

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 54

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Avanzo lezione precedente H sp. di Hilbert con base ortonorm. $\{e_n\}$

Operatore $A: H \rightarrow H$ lineare e continuo con

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lambda_n \rightarrow 0$, allora A è compatto.

↑ ogni tanto punto da 1 per comodità

Ipotesi : $\{u_m\} \subseteq H$ succ. limitata qualunque

Tesi : esiste s.succ. che converge FORTEMENTE

Notazioni : introduciamo le componenti

$$u_m = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\langle u_m, e_i \rangle}_{i\text{-esima componente di } u_i} e_i$$

Osserviamo che $|\langle u_m, e_i \rangle| \leq \|u_m\| \leq M$

èquibonditondione

quindi la successione di numeri $\{\langle u_m, e_i \rangle\}_{m \in \mathbb{N}}$ è limitata $\forall i \geq 1$

Step 1 Individuazione della s.succ. e candidato limite.

Con un procedimento diagonale troviamo $n_k \rightarrow +\infty$ tale che

$$\langle \lambda_{n_k} u_{n_k}, e_i \rangle \rightarrow \alpha_i \quad \forall i \geq 1$$

[Troviamo s.succ. tale che $\langle u_{n_k}, e_1 \rangle \rightarrow \alpha_1$, da questa estraiamo in modo che $\langle u_{n_k}, e_2 \rangle \rightarrow \alpha_2$, e così via, poi concludiamo "diagonalizzando"]

Osserviamo che $\{\langle \lambda_n u_n, e_i \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata per ogni $i \geq 1$ essendo $\{\lambda_n\}$ limitata. Il candidato limite di Au_n è

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

Step 2] Il candidato limite è ben definito, cioè

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < +\infty.$$

Fissato un intero $N \geq 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 &= \sum_{i=1}^N \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle \lambda_{m_k} u_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ \text{sambio} \nearrow \text{limite con} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \langle \lambda_{m_k} u_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ \text{somma} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \underbrace{\lambda_{m_k}^2}_{\leq L^2} \langle u_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ \text{FINITA} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq L^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \langle u_{m_k}, e_i \rangle^2 \\ &\leq L^2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \langle u_{m_k}, e_i \rangle^2}_{\|u_{m_k}\|^2} \end{aligned}$$

$$\leq L^2 \cdot M^2$$

Qui ad essere
preciso non so
che il limite esiste,
quindi dovrei
scrivere limsup

Poiché il bound non dipende da N , la serie converge $\ddot{\smile}$.

Oss. Da questo momento sappiamo che $Au_{m_k} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$
(e quello che abbiamo fatto è ri-dimostrare
l'esistenza di una s.succ. debolmente convergente. Qui potevamo
usare il risultato generale).

Resta da dimostrare la convergenza FORTE.

Step 3] UNIFORME PICCOLEZZA DELLE CODE

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1 \text{ t.c. } \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=N}^{+\infty} \lambda_i^2 \langle u_m, e_i \rangle^2 \leq \varepsilon$$

in questo punto è essenziale che $\lambda_m \rightarrow 0$

Sappiamo che $\|v_m\|^2 \leq M$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Scegliamo $N \geq 1$ tale che

$$\lambda_i^2 M^2 \leq \varepsilon \quad \forall i \geq N$$

(qui uso che $\lambda_i \rightarrow 0$).

Ora basta osservare che

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \lambda_i^2 \langle v_m, e_i \rangle^2 &\leq \frac{\varepsilon}{M^2} \sum_{i=N}^{\infty} \langle v_m, e_i \rangle^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M^2} \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_m, e_i \rangle^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{M^2} \|v_m\|^2 \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

(abbiamo diviso per M , ma non è un grosso problema)

Step 4 Allo stesso modo si dimostra che

$$\sum_{i=N}^{\infty} \alpha_i^2 \leq \varepsilon$$

↑ stesso N di prima

[Basta mescolare Step 2 e Step 3]

Step 5 Mostriamo che $Av_{m_k} \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ FORTEMENTE, cioè

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Av_{m_k} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\|^2 = 0$$

Ora

$$\|Av_{m_k} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{m_k} \langle v_{m_k}, e_i \rangle - \alpha_i)^2$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, prendiamo N come negli Step 3 e 4 e dividiamo la serie in due pezzi

$$\sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{n_k} \langle v_{n_k}, e_i \rangle - \alpha_i)^2 + \sum_{i=N}^{+\infty} (\lambda_{n_k} \langle v_{n_k}, e_i \rangle - \alpha_i)^2$$

Quando $k \rightarrow +\infty$, la prima sommatoria, con un numero FINITO di termini, tende a 0 per definizione di α_i .

La seconda sommatoria si stima con

$$2 \sum_{i=N}^{+\infty} \lambda_{n_k}^2 \langle v_{n_k}, e_i \rangle^2 + 2 \sum_{i=N}^{+\infty} \alpha_i^2 \leq 4\varepsilon$$

abbiamo usato che $(A-B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$

Abbiamo dimostrato che, fissato $\varepsilon > 0$, vale che

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \|Av_{n_k} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\|^2 \leq 4\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo finito. $\square$

Altre domande sullo stesso operatore.

① Sotto quali condizioni è iniettivo.

Se e solo se $\lambda_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: facile verifica!

Se c'è un λ_{n_0} nullo, allora NON è iniettivo $Av_{n_0} = 0$.

Se tutti i λ_n sono $\neq 0$, allora Av ha almeno una componente non nulla se v ha almeno una componente non nulla.

② Sotto quali condizioni è surgettivo

Achtung! In dimensione FINITA un'appl. lineare è iniettiva se e solo se è surgettiva. In dimensione infinita QUESTO NON È PIÙ VERO

Risposta: A surgettivo esiste $m > 0$ tale che $|\lambda_n| \geq m > 0$ per ogni $n \geq 1$

Idea: dato $w \in H$ voglio trovare $v \in H$ t.c. $Av = w$.
Scritto w nella forma

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle e_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \langle w, e_i \rangle e_i$$

deve essere $\lambda_i \langle v, e_i \rangle = \langle w, e_i \rangle$, quindi

$$\langle v, e_i \rangle = \frac{1}{\lambda_i} \langle w, e_i \rangle$$

Sapendo che $\sum_{i=1}^{\infty} \langle w, e_i \rangle^2 < +\infty$, devo poter dedurre $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle^2$

e questo per il solito esercizio di Analisi 1 è vero solo se $\{\frac{1}{\lambda_i}\}$ è limitata, che è equivalente a λ_i lontani da 0.

Oss. Altro esempio di operatore iniettivo ma non surgettivo è lo shift.
 $(v_1, v_2, v_3, \dots) \rightarrow (0, v_1, v_2, v_3, \dots)$

Due esempi creativi

- $A: H \rightarrow H$ lineare, simmetrico, compatto, infiniti autovalori, Ker di dimensione infinita.

Come sopra con $\lambda_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$

- $A: H \rightarrow H$ lineare, simm., compatto, e $\max \left\{ \frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|^2} : v \in H \setminus \{0\} \right\}$ non esiste (col valore assoluto esiste per forza)

Come sopra con $\lambda_n = -\frac{1}{n}$ (sup = 0, ma max N.E.)
(esiste invece il minimo)

— 0 — 0 —