

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 62

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

TUTTO QUELLO CHE SI PUÒ FARE CON BAIRE, SI PUÒ FARE A MANO IN MANIERA COSTRUTTIVA, PUR DI PENSARE QUANTO BASTA

Esempio 1 [Dimostrazione di BS] Prendiamo la versione come equivalenza tra

$$\forall v \in V \sup_{i \in I} \|L_i(v)\|_W < +\infty$$

Limitatezza qualitativa

$$\sup_{i \in I} \|L_i\|_{op} < +\infty$$

Limitatezza quantitativa

Notazioni: V Banach, W sp. normato, I insieme di indici

$L_i : V \rightarrow W$ lineari e continui

$$\|L_i\|_{op} = \|L_i\|_{\infty(V,W)} := \sup \{ \|L_i v\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1 \}$$

L'implicazione vera è $\Rightarrow$.

[Dim. via Baire] Poniamo $C_k := \{v \in V : \|L_i v\|_W \leq k \ \forall i \in I\}$ e osserviamo che i C_k sono chiusi e hanno come unione V , dunque almeno uno ha parte interna $\neq \emptyset$. A questo punto, se $B_V(x_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$, con qualche conto si verifica che

$$L_i(B_V(0, 1)) \subseteq B_W(0, \frac{2k_0}{r_0})$$

da cui la tesi

[Dim. costruttiva a mano] Ragioniamo per assurdo, supponendo che

$$\sup \{ \|L_i\|_{op} : i \in I \} = +\infty.$$

Mostriamo che esistono $\alpha_n > 0$, $\sigma_n \in \{+1, -1\}$, $u_n \in V$ con $\|u_n\|_V \leq 1$ e $i_n \in I$ tali che

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \alpha_k u_k \quad \text{converge e soddisfa}$$

$$\| \text{Lim}(u) \|_W \rightarrow +\infty$$

qui uso hp che $\text{sep} = +\infty$

Potiamo $\alpha_n := \frac{1}{10^n}$, scegliamo $i_n \in I$ t.c. $\| \text{Lim} \|_{\text{op}} \geq 10^n \cdot n$, poi scegliamo $u_n \in V$ tale che

$$\|u_n\|_V \leq 1 \quad \text{e} \quad \| \text{Lim}(u_n) \|_W \geq \frac{1}{2} \| \text{Lim} \|_{\text{op}}$$

↑ posso mettere qualunque cosa < 1

Ora scegliamo σ_n in maniera induttiva. Prendiamo σ_1 a caso. Supponiamo di aver già scelto $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, quindi è ben definita la somma parziale

$$S_{n-1} := \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \alpha_k u_k$$

Ora per S_n abbiamo due possibilità: $S_n = S_{n-1} \pm \alpha_n u_n$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} & \| \text{Lim}(S_{n-1} + \alpha_n u_n) \|_W + \| \text{Lim}(S_{n-1} - \alpha_n u_n) \|_W \\ &= \| \text{Lim}(S_{n-1} + \alpha_n u_n) \|_W + \| \text{Lim}(-S_{n-1} + \alpha_n u_n) \|_W \\ &\geq \| \text{Lim}(S_{n-1} + \alpha_n u_n) + \text{Lim}(-S_{n-1} + \alpha_n u_n) \|_W \\ &= 2 \alpha_n \| \text{Lim}(u_n) \|_W \end{aligned}$$

$$\geq \alpha_n \| \text{Lim} \|_{\text{op}}$$

(quindi uno dei 2 termini al LHS è $\geq$ della metà)

Scegliamo σ_m in maniera tale da avere

$$\| \text{Lim}(S_m) \| \geq \frac{1}{2} \alpha_m \| \text{Lim} \|_{\text{op}}$$

In questo modo abbiamo definito tutti i σ_m . La serie che definisce U converge assolutamente, quindi $\checkmark$.

Resta da dimostrare che $\| \text{Lim}(U) \|_W \rightarrow +\infty$.

Fissato n , scriviamo

$$U = S_n + R_n \quad \text{con} \quad R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k \alpha_k U_k$$

e osserviamo che

serie geometrica

$$\| R_n \|_V \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \stackrel{!}{=} \frac{1}{9} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9} \alpha_n$$

e quindi $\| \text{Lim}(R_n) \|_W \leq \| \text{Lim} \|_{\text{op}} \cdot \| R_n \|_V \leq \frac{1}{9} \alpha_n \| \text{Lim} \|_{\text{op}}$

Ma allora

$$\| \text{Lim}(U) \|_W = \| \text{Lim}(S_n) + \text{Lim}(R_n) \|_W$$

$$\geq \| \text{Lim}(S_n) \|_W - \| \text{Lim}(R_n) \|_W$$

$$\geq \frac{1}{2} \alpha_n \| \text{Lim} \|_{\text{op}} - \frac{1}{9} \alpha_n \| \text{Lim} \|_{\text{op}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} \right) \alpha_n \| \text{Lim} \|_{\text{op}}}_{\geq n}$$

da cui la tesi.

— o — o —

bastava una
costante $< \frac{1}{2}$

↑

Oss. La proprietà foud. degli α_n è che $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \leq \frac{1}{9} \alpha_n$

Esempio 2 Debolmente convergente $\Rightarrow$ limitata (in Hilbert)

Con le mani: supponiamo $\{v_n\} \subseteq H$ non limitata.

Allora esiste $w \in H$ ed esiste $i_n \rightarrow +\infty$ t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\langle v_{i_n}, w \rangle| = +\infty$$

il che impedisce a v_n di convergere debolmente (altrimenti il limite di sopra dovrebbe essere $|\langle v_\infty, w \rangle|$).

Scriviamo w nella forma

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k d_k \frac{v_{i_k}}{\|v_{i_k}\|}$$

Poniamo $\alpha_n = \frac{1}{10^n}$, e scegliamo i_n in modo che

$$\|v_{i_n}\| \geq 10^n \cdot n \quad (\text{ovviamente } i_n \rightarrow +\infty)$$

La scelta di α_n da sola basta a far convergere la serie (conv. assoluta). Scegliamo inolttramente i $\sigma_n \in \{+1, -1\}$.

Prendiamo σ_1 a caso. Supponiamo di aver scelto $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$.

Consideriamo la somma parziale

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \alpha_k \frac{v_{i_k}}{\|v_{i_k}\|}$$

e per S_n scegliamo tra $S_{n-1} \pm \alpha_n \frac{v_{i_n}}{\|v_{i_n}\|}$. Osserviamo che

$$\left| \langle v_{i_n}, S_{n-1} + \alpha_n \frac{v_{i_n}}{\|v_{i_n}\|} \rangle \right| + \left| \langle v_{i_n}, S_{n-1} - \alpha_n \frac{v_{i_n}}{\|v_{i_n}\|} \rangle \right|$$

$$= | \dots | + \left| \langle v_{i_n}, -S_{n-1} + \alpha_n \frac{v_{i_n}}{\|v_{i_n}\|} \rangle \right|$$

$$\geq \left| \langle v_{i_n}, 2 \alpha_n \frac{v_{i_n}}{\|v_{i_n}\|} \rangle \right| = 2 \alpha_n \|v_{i_n}\|$$

Scegliamo quindi S_n in modo tale che

$$|\langle v_{im}, S_n \rangle| \geq \frac{1}{9} \|v_{im}\|$$

Voglio dimostrare che $|\langle v_{im}, w \rangle| \rightarrow +\infty$.

Fissato n , scriviamo

$$w = S_n + R_n \quad \text{con} \quad R_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \sigma_k d_k \frac{v_{ik}}{\|v_{ik}\|}$$

e come prima osserviamo che $\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k = \frac{1}{9} \alpha$.

Di conseguenza

$$|\langle v_{im}, w \rangle| = |\langle v_{im}, S_n \rangle + \langle v_{im}, R_n \rangle|$$

triangolo $\rightarrow \geq |\langle v_{im}, S_n \rangle| - |\langle v_{im}, R_n \rangle|$

C.S. $\rightarrow \geq \frac{1}{9} \|v_{im}\| - \|v_{im}\| \cdot \|R_n\|$

$$\geq \frac{8}{9} \frac{1}{9} \|v_{im}\|$$

$$\geq \frac{8}{9} n,$$

da cui la tesi.

— o — o —

Oss. La stessa dimostrazione vale nel caso degli spazi normati, cioè se V è spazio normato e $\{v_n\} \subseteq V$ è una succ. non limitata, allora esiste $f \in V'$ ed esiste $i_m \rightarrow +\infty$ tale che

$\uparrow$ sempre Banach

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f(v_{i_m})| = +\infty$$

Cil che impedisce a v_{i_m} dunque pure a v_n , di convergere debolmente)

L'idea è sempre la stessa. Usiamo $\alpha_n = \frac{1}{10^n}$, prendiamo
in t.c. $\|v_n\|_V \geq 10^n \cdot \alpha_n$, poi prendiamo $f_n \in V'$ tale che

$$\|f_n\|_{V'} \leq 1 \quad \text{e} \quad |f_n(v_n)| = \|v_n\|_V$$

(qui basterebbe $|f_n(v_n)| \geq \frac{1}{2} \|v_n\|_V$)

e infine poniamo

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k d_k f_k$$

dopo aver scelto gli f_k in maniera iterativa, in modo tale
che

$$|S_m(v_m)| \geq \alpha_m \|v_m\|_V$$

↑

somma parziale della serie, che
è un elemento di V'

[Completare i dettagli analoghi ai casi precedenti].

— o — o —