$$x-8 = 3^3 = 27 \\ x = 35$$

$$\sqrt[4]{x-8} = 3 \quad \text{Elevo alla quarta} \quad x-8 = 3^4 = 81, \quad x = 89$$

$$\sqrt[4]{x-8} = -3 \quad \rightarrow \quad x-8 = (-3)^4 = 81$$

$$x = 89 \text{ che non va bene} \quad \sqrt[4]{89-8} \neq -3$$

— 0 — 0 —

$$\sqrt{x+6} = x \quad \text{Faccio il quadrato} \quad x+6 = x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \Delta = 1 \quad P = -6$$

$$x = \begin{cases} 3 & \leftarrow \text{OK, perché } \sqrt{3+6} = 3 \\ -2 & \leftarrow \text{NO, perché } \sqrt{-2+6} = -2 \end{cases}$$

$$\sqrt{-2+6} = -2$$

$$\sqrt{x^2+4} = x+2 \quad \text{Quadrato...}$$

$$\boxed{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ NO!!!!!!!}}$$

$$x^2+4 = (x+2)^2 ; \quad \cancel{x^2+4} = \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} \quad 4x = 0, \quad x = 0$$

Sostituisco $x=0$ e vedo che va bene.

— 0 — 0 —

$$\sqrt{x+1} < 9 \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 & \text{Esistenza della radice} \\ x+1 < 81 & \text{Fare i quadrati} \end{cases}$$

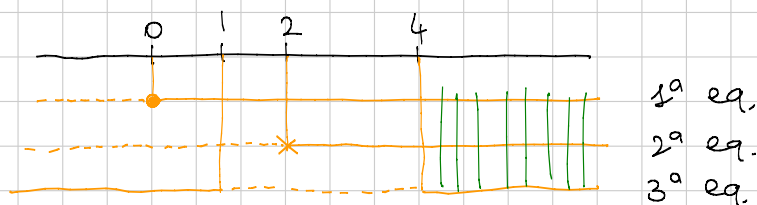
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 80 \end{cases} \quad [-1, 80) \quad -1 \leq x < 80$$

— 0 — 0 —

$$\sqrt{x} < x-2 \quad \begin{cases} x \geq 0 & \text{Esistenza della radice} \\ x-2 > 0 & \text{Terminare a } dx \geq 0 \\ x < (x-2)^2 & \text{Fare i quadrati} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x < x^2 - 4x + 4 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \end{matrix}$$

Valori ESTERNI ad 1, 4



Soluzione: $x > 4 \quad (4, +\infty)$

— 0 — 0 —

$$\sqrt{x+1} > 2x-4 \quad \text{Diventa UNIONE di 2 sistemi}$$

$$\begin{cases} 2x-4 < 0 & \text{dx neg.} \\ x+1 \geq 0 & \text{burocrazia} \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 & \text{Burocrazia} \\ 2x-4 \geq 0 & \text{dx} \geq 0 \\ (x+1) > (2x-4)^2 & \text{Fare i quadr.} \end{cases}$$

Segue dalla 3^a

1^o SISTEMA: $\begin{cases} 2x < 4 \\ x \geq -1 \end{cases} ; \begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$

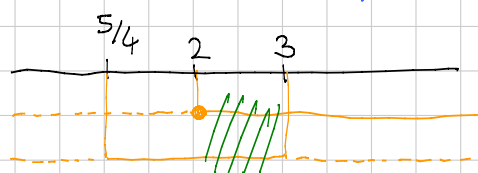
$-1 \leq x < 2$
SOLUZ. 1^o SISTEMA

2^o SISTEMA: $\begin{cases} 2x \geq 4 \\ x+1 > 4x^2-16x+16 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2-17x+15 < 0 \end{cases}$

(1^a)
(2^a)

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289-240}}{8} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{8} = \begin{cases} \frac{17+7}{8} = 3 \\ \frac{17-7}{8} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

VALORI INTERNI



$2 \leq x < 3$
SOLUZ. II SISTEMA

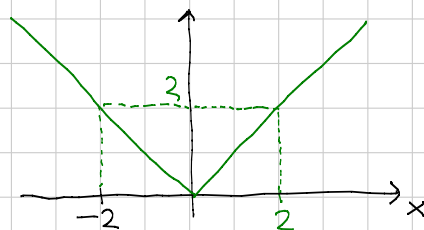
SOLUZ. EQ. INIZ. = UNIONE SOLUZ. SISTEMI = $-1 \leq x < 3$

VALORE ASSOLUTO

Il valore assoluto di un numero è il numero privato del segno

Detto meglio:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0, \text{ cioè se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0, \text{ cioè se } x < -3 \end{cases}$$

$$|x| = 5$$

$$x = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases}$$

$$|x+3| = 5 \quad x+3 = \begin{cases} 5 \\ -5 \end{cases} \quad \begin{array}{ll} x+3=5 & x=2 \\ x+3=-5 & x=-8 \end{array}$$

$$|x^2-1| = 10$$

$$x^2-1 = \begin{cases} 10 \\ -10 \end{cases}; \quad \begin{array}{l} x^2-1=10 \rightarrow x^2=11 \rightarrow x=\pm\sqrt{11} \\ x^2-1=-10 \rightarrow x^2=-9 \rightarrow \text{NULLA} \end{array}$$

In generale un'equazione del tipo

$| \text{Mostro} | = 5$ diventa l'unione di 2 equazioni:

$$\text{Mostro} = 5$$

$$\text{Mostro} = -5$$

Questo discorso vale per equazioni
del tipo $\text{valore assoluto} = \text{numero}$

N.B. $| \text{Mostro} | = -5$ Non ci sono soluzioni perché un val. ass. è sempre ≥ 0 .

— 0 — 0 —

$$|x| < 5$$

$$-5 < x < 5$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ x > -5 \end{cases}$$

$$|x+3| < 5$$

$$\begin{cases} x+3 < 5 \\ x+3 > -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -8 \end{cases}$$

$$-8 < x < 2$$

In generale la disequazione

$| \text{Mostro} | < 8$ diventa il sistema

$$\begin{cases} \text{Mostro} < 8 \\ \text{Mostro} > -8 \end{cases}$$

$$| \text{Mostro} | < -8$$

Impossibile (soluzione: $\emptyset$) perché un val. ass. non può essere neg.

$$| \text{Mostro} | > -8$$

Sempre verificata perché il Mostro abbia senso (cioè è verificata per tutti i valori di x per cui il Mostro è definito)

$$| \sqrt{x-2} - 8 | > -3 \quad \text{Soluzione: } x \geq 2$$

↓ è definito perché la radice abbia senso, cioè per $x-2 \geq 0$

Tutto questo vale quando c'è val. ass. $<$ numero

$$| \text{Mostro} | > 4 \rightsquigarrow$$

$$\text{Mostro} > 4$$

$$\text{Mostro} < -4$$

UNIONE!!!

$$|x+2| > 2x+5 \quad \text{Distinguere i casi}$$

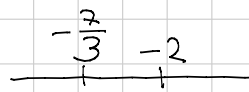
$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 > 2x+5 \end{cases} \quad \text{UNIONE} \quad \begin{cases} x+2 < 0 \\ -x-2 > 2x+5 \end{cases}$$

1° SISTEMA:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < -3 \end{cases} \quad \text{SOLUZIONE: } \emptyset$$

il valore assoluto in questo è l'argomento cambiato di segno

$$2^\circ \text{ SISTEMA: } \begin{cases} x < -2 \\ 3x < -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2 \\ x < -\frac{7}{3} \end{cases}$$



$$\text{SOLUZIONE } 2^\circ \text{ SISTEMA: } x < -\frac{7}{3}$$

$$\text{UNIONE} = x < -\frac{7}{3}$$

$$|x-3| > 2x+4$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 > 2x+4 \end{cases} \quad \text{UNIONE}$$

2° SISTEMA

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ -x+3 > 2x+4 \end{cases}$$

Arg. di 1-1
cambiato di segno

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 > 2x+4 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq 3 \\ x < -7 \end{cases} ; \emptyset$$

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ -x+3 > 2x+4 \end{cases} ; \begin{cases} x < 3 \\ 3x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases} \quad x < -\frac{1}{3}$$

$$|x-1| = -3 \quad \text{Nessuna soluzione}$$

$$|x-8| = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x-8 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x=8$$

$$|x-8| = 3 \rightarrow \begin{cases} x-8=3 \rightarrow x=11 \\ x-8=-3 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+14} = |x+2| \quad \begin{cases} \text{segue dalla 3a} \\ x+14 \geq 0 & \text{Burocrazia della radice} \\ |x+2| \geq 0 & \text{sempre verificata} \\ (x+14) = |x+2|^2 & \text{Fare i quadrati} \end{cases}$$

Tutto si riduce alla 3ª eq.

$$x+14 = x^2 + 4x + 4$$

si risolve...

N.B. $|a|^2 = a^2$ per ogni numero reale a .
IDEM per potenze pari

$$|a|^3 = a^3 \quad \text{solo per } a \geq 0$$

$$|a|^3 = |a^3| \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}$$

$$|x+2| + |x+4| = 6$$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x+2+x+4 = 6 \end{cases} \quad \text{1°} \quad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+4 < 0 \\ x+2-x-4 = 6 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE} \quad \begin{cases} x+2 < 0 \\ x+4 \geq 0 \\ -x-2+x+4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ x+4 < 0 \\ -x-2-x-4 = 6 \end{cases}$$

Occorre risolvere le 4 equazioni controllando che le soluzioni trovate siano nella zona corrispondente

$$x+2+x+4 = 6$$

$$2x+6 = 6$$

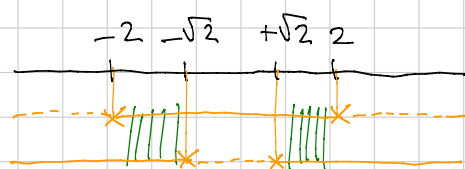
$$x=0 \rightarrow \text{verifica } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{va bene}$$

$$|x^2 - 3| < 1$$

$$|x^2 - 3| < 1 \leadsto \begin{cases} x^2 - 3 < 1 \\ x^2 - 3 > -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 < 0 & 1^\circ \\ x^2 - 2 > 0 & 2^\circ \end{cases}$$

NO!!!!!!!

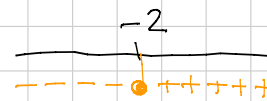
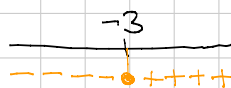
$$\begin{aligned} x^2 &< 4 \\ x &< \pm 2 \\ x^2 &> 2 \\ x &> \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$



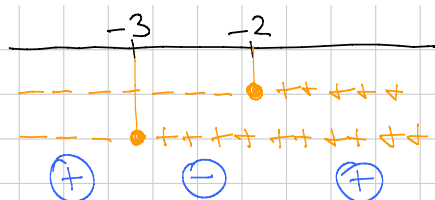
$$(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$$

$$\underbrace{(3^{x+3} - 3)}_{1^\circ \text{ FATT.}} \underbrace{(x+3)}_{2^\circ \text{ FATT.}} \geq 0$$

$$2^\circ \text{ FATT. } x+3$$



$$1^\circ \text{ FATT. } 3^{x+3} - 3 > 0 \quad 3^{x+3} > 3^1 \quad x+3 > 1 \quad x > -2$$



$$1^\circ \text{ FATT.}$$

$$2^\circ \text{ FATT.}$$

Richiedendo ≥ 0 la soluz. è $(-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$

$$\underbrace{(x+4)}_{1^\circ \text{ F.}} \underbrace{\log_2(x+2)}_{2^\circ \text{ F.}} > 0$$

$$1^\circ \text{ Fatt.}$$

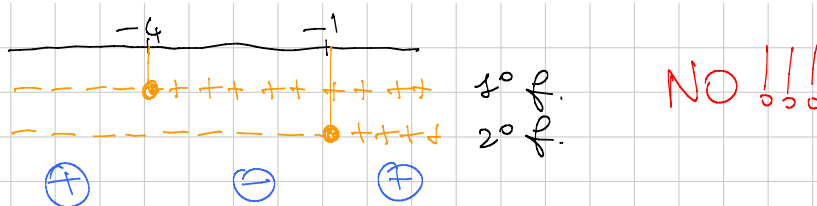


$$2^\circ \text{ Fatt. } \log_2(x+2) > 0 \quad \log_2(x+2) > \log_2 1$$

$$x+2 > 1 \quad x > -1$$



NO!!!



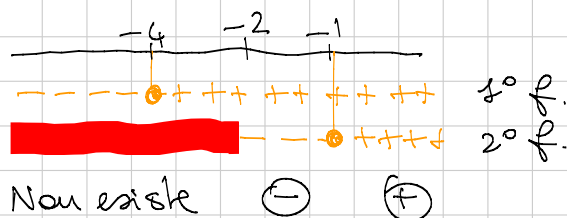
2° fatt. come si deve

$$\log_2(x+2) > 0 \quad x+2 > 1 \quad x > -1$$

come primo ok.

$$\log_2(x+2) < 0 \rightarrow \log_2(x+2) < \log_2 1$$

$$\begin{cases} x+2 < 1 \\ x+2 > 0 \end{cases} \begin{array}{l} \text{togliere i log} \\ \text{burocrazia} \end{array} \begin{cases} x < -1 \\ x > -2 \end{cases}$$



Soluzione: $x > -1$

$$3^x + 9^x > 6$$

$$3^x + 3^{2x} > 6$$

$$3^x = t$$

$$t + t^2 > 6$$

$$t^2 + t - 6 > 0$$

Valori estremi! Radici $t = \sqrt[3]{-3}$
 $\sqrt{2}$

$t < -3$ oppure $t > 2$. Ritorno in x :

$$3^x < -3$$



Nulla, perché

$3^x > 0$ sempre

oppure
UNIONE

$$3^x > 2$$



$$x > \log_3 2$$

$\Rightarrow$ La soluzione della diseq. è $x > \log_3 2$.

TRIGONOMETRIA

Titolo nota

25/09/2007

Angoli e archi

$$OA = 1$$

2 modi per individuare P

- mediante l'angolo $\widehat{AOP}$

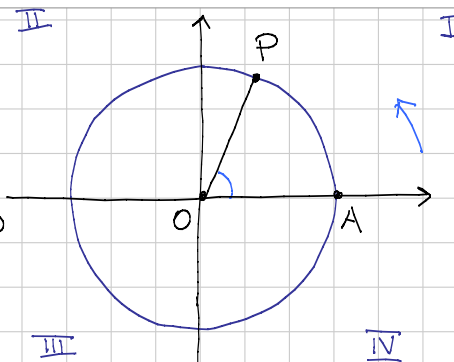
ANGOLI SESSAGESIMALI (GRADI)

- mediante la lunghezza dell'arco AP

RADIANTI

PASSAGGIO GRADI $\leftrightarrow$ RADIANTI

$$360^\circ : 2\pi = \text{misura in gradi} : \text{misura in radianti}$$



Esempi A quanti corrispondono 60° ?

$$360^\circ : 2\pi = 60^\circ : x$$

$$x = \frac{2\pi \cdot 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$

A cosa corrispondono 200° ?

$$360^\circ : 2\pi = 200^\circ : x$$

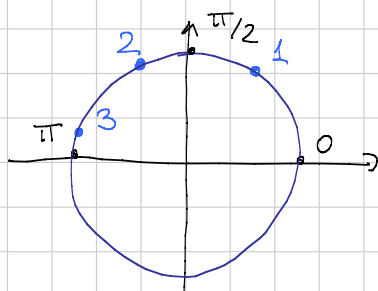
$$x = \frac{2\pi \cdot 200^\circ}{360^\circ} = \frac{10}{9}\pi$$

A cosa corrispondono $\frac{3\pi}{4}$?

$$360^\circ : 2\pi = x : \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{360^\circ \cdot \frac{3\pi}{4}}{2\pi} = 135^\circ$$

Disegnare (+o-) il punto della circ. trigonometrica corrispondente a 2 radianti

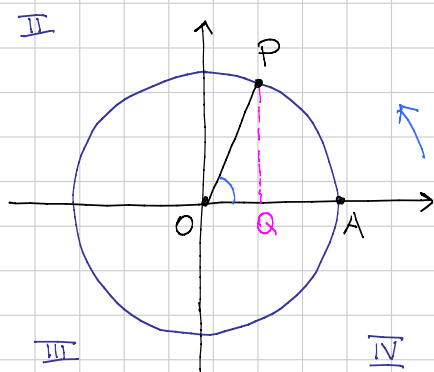


Quanti gradi corrispondono a 1 radiante ?

$$360^\circ : 2\pi = x : 1$$

$$x = \frac{360^\circ}{2\pi} = \text{un po' meno di } 60^\circ$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



Se α indica l'angolo (o l'arco) che individua il punto P, allora le coordinate di P sono

$$(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\left. \begin{array}{l} OQ = \cos \alpha \\ PQ = \sin \alpha \end{array} \right\} \text{intese con il segno}$$

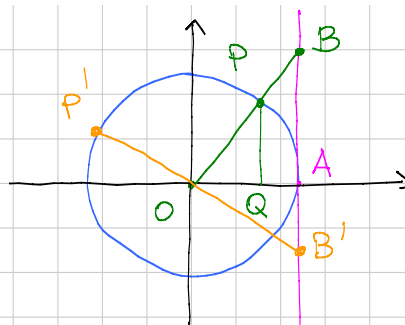
I quadr.	$\cos > 0$	$\sin > 0$
II quadr.	$\cos < 0$	$\sin > 0$
III quadr.	$\cos < 0$	$\sin < 0$
IV quadr.	$\cos > 0$	$\sin < 0$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = AB$$

La tangente è definita per quei valori di α t.c.

$$\cos \alpha \neq 0$$

quindi per $\alpha \neq 90^\circ, 270^\circ$ e analoghi in gradi
 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ e analoghi in radianti



Geometricamente in questi casi la retta OP e la tg. in A alla circ. trigonometrica sono parallele

Il fatto che $\tan \alpha = AB$ si dimostra osservando la similitudine dei triangoli OPQ e OBA

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{AB}{OA} \Rightarrow AB = OA \cdot \frac{PQ}{OQ} = 1 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

ARCHI NOTEVOLI

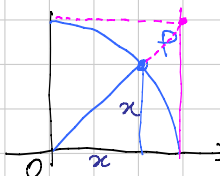
$$0^\circ, 0 \text{ radianti}, \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0^\circ = 0 \\ \tan 0^\circ = 0$$

$$90^\circ, \frac{\pi}{2} \text{ radianti}, \cos 90^\circ = 0 \\ \sin 90^\circ = 1 \\ \tan 90^\circ \text{ non definita}$$

$$180^\circ, \pi \text{ radianti}, \cos 180^\circ = -1, \sin 180^\circ = 0, \tan 180^\circ = 0$$

$$45^\circ, \frac{\pi}{4} \text{ radianti},$$

$\sin$ e $\cos$ sono uguali



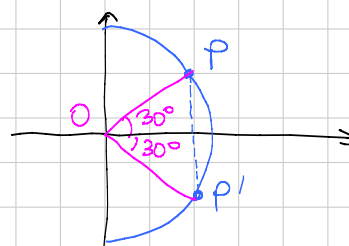
Per il teo di Pitagora $x^2 + x^2 = OP^2 = 1 \quad 2x^2 = 1$
 $x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Ho scelto + perché P è nel I quadrante)

$$45^\circ, \frac{\pi}{4} \text{ radianti, } \sin = \cos = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \tan = 1$$

$$30^\circ, \frac{\pi}{6} \text{ radianti, } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

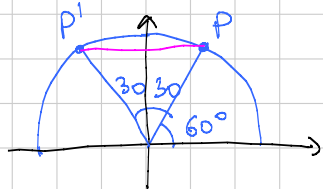


Il triangolo OPP' è isoscele sulla base PP' e ha l'angolo al vertice di 60° . Ne segue che tutti gli angoli sono di 60° , dunque è equilatero.

A questo p.to $\sin 30^\circ =$ metà del lato $PP' = \frac{1}{2}$

Il $\cos 30^\circ$ si ricava con teorema di Pitagora

$$60^\circ, \frac{\pi}{3} \text{ radianti, } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$



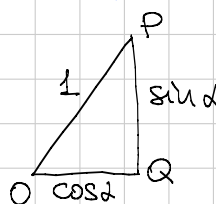
$$120^\circ, \frac{2\pi}{3} \text{ radianti, } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

— 0 — 0 —

RELAZIONE FONDAMENTALE

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

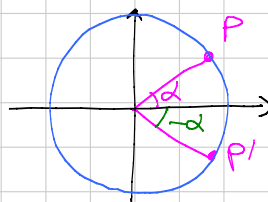
TEOREMA DI PITAGORA



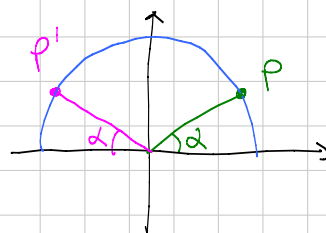
ARCHI ASSOCIATI

Dato un arco α , quali sono le funzioni trigonometriche di $\pi + \alpha$, $\pi - \alpha$, $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$

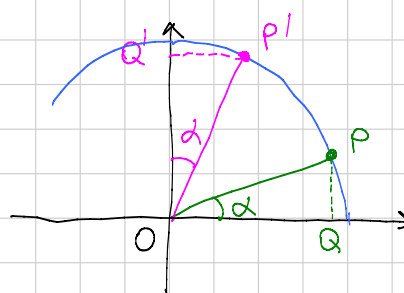


$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha\end{aligned}$$



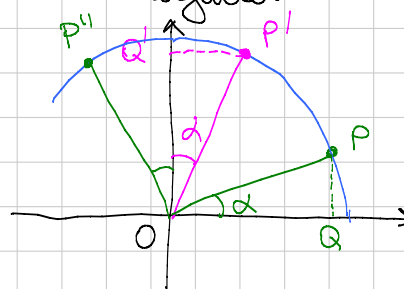
$$\begin{aligned}\cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \frac{1}{\tan \alpha}\end{aligned}$$



OPQ e $OP'Q'$ sono uguali

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= +\cos \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\frac{1}{\tan \alpha}\end{aligned}$$



FORMULE DI ADDIZIONE

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (4)$$

CASO $\alpha = \beta \rightarrow$ DUPLICAZIONE

USO (3)

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) \stackrel{\downarrow}{=} \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \end{aligned}$$

FORMULE PRODOTTO $\rightarrow$ SOMMA

$$[5] \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (1) + (2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (2) - (1)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

FORMULE SOMMA $\rightarrow$ PRODOTTO

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Dalla [5] abbiamo che

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\frac{x+y}{2}$ $\frac{x-y}{2}$
 x y

$$\alpha + \beta = x \quad \text{Somma: } 2\alpha = x + y \quad \alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\alpha - \beta = y \quad \text{Sottraggio: } 2\beta = x - y \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

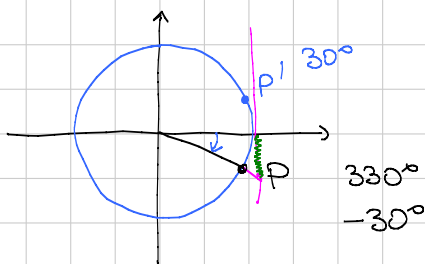
$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$330^\circ$$

$$\begin{aligned}\sin(330^\circ) &= \sin(-30^\circ) \\ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(330^\circ) &= \cos(-30^\circ) \\ &= \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\tan(330^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$$

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \text{Formula addizione}$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(75^\circ) = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin(15^\circ)$$

↑ Angoli associati $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin(75^\circ) = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos(15^\circ)$$

$$\cos(-75^\circ) = \cos(75^\circ)$$

$$\sin(-75^\circ) = -\sin(75^\circ)$$

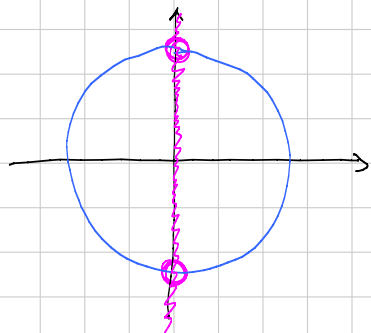
EQUAZIONI

- ① Trovare le soluzioni di $\cos x = 0$ nell'intervallo $[0, 3\pi]$

Guardare il cerchio !!!

Trovare i p.ti della
circ. trigo. con coord. $x=0$

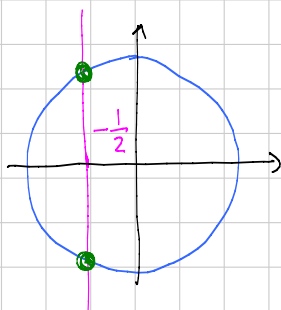
1.5
giri



3 soluzioni

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

- ② $\cos x = -\frac{1}{2}$
in $[0, 2\pi]$

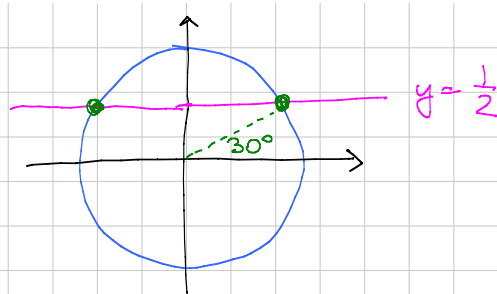


2 soluzioni:

$$x = \frac{2\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$

- ③ $\sin x = \frac{1}{2}$ in $[0, 2\pi]$

coordinata
y del punto
 $= \frac{1}{2}$

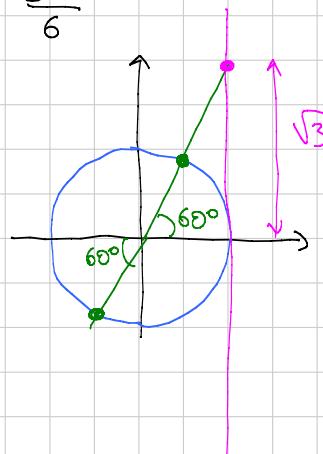


2 soluzioni: $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$

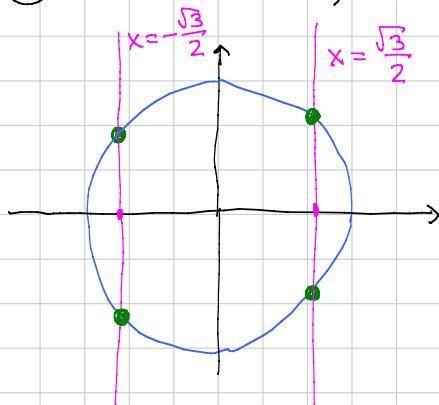
- ④ $\tan x = \sqrt{3}$ in $[0, 2\pi]$

2 soluzioni:

$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{3}$$



⑤ $4 \cos^2 x = 3$; $\cos^2 x = \frac{3}{4}$; $\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$



4 soluzioni:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

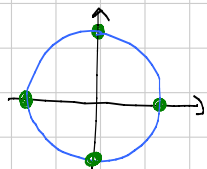
$\swarrow$ $\searrow$
 $\pi + \frac{\pi}{6}$ $2\pi - \frac{\pi}{6}$

⑥ $\cos^3 x = \cos x$ $\cos^2 x = 1$ NO!!!! $\cos^3 x - \cos x = 0$

$\cos x (\cos^2 x - 1) = 0 \rightarrow \cos x = 0$

$\rightarrow \cos^2 x - 1 = 0 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$

$\cos x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ -1 \end{cases}$



In $[0, 2\pi]$ ci sono 5 soluzioni:

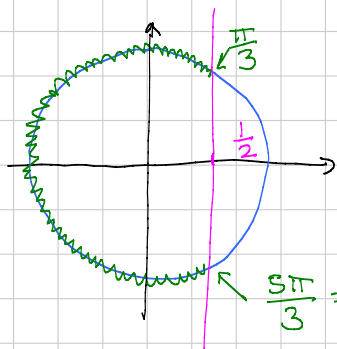
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

DISEQUAZIONI

Guardare il cerchio!!!!

① $2 \cos x < 1$ in $[0, 2\pi]$

$\cos x < \frac{1}{2}$



$\downarrow$
Cercare i p.ti della circ. trig.
con coord. x minore di $\frac{1}{2}$

Soluzioni della diseq. in $[0, 2\pi]$:

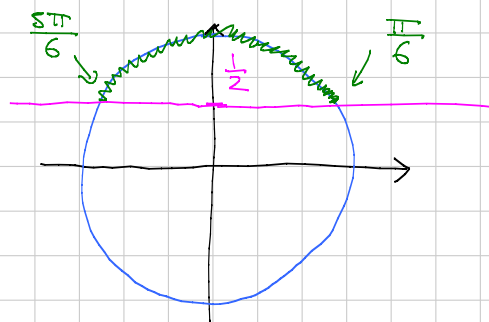
$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right)$

② $2 \sin x > 1$ in $[0, 2\pi]$

$\sin x > \frac{1}{2}$

coordinata y maggiore di $\frac{1}{2}$

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right)$

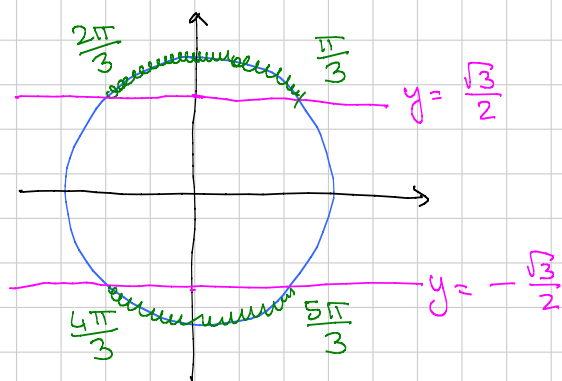


$$\textcircled{3} \quad 4 \sin^2 x > 3 \quad \text{in } [0, 2\pi] \quad \sin^2 x > \frac{3}{4}$$

$$t = \sin x \quad t^2 > \frac{3}{4}, \quad t^2 - \frac{3}{4} > 0 \rightarrow \text{VALORI ESTERNI}$$

Valori esterni :

$$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oppure}$$
$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Equazioni e disequazioni trigonometriche

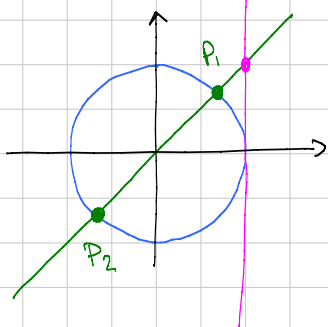
Titolo nota

26/09/2007

$$\cos x = \sin x$$

$$1 = \tan x$$

Divido per $\cos x$ (dopo aver osservato che non può essere $\cos x = \sin x = 0$)



In $[0, 2\pi]$ le soluzioni sono 2

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Su tutto $\mathbb{R}$ le soluzioni sarebbero

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow P_1 \text{ nei vari giri}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \rightarrow P_2 \text{ nei vari giri}$$

Più brevemente

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow \begin{cases} P_1 \text{ per } k \text{ pari} \\ P_2 \text{ per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sin x \cdot \cos x = 1$$

$$2 \sin x \cdot \cos x = 2$$

$$\sin(2x) = 2 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

$$\sin(2x) = 2$$

$$2 \cos^2 x + 5 \sin x = 4; \quad 2(1 - \sin^2 x) + 5 \sin x = 4$$

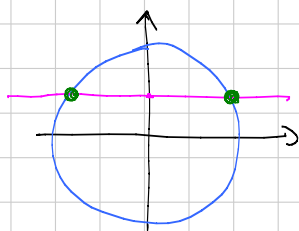
$$2 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 4 = 0; \quad 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$$

$$\sin x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

↑ Eq. di II grado in $\sin x$

$$\sin x = 2 \rightarrow \text{Nulla}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$



In $[0, 2\pi]$ ci sono 2 soluz.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

(se voglio soluzioni in $[-2\pi, 0]$ prendo $k = -1$)

$$3 \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2(2x)$$

$$3 \sin^4 x + \cos^4 x = (2 \sin x \cos x)^2 = 4 \sin^2 x \cos^2 x$$

Divido per $\cos^4 x$

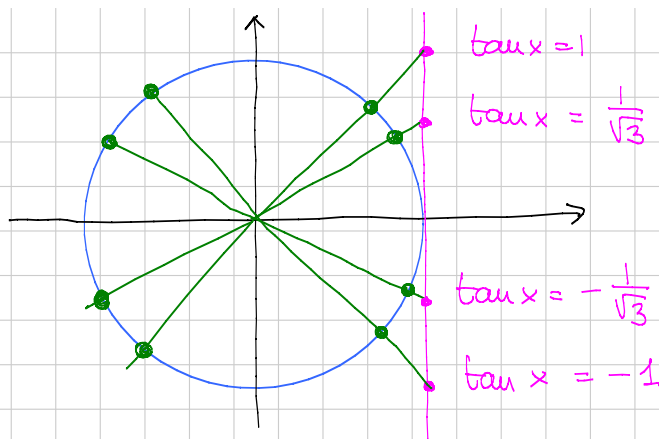
$$3 \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 = 4 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \quad ; \quad 3 \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 1 = 0$$

↓
Equazione biquadratica
in $\tan^2 x$

$$t = \tan^2 x \quad 3t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$\tan^2 x = 1 \rightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Tra 0 e 2π ci sono 8 soluzioni

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

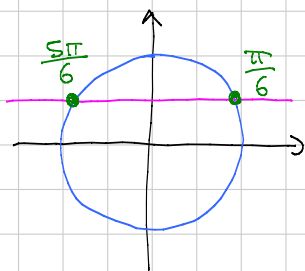
$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

(anche con $k=1$ stanno
tra 0 e 2π)

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

Risolvere $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ in $[0, 2\pi]$



$$2x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{12}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$$

ASSOLUTAMENTE
NO !!!!

Cerco tutte le soluzioni (non solo quelle in $[0, 2\pi]$)

Come prima;

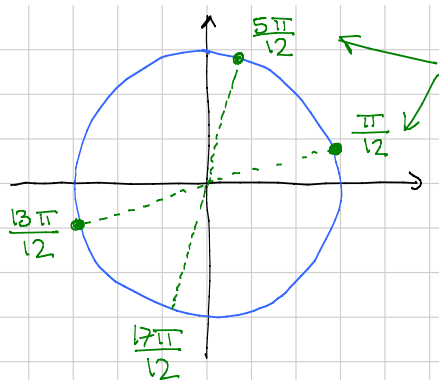
$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Per quali valori di k siamo fra 0 e 2π ?

$k=0$ (ritrovo $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$); $k=1$ (trovo $x = \frac{13\pi}{12}$, $x = \frac{17\pi}{12}$)

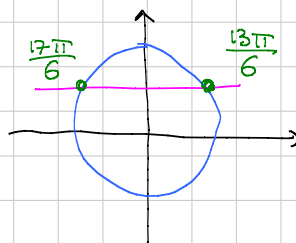
Per $k \geq 2$ diventiamo $> 2\pi$



sono la metà di $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{13\pi}{12}$ e $\frac{17\pi}{12}$ sono la metà di

$\frac{13\pi}{6}$ e $\frac{17\pi}{6}$



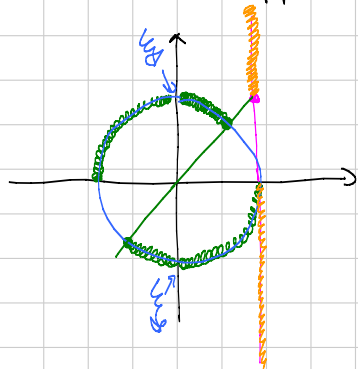
$$\tan^2 x \geq \tan x \quad \text{Da NON FARE: dividere per } \tan x$$

$$\tan^2 x - \tan x \geq 0 \quad \text{Disuguaglianza di II grado in } \tan x$$

→ VALORI ESTERNI

$$t^2 - t \geq 0 \quad \text{radici } t=0, t=1$$

$$\tan x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad \tan x \geq 1$$



Soluzioni in $[0, 2\pi]$

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\tan x \geq \sin(2x) ; \quad \frac{\sin x}{\cos x} \geq 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2 \sin x \cos x \geq 0 ; \quad \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2 \cos x \right) \geq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 - 2 \cos^2 x}{\cos x} \geq 0$$

$\begin{matrix} 1^{\circ} F & 3^{\circ} F \\ \boxed{\sin x} & \boxed{1 - 2 \cos^2 x} \\ & \boxed{\cos x} \\ & 2^{\circ} F \end{matrix}$

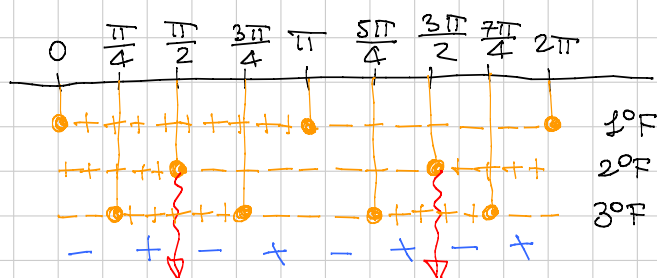
Dove è + il 3° F?

$$1 - 2 \cos^2 x \geq 0$$

$$2 \cos^2 x - 1 \leq 0$$

Valori interni all'intervallo delle radici

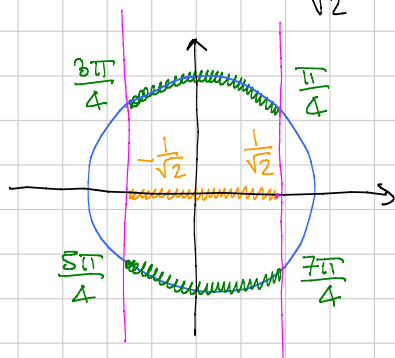
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$



SOLUZIONE FINALE:

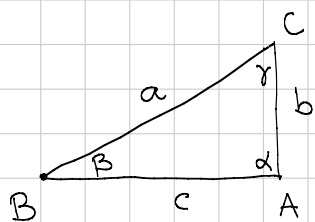
$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

Per risolvere $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ guardo il cerchio:



RISOLUZIONE TRIANGOLI RETTANGOLI

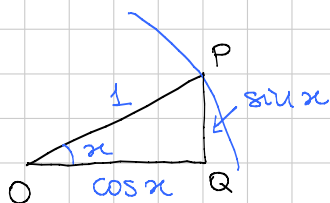
Risolvere un triangolo: noti alcuni elementi, determinare i restanti



Nel triangolo rettangolo $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Pitagora: $a^2 = b^2 + c^2$

↑
Noti 2 lati, si trova il terzo



$$AB = BC \cdot \cos \beta$$

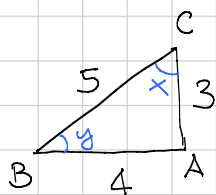
$$AC = BC \cdot \sin \beta$$

Formalmente si dimostrano con la similitudine tra ABC e QOP

$$AB = BC \cdot \sin \gamma$$

$$AC = BC \cdot \cos \gamma$$

Esercizio



$$\cos x = ?$$

Con Pitagora trovo l'ipotenusa $\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$$AC = BC \cdot \cos x$$

$$3 = 5 \cdot \cos x \leadsto \cos x = \frac{3}{5}$$

$$AC = BC \cdot \sin y$$

$$3 = 5 \cdot \sin y \leadsto \sin y = \frac{3}{5}$$

Non deve stupire
perché $y = \frac{\pi}{2} - x$
ma allora

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

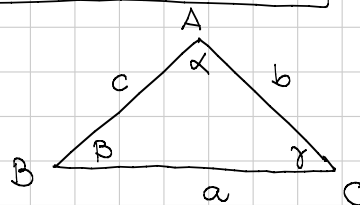
$$\rightarrow = \cos x$$

archi
associati

RISOLUZIONE TRIANGOLI IN GENERALE

4 Strumenti Fondamentali

1°: FORMULA TRIGONOMETRICA
PER L'AREA



$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Area}}}{S} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

2°: FORMULA DI ERONE PER L'AREA

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} =$$

= semiperimetro

3°: TEOREMA DI CARNOT

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

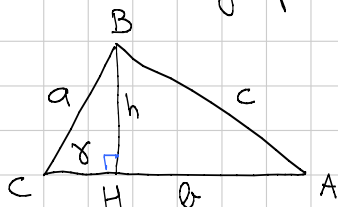
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

4°: TEOREMA DEI SENI

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Raggio circonferenza
circoscritta.

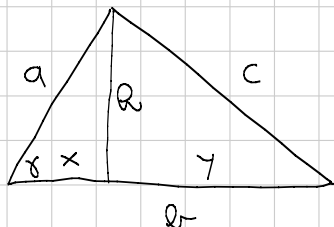
Formula trig per l'area



$$S = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} b a \sin \alpha$$

$$h = a \sin \alpha \quad (\text{nel triangolo rett. CBH})$$

Carnot: conosco a, b, γ . Voglio trovare c



$$R = a \cdot \sin \gamma$$

$$x = a \cdot \cos \gamma$$

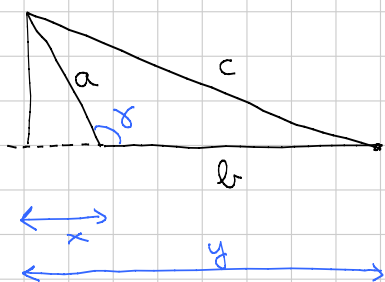
$$y = b - x = b - a \cos \gamma$$

$$c^2 = R^2 + y^2 = (a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2$$

↑
Pitagora

$$= a^2 \sin^2 \gamma + b^2 + a^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma$$

$$= a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



È ancora vero che $y = b - x$?

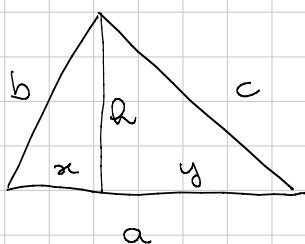
Sì!! Perché in questo caso

$$x = a \cos \gamma \text{ è NEGATIVO!!!}$$

< 0 perché $\gamma > 90^\circ$

ERONE Note le lunghezze dei lati, trovare l'area

Nota R , l'area si trova facilmente



Scrivo un sistema per calcolare R, x, y
3 incognite, quindi servono 3 equaz.

$$\begin{cases} x^2 + R^2 = b^2 & \text{Pitagora in } \triangle \\ y^2 + R^2 = c^2 & \text{Pitagora in } \triangle \\ x + y = a & \end{cases}$$

Non resta che risolvere il sistema per trovare R

$$1^a \text{ eq} - 2^a \text{ eq.} : x^2 - y^2 = b^2 - c^2$$

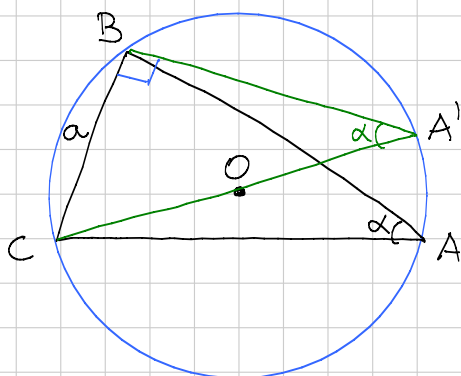
$$\underbrace{(x+y)}_a (x-y) = b^2 - c^2$$

$$\begin{cases} x - y = \frac{b^2 - c^2}{a} \\ x + y = a \end{cases}$$

→ trovo x e y → trovo R usando 1^a o 2^a equazione.

Teo. seni

Basta dimostrare che $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$



$\widehat{BA'C} = \alpha$ perchè insiste sull'arco BC

CA' è un diametro della circonferenza, quindi $CA' = 2R$

L'angolo $\widehat{CBA'} = 90^\circ$ perchè insiste su un diametro

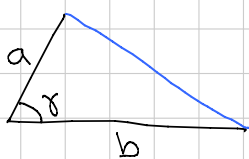
Il triangolo CBA' è un triangolo rettangolo, dunque

cateto = ipotenusa $\cdot$ sin (angolo opposto)

$$a = 2R \cdot \sin \alpha, \text{ cioè } \frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

COME RISOLVERE UN TRIANGOLO

1° CASO Conosco 2 lati e l'angolo compreso



- trovo c usando CARNOT
- per trovare i restanti 2 angoli abbiamo 2 possibilità

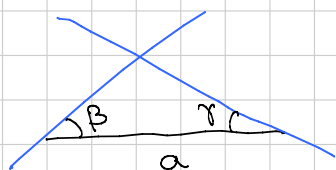
* usare il teo dei seni

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

□ Note

* usare Carnot: noti i lati si trovano i coseni degli angoli

2° caso Noti 1 lato e i 2 angoli adiacenti



* trovo l'angolo α per differenza

$$\alpha = \pi - \beta - \gamma$$

* trovo i restanti lati usando il teorema dei seni

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

□ Note

Nota bene: $\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma)$

$$\sin \alpha = \sin (\pi - (\beta + \gamma)) = \sin (\beta + \gamma)$$



Uso $\sin (\pi - x) = \sin x$

3° caso Noti i 3 lati

* prima possibilità: carnot e trovo gli angoli

* seconda possibilità: Erone e trovo l'area, poi usando la formula trigo x l'area trovo i sin dei vari angoli

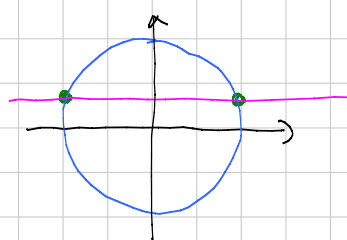
— o — o —

Volendo calcolare l'angolo α , è meglio conoscere

$\sin \alpha$ o $\cos \alpha$?

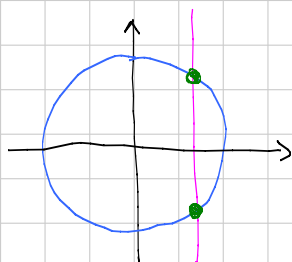
↓
MOLTO MEGLIO !!!

Nota $\sin \alpha$, quanti sono gli angoli corrispondenti ?



Ci sono 2 angoli che hanno lo stesso seno

ENTRAMBE SONO VALORI
AMMISSIBILI (UNA È $< 90^\circ$, l'altra $> 90^\circ$)



Ci sono 2 angoli che hanno lo stesso cos.

SOLO UNO PERÒ È POSITIVO

GEOMETRIA ANALITICA

Titolo nota

27/09/2007

Piano cartesiano

ORDINATA

Ogni coppia di numeri reali

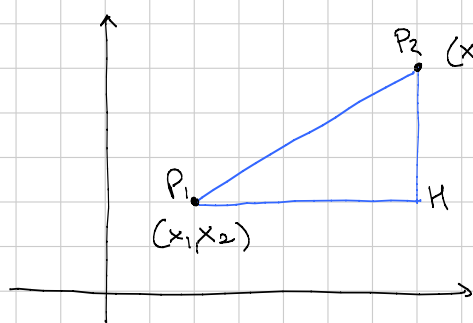
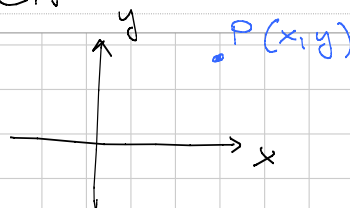
Individua UNIVOCAMENTE un punto del piano

Coppia ordinata vuol dire che $(3, 2) \neq (2, 3)$

DISTANZA TRA 2 PUNTI

$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$$(P_1P_2)^2 = P_1H^2 + P_2H^2$$

Pitagora

$$P_1H = |x_2 - x_1|$$

$$P_2H = |y_2 - y_1|$$

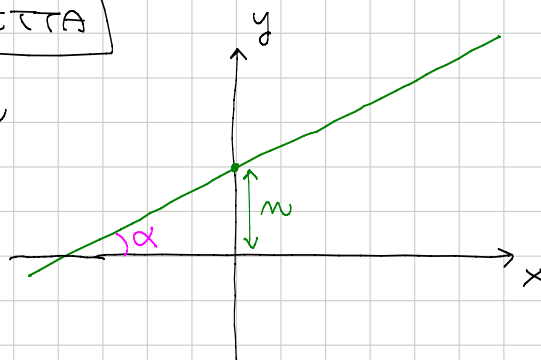
EQUAZIONE DELLA RETTA

1° modo:

$$y = mx + n$$

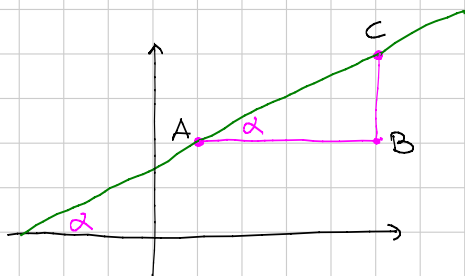
COEFF.
ANGOLARE

$$m = \tan \alpha$$



$$m \begin{cases} m > 0 \\ m = 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

+ m cresce, più la retta è pendente



$$\tan \alpha = \frac{CB}{AB}$$

Per i teo. su Δ rett.

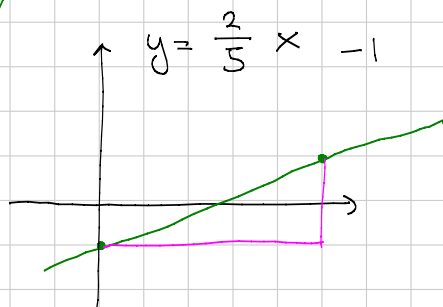
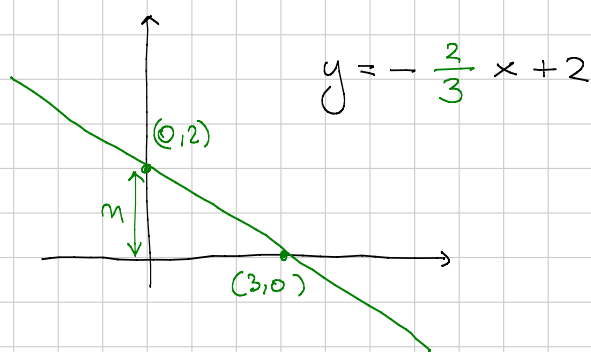
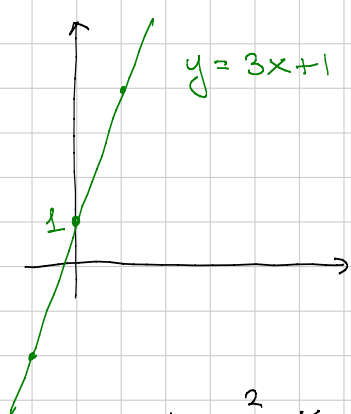
$$CB = AC \cdot \sin \alpha$$

$$AB = AC \cdot \cos \alpha$$

dividendolo si trova $\tan \alpha$

nella figura

$$m = \tan \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Cerco la retta che passa per $(0, -1)$ e per $(5, 1)$.

La retta avrà eq. $y = mx + n$

$$\begin{cases} -1 = m \cdot 0 + n \rightarrow \text{passare per } (0, -1) \\ 1 = m \cdot 5 + n \rightarrow \text{passare per } (5, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -1 \\ 5m + n = 1 \end{cases}$$

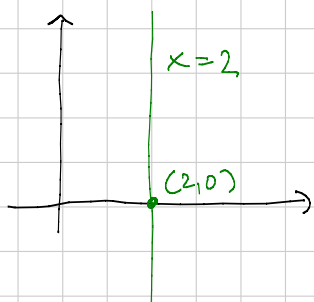
$$\rightarrow 5m - 1 = 1 \rightarrow 5m = 2 \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

Commenti sul primo modo:

2 rette diverse hanno m ed n diversi?

Detto altrimenti: m ed n determinano univocamente la retta? SÌ

Tutte le rette si scrivono nella forma $y = mx + n$? NO!
Mancano le rette parallele all'asse y .



2° modo $ax + by + c = 0$

Vantaggio: così si scrivono tutte le rette, comprese quelle // asse y .

Svantaggio: ci sono infinite equazioni che descrivono la stessa retta

$$(2x + 3y - 5 = 0, 4x + 6y - 10 = 0, -2x - 3y + 5 = 0)$$

Come si passa da un modo all'altro

$$y = 2x + 5 \quad \rightsquigarrow \quad y - 2x - 5 = 0$$

1° modo

2° modo

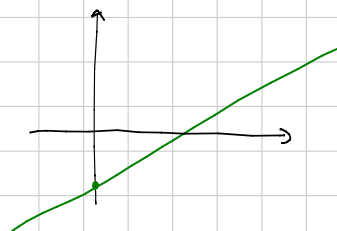
$$3y - 2x + 7 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

2° modo

1° modo

RICAVO y

Si può ricavare y ($\Leftrightarrow b \neq 0$)

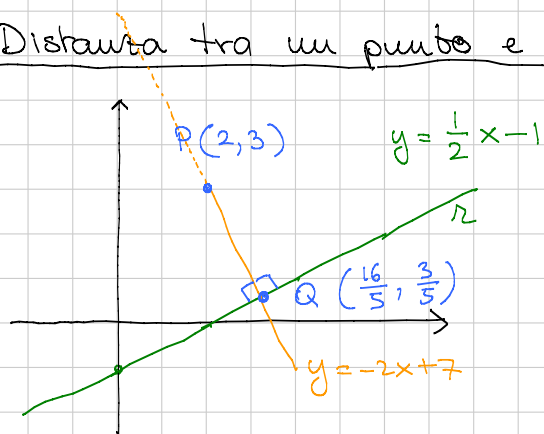


$$m_2 = \tan \alpha_2 = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\frac{1}{m_1}$$

↑
Archi associati

Intersezione fra 2 rette $\rightarrow$ sistema

Distanza fra un punto e 1 retta



Piano!

- ① * scrivere l'eq. della retta $\perp$ ad r passante per P
- ② * trovare Q intersecando le 2 rette
- ③ * fare la distanza fra P e Q

① La retta per $P \perp$ ad r avrà equazione $y = mx + n$

dove $m = -2$ (cioè $-\frac{1}{\text{coeff. ang. retta } r}$)

$$y = -2x + n$$

Per trovare n sostituisco P

$$3 = -2 \cdot 2 + n$$

$$n = 7$$

$$y = -2x + 7$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -2x + 7 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = -2x + 7 ; x - 2 = -4x + 14$$

$$5x = 16$$

$$x = \frac{16}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$Q\left(\frac{16}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\textcircled{3} \text{ dist}(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{16}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 3\right)^2} = \text{conto} \dots$$

Formula generale: dato un punto $P(x_0, y_0)$ ed una retta r di eq. $ax + by + c = 0$ (2° modo)

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nell'esempio $P = (2, 3)$ r $y = \frac{1}{2}x - 1$

↓ 2° modo

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2 - 2 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$2y = x - 2$$

$$x - 2y - 2 = 0$$

Controllare che venga lo stesso anche con il primo procedimento!!!

CIRCONFERENZA

La circonferenza con centro in (x_0, y_0) e raggio $R > 0$ è l'insieme dei punti (x, y) del piano tali che la distanza tra (x, y) e (x_0, y_0) è R .

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

↑
Distanza tra (x, y) e (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 + y^2 - 2y_0y + y_0^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Data l'eq. (nella forma con a, b, c), trovare centro e raggio.

Confrontando le espressioni abbiamo che

$$\begin{array}{l} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Noti } a \text{ e } b, \text{ il centro si} \\ \text{trova subito} \end{array} \right\}$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2 \left. \begin{array}{l} \text{noto } c, x_0, y_0, \text{ ho che } R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c \end{array} \right\}$$

Esempio 1 $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 0$ $a = -3, b = 2, c = 0$

$$\begin{array}{l} a = -2x_0 \\ -3 = -2x_0 \end{array} \rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \quad ; \quad \begin{array}{l} b = -2y_0 \\ 2 = -2y_0 \end{array} \rightarrow y_0 = -1$$

Centro: $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$ $R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$

$$= \frac{9}{4} + 1 - 0 = \frac{13}{4} \rightarrow R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Esempio 2 $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$

Dividere per 3 per partire con $x^2 + y^2$!!!!

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{5}{3} = 0 \quad a = -\frac{2}{3}; b = \frac{4}{3}, c = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{array}{l} a = -2x_0 \\ -\frac{2}{3} = -2x_0 \end{array} \rightarrow x_0 = \frac{1}{3} \quad ; \quad \begin{array}{l} b = -2y_0 \\ \frac{4}{3} = -2y_0 \end{array} \rightarrow y_0 = -\frac{2}{3}$$

Centro: $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ $R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{3} = \frac{20}{9}$$

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{5}$$

Esempio 3 $x^2 + y^2 + 2x + 7 = 0$ $a=2, b=0, c=7$

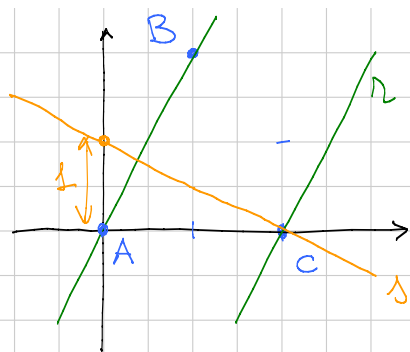
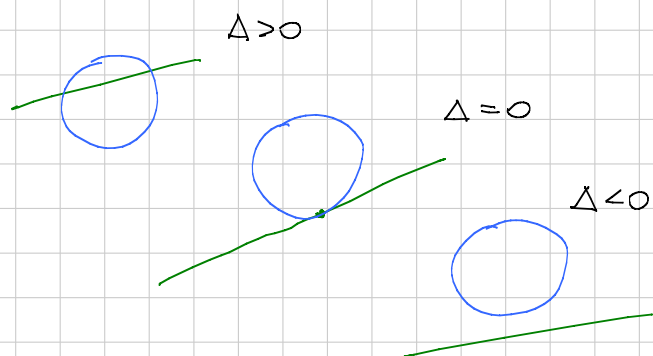
$x_0 = -1, y_0 = 0$ Centro: $(-1, 0)$ **CENTRO DI NULLA!!!**

$R^2 = x_0^2 + y_0^2 - c = 1 + 0 - 7 = -6$ $R^2 = -6$

Non è l'equazione di una circonferenza

Se interseco una circ. con una retta faccio il sistema
il quale può avere

- 2 soluzioni
- 1 soluzione
- 0 soluzioni



$A(0,0)$ $B(1,2)$ $C(2,0)$

r = retta per C $\parallel$ retta AB

coeff. ang. retta $AB = 2$

retta AB : $y = 2x$

Retta r : $y = 2x + n$
perché $\parallel$ ad AB

Impiego di passare per C

$0 = 2 \cdot 2 + n \rightarrow n = -4$

r : $y = 2x - 4$

s = retta per C $\perp$ ad AB

$y = -\frac{1}{2}x + n$

Impiego di passare per C

$0 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + n \rightarrow n = 1$

s : $y = -\frac{1}{2}x + 1$

$$\text{dist}(C, \text{retta AB}) \quad y=2x \quad y-2x=0 \quad C(2,0)$$

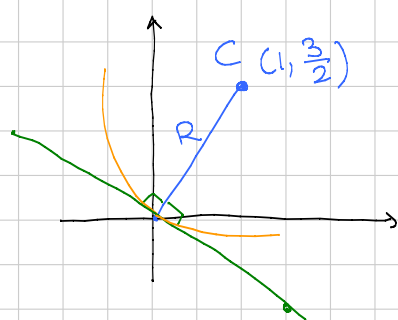
$$\frac{|0-2\cdot 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Circonf.} \quad x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0 \quad a=-2 \quad b=-3 \quad c=0$$

$$\begin{aligned} \text{Centro: } a &= -2x_0 \\ -2 &= -2x_0 \\ x_0 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= -2y_0 \\ -3 &= -2y_0 \\ y_0 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Centro: } (1, \frac{3}{2})$$



La circ. data passa per l'origine
(basta sostituire (0,0))

R = distanza di C dall'origine

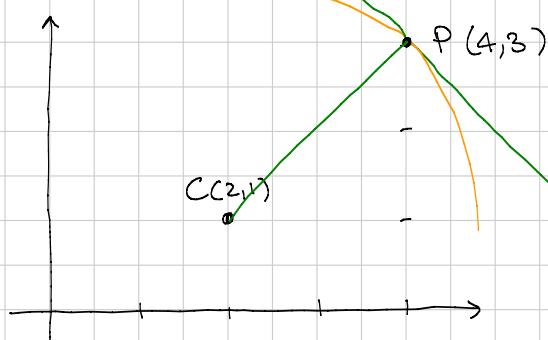
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

La circ. è tangente alla retta $2x+3y=0$. In quale punto?
Basta fare il sistema e si trova $P(0,0)$

$$2x+3y=0 \quad y = -\frac{2}{3}x$$

Centro in $C(2,1)$ e passa per $(4,3)=P$

Retta tg. in P alla circ. è la retta che passa per P
ed è $\perp$ alla retta CP



Coeff. angolare retta CP
è 1

$\Rightarrow$ Coeff. ang. retta tg è
 $-\frac{1}{1} = -1$

Retta tg. sarà del tipo $y = -x + n$

n si determina imponendo di passare per P.

$$ax + 3y + 2 = 0 \quad \text{passa per il punto } (1, 1)$$

$$a + 3 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -5$$

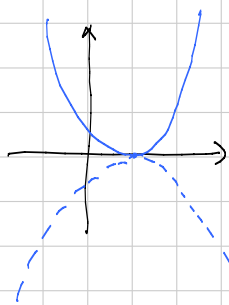
È parallela alla retta $y = 2x \Leftrightarrow$ coeff. ang. $= 2$

$$y = -\frac{a}{3}x - \frac{2}{3} \quad -\frac{a}{3} = 2 \rightarrow a = -6$$

È $\perp$ alla retta $y = 2x \Leftrightarrow$ coeff. ang. $= -\frac{1}{2}$

$$-\frac{a}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

La parabola $y = ax^2 + ax + 1$ tangente all'asse x



$\Leftrightarrow$ l'equazione $ax^2 + ax + 1 = 0$ ha una sola soluzione

$$\Leftrightarrow \Delta = 0$$

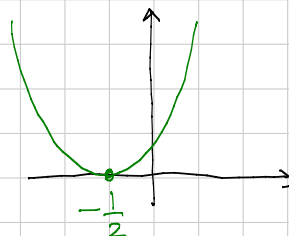
$$\Leftrightarrow a^2 - 4a = 0$$

$$a = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

No perché
per $a = 0$ NON
è una parabola

Per $a = 4$ ottengo la parabola

$$y = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$



Per quali a la retta $ax + 3y + 2$ è tangente alla parabola
 $y = x^2 - 10$

Metto a sistema e impongo sol. unica

$$\begin{cases} ax + 3y + 2 = 0 \\ y = x^2 - 10 \end{cases} \quad \begin{aligned} ax + 3x^2 - 30 + 2 &= 0 \\ 3x^2 + ax - 28 &= 0 \end{aligned}$$

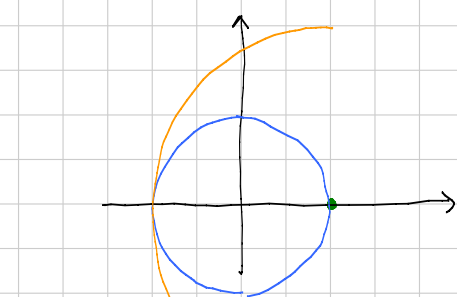
$$\Delta = 0 \quad a^2 + 3 \cdot 28 \cdot 4 = 0 \quad \text{IMPOSSIBILE} \rightarrow \text{per nessun valore di } a$$

— 0 — 0 —

Le circonferenze $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 2x - a = 0$ sono tang.

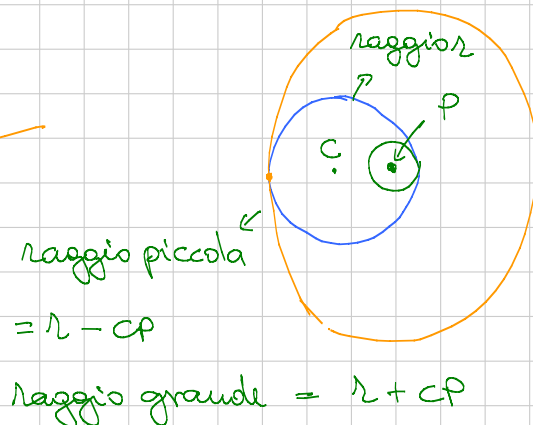
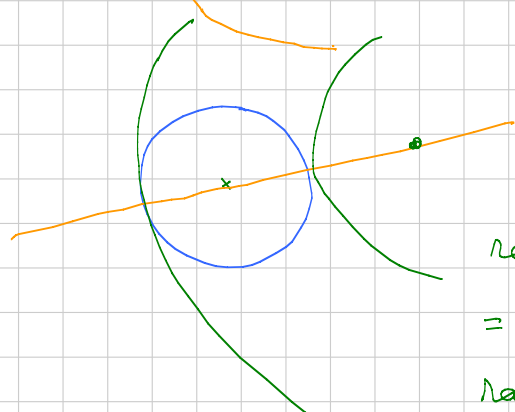
centro $(0,0)$
e raggio 1

centro in $(1,0)$
e raggio dipendente
da a

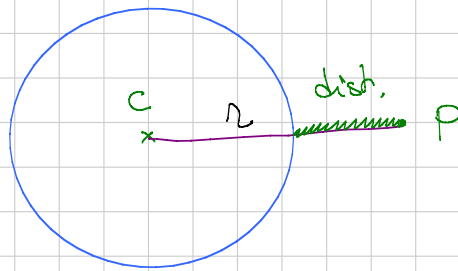


Non possono mai essere tangenti!!!!
NO!!

Possano essere tangenti se il
raggio è 2



La distanza tra $(3, -1)$ e la circ. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = a$ è 2

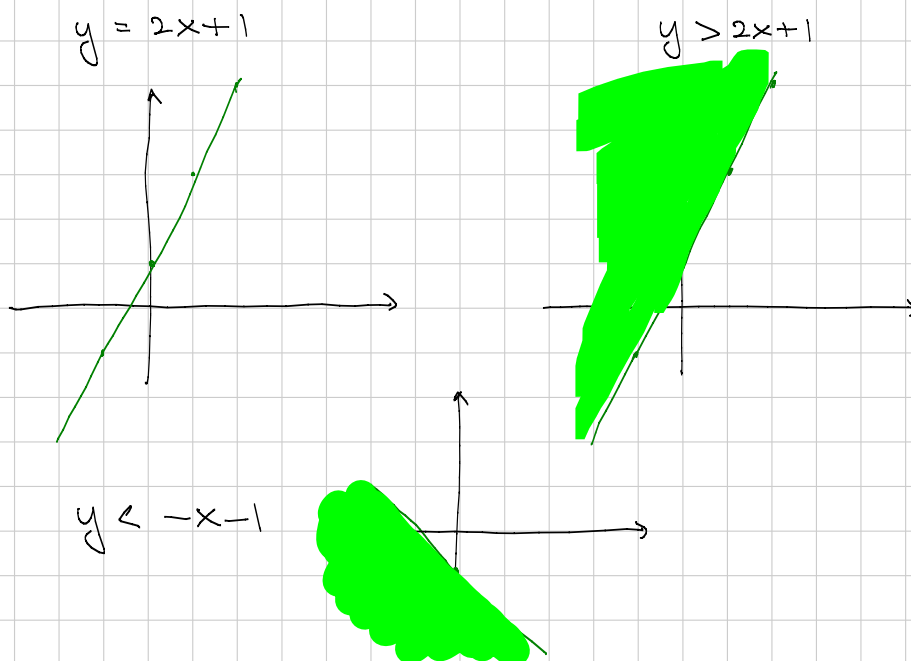


Distanza di P dalla
circonferenza =
 $= CP - \text{raggio}$

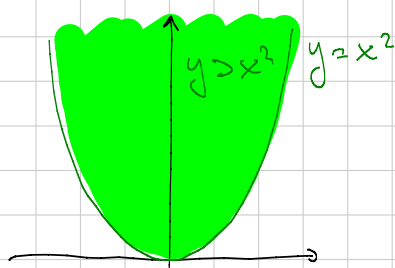
INSIEMI DEL PIANO

Titolo nota

28/09/2007

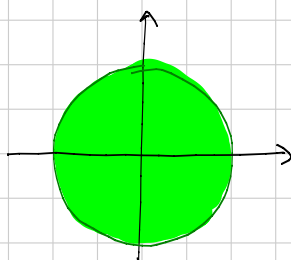


$$y \geq x^2$$



$$x^2 + y^2 \leq 1$$

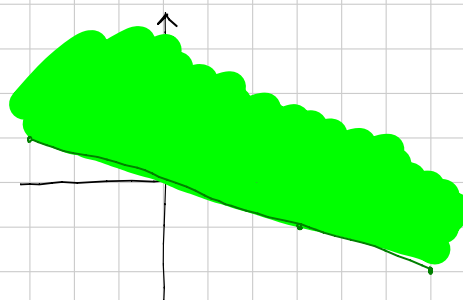
↑
Distanza dal
centro ≤ 1



$$x + 3y > 0$$

$$3y > -x$$

$$y > -\frac{x}{3}$$



Modo più preciso di scrivere

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3y+x > 0\}$$

parte
comune

tutte le relazioni che devono
soddisfare

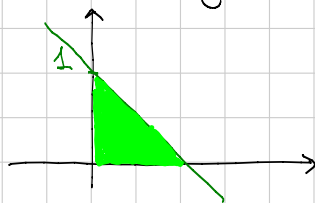
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

3 relazioni

(devono essere soddisfatte tutte)

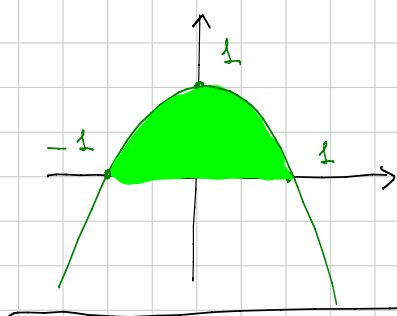
$x \geq 0, y \geq 0 \leadsto$ I quadrante

$x+y \leq 1 \leadsto y \leq 1-x \leadsto$ sotto la retta $y = 1-x$



$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1-x^2\}$$

$y \geq 0 \leadsto$ I e II quadrante
 $y \leq 1-x^2 \leadsto$ sotto la parabola
 $y = 1-x^2$



$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 4\}$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$x = -2$$

$$x = 2$$

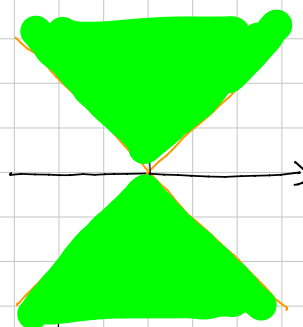
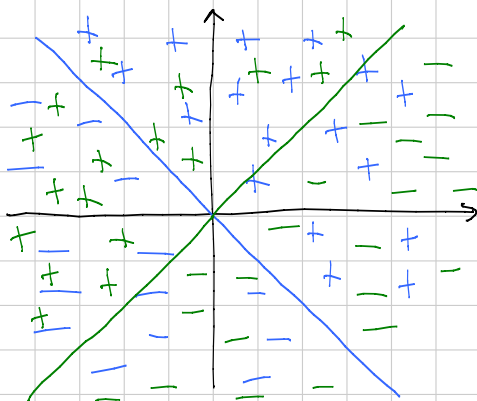
$$-2$$

$$2$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 \geq 0\}$$

$$(y+x)(y-x) \geq 0$$

1° FATT. 2° FATT.



1° FATT.

$$y+x > 0 \text{ dove } y > -x$$

$$y+x < 0 \text{ dove } y < -x$$

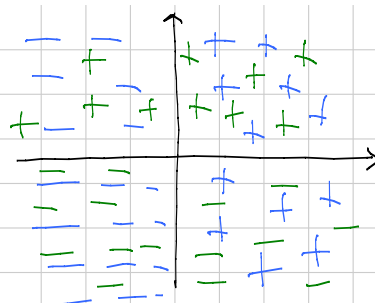
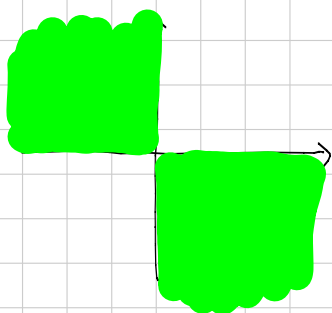
2° FATT.

$$y-x > 0 \text{ dove } y > x$$

$$y-x < 0 \text{ dove } y < x$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$$

1° FATT. 2° FATT.



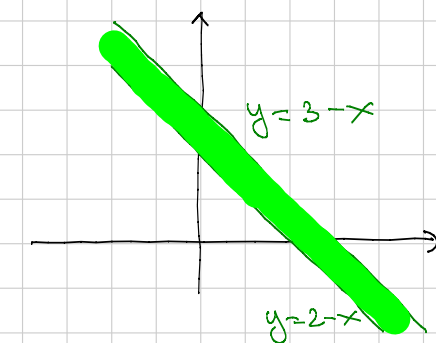
Altro modo: affinché sia $xy < 0$
ci sono 2 possibilità

- $x > 0, y < 0 \rightsquigarrow$ IV quadrante

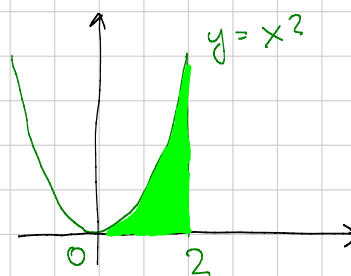
- $x < 0, y > 0 \rightsquigarrow$ II quadrante

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x+y \leq 3\}$$

$$\begin{aligned} x+y \geq 2 &\leadsto y \geq 2-x \leadsto \text{sopra nella } y=2-x \\ x+y \leq 3 &\leadsto y \leq 3-x \leadsto \text{sotto nella } y=3-x \end{aligned}$$



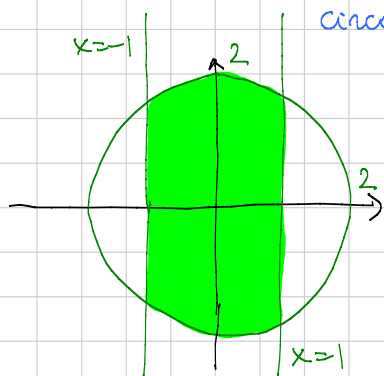
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2\}$$



$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 4}_{\downarrow \text{Dentro la circonferenza}}, \underbrace{|x| \leq 1}_{\downarrow -1 \leq x \leq 1}\}$$

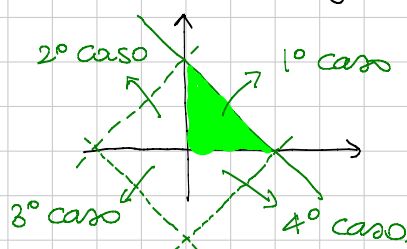
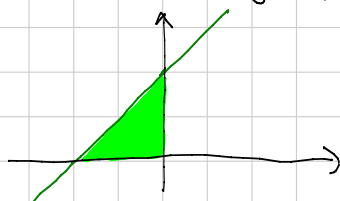


$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$$

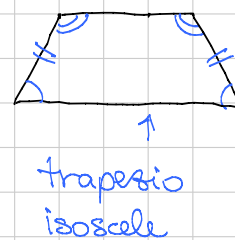
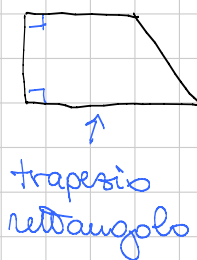
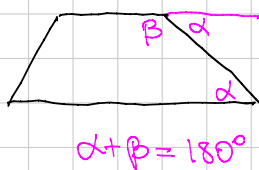
4 casi a seconda del segno di x e y

1° caso: $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$

2° caso: $x < 0, y \geq 0, -x+y \leq 1$
 $y \leq x+1$

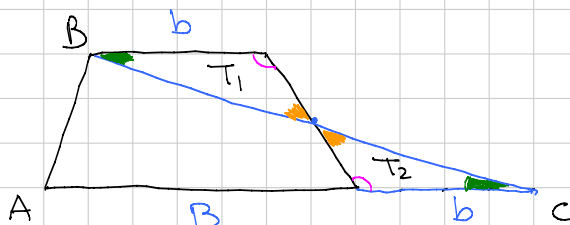


Trapezio : una coppia di lati paralleli



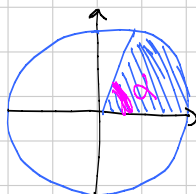
$$\text{Area trapezio} = \frac{1}{2} (B + b) R$$

$\downarrow$ base magg $\downarrow$ base minore $\downarrow$ altezza



T_1 e T_2 sono uguali,
dunque area trapezio =
area (ABC)

Cerchio : Area = πR^2 lung. circ. = $2\pi R$



Area settore: Area cerchio = $\alpha : 2\pi$

— o — o — o —

Cubo : 1 parametro (il lato l)

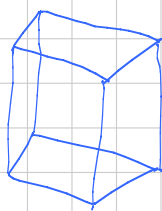
Volume : l^3 , 6 facce, 8 vertici, 12 spigoli

Sup. totale : $6 l^2$

Diagonale = $l\sqrt{3}$



Sfera : 1 parametro (il raggio R). Volume = $\frac{4}{3} \pi R^3$
Sup = $4\pi R^2$

Prisma

$$\text{Volume} = \text{Area base} \times \text{altezza}$$

$$\text{Sup. laterale} = \text{altezza} \times \text{perimetro base}$$

Piramide

$$\text{Volume} = \text{Area base} \cdot \text{altezza} \cdot \frac{1}{3}$$

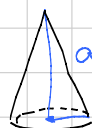
Se la base è un poligono regolare la piramide si dice retta se il piede dell'altezza è il centro della base

Cono

2 parametri: altezza R
raggio base R

$$a^2 = R^2 + R^2$$

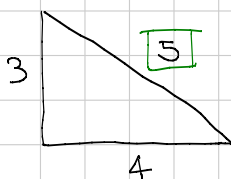
$$\text{Volume} = \frac{1}{3} \overbrace{\pi R^2}^{\text{Area base}} \cdot R$$



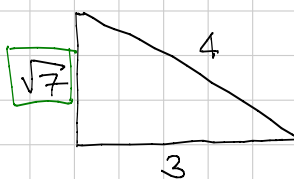
apotema a

- ① Triangolo rett. Un lato lungo 3 } non sappiamo
" " " 4 } quali.
Quali le lunghezze possibili per il 3° lato.

1° caso

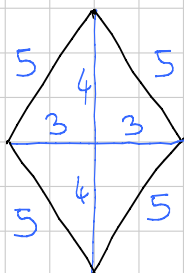


2° caso



$$\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

②



Perimetro = 20

③ Volume cilindro =

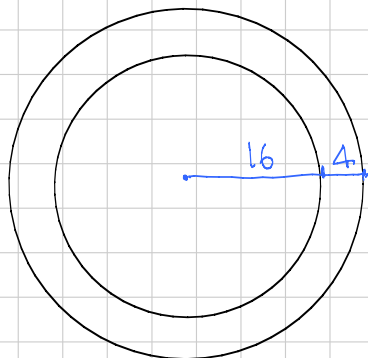
$$= \text{Area base} \cdot \text{alt}$$

$$= \pi R^2 \cdot R$$

$$\text{Volume cono} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$$

$$\frac{V(\text{cil.})}{V(\text{cono})} = 3$$

- ⑦ Cocomero con raggio esterno 20 cm
Buccia spessa 4 cm.
Quale percentuale del volume occupa la buccia?

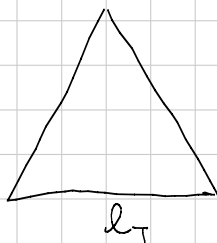
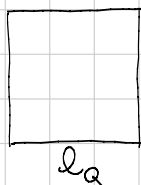


$$\begin{aligned}\text{Volume totale} &= \frac{4}{3} \pi R^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \cdot 20^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume parte buona} &= \\ &= \frac{4}{3} \pi 16^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Percentuale} &= \frac{\text{Volume "buono"}}{\text{Volume totale}} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}} \pi 16^3}{\cancel{\frac{4}{3}} \pi 20^3} = \left(\frac{16}{20}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} > \frac{64}{128} = \frac{1}{2} = \text{poco + di } \frac{1}{2}\end{aligned}$$

⑧



Area quadrato =

Area Δ equilatero

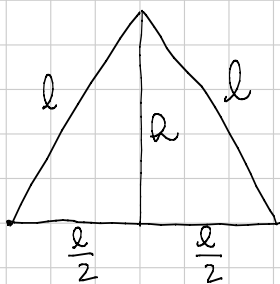
$$\frac{l_T}{l_q} = ?$$

$$\text{Area quadrato} = (l_q)^2$$

$$\text{Area triangolo eq.} = \frac{(l_T)^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$1 = \frac{\text{Area (Q)}}{\text{Area (T)}} = \frac{(l_q)^2}{\frac{(l_T)^2 \sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \left(\frac{l_q}{l_T}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{l_q}{l_T} = \sqrt[4]{3}$$

Area triangolo equilatero di lato l



$$\begin{aligned} h^2 &= l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ &= l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4} l^2 \\ \Rightarrow h &= \sqrt{\frac{3}{4} l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \end{aligned}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

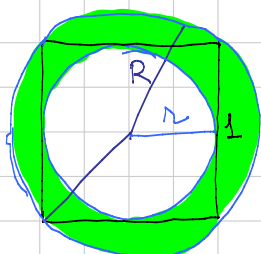
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{alt} = \frac{1}{2} l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

In alternativa:
$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = l^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

- ⑨ I lati di T_1 sono 10, 12, 14
I lati di T_2 sono 5, 6, 7

$$\frac{\text{Area}(T_1)}{\text{Area}(T_2)} = ? \quad 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{se moltiplico le dimensioni} \\ \text{per } k, \text{ l'area viene} \\ \text{moltiplicata per } k^2 \\ \text{eventuali volumi per } k^3. \end{array} \right)$$

⑩



Area Corona circ =

$$= \text{Area cerchio fuori} - \text{Area cerchio dentro}$$

$$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{\text{diagonale}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$