

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 53

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 Sia V sp. normato con $\dim(V) < +\infty$.
Sia $f: V \rightarrow V$ continuo (non nec. limitato)
Allora f è compatto.

Dim: Occorre dimostrare che $\forall \{v_m\} \subseteq V$ limitata si ha che $f(v_m)$ ammette s. succ. convergente.
Oppure: per ogni $A \subseteq V$ limitato si ha che $\overline{f(A)}$ è compatto in V .

A limitato $\Rightarrow \exists R > 0$ t.c. $A \subseteq \overline{B}(0, R)$
 $\uparrow$
compatto

$\Rightarrow f(A) \subseteq f(\overline{B}(0, R))$
 $\uparrow$
compatto perché f è continua

$\Rightarrow \overline{f(A)}$ è chiuso in compatto, e quindi compatto.

Punto fondamentale: se $\dim(V) < +\infty$, allora le palle chiuse sono compatte (è vero per la norma euclidea, e tutte le norme sono equivalenti in dim. finita)

(altro fatto equivalente: se $\dim(V) < +\infty$, allora la convergenza in norma è equivalente alla convergenza delle componenti)

Esempio 2 Sia H spazio di Hilbert, e sia $f: H \rightarrow H$.

(a) Compatto $\nRightarrow$ continuo (qualunque operatore con immagine finita, ad esempio due punti, è cpt., ma non nec. cont.)

(b) Continuo $\nRightarrow$ compatto, ovviamente se $\dim(H) = +\infty$
(Basta considerare l'identità che manda $B(0, 1)$ in sé)

(c) Simmetrico $\Rightarrow$ lineare

$\uparrow$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall (v, w) \in H^2$$

Semplice esercizio di "spostamento": dati v_1 e v_2 si ha

$$\begin{aligned} \langle f(v_1 + v_2), w \rangle &= \langle v_1 + v_2, f(w) \rangle \\ &= \langle v_1, f(w) \rangle + \langle v_2, f(w) \rangle \\ &= \langle f(v_1), w \rangle + \langle f(v_2), w \rangle \\ &= \langle f(v_1) + f(v_2), w \rangle \end{aligned}$$

Dal momento che vale per ogni $w \in H$, si deduce che
 $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.

Oss. In tutto l'esercizio, abbiamo usato solo che c'è un prodotto scalare, non la completezza.

Esempio 3 (Operatori di moltiplicazione)

Sia H spazio di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$.

Sia $\{\lambda_n\}$ una succ. di numeri reali.

Consideriamo l'applicazione lineare $A: H \rightarrow H$ tale che

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) A è ben definita se e solo se $\{\lambda_n\}$ è limitata

Supponiamo $\{\lambda_n\}$ sia limitata, diciamo $|\lambda_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia $v \in H$. Lo possiamo scrivere come

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 = \|v\|^2 < +\infty$$

$\uparrow \langle v, e_n \rangle$

Vedremmo tanto porre

$$Av := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n$$

e possiamo farlo se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 < +\infty$$

Ma così è poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 \leq L^2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$

Viceversa, supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 < +\infty$ tutte le volte che

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$. Allora $\{\lambda_n\}$ è limitata. Questo segue da un classico esercizio di Analisi 1.

Analisi 1 Sia $\alpha_n \rightarrow +\infty$ una succ. di numeri reali.

Allora esiste $\{x_n\} \subseteq (0, +\infty)$ t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < +\infty \quad \text{ma} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = +\infty$$

Dall'esercizio segue la tesi con $x_n = v_n^2$ e $\alpha_n = \lambda_n^2$

Oss. Ci siamo in realtà chiesti quando esisteva una applicazione lineare e continua tale che $Ae_n = \lambda_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Se non si richiede la continuità, allora ovviamente esiste (e non è nemmeno unica) una A assegnata su un insieme linearmente indipendente (come un po' di assioma di scelta per estendere l'insieme lin. indep. ad una base ALGEBRICA, e poi è geometria 1).

(b) Dimostrare che A è simmetrico quando è ben definito.

Quasi ovvio. Sente che $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$

$$f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n \quad f(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_n e_n$$

Per la rappresentazione del prod. scalare in termini di compou.
LHS e RHS sono uguali a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n w_n \quad (\text{per motivi diversi})$$

(c) A è continuo S-S se e solo se è ben definito.

Continuità strong-strong $\Leftrightarrow$ Limitatezza (questa storia vale
SOLO per mappe LINEARI)

Ora

$$\|Av\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n v_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 v_n^2 \leq L^2 \|v\|^2$$

(d) A è compatto se e solo se $\lambda_n \rightarrow 0$

Assumiamo a priori che $\{\lambda_n\}$ è limitata, altrimenti
 A non è nemmeno ben definito.

Compatto $\Rightarrow \lambda_n \rightarrow 0$

Per assurdo. Supponiamo che λ_n non
tenda a 0. Allora esistono $m > 0$ ed
una s.succ. λ_{n_k} t.c.

$$|\lambda_{n_k}| \geq m > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dico che $\{e_{n_k}\}$ è limitata (ovvio) e $Ae_{n_k} = \lambda_{n_k} e_{n_k}$ non
ha s.succ. di Cauchy, e quindi non ha s.succ. convergenti.
Infatti per $i \neq j$ si ha che

$$\begin{aligned} \|Ae_{n_i} - Ae_{n_j}\|^2 &= \|\lambda_{n_i} e_{n_i} - \lambda_{n_j} e_{n_j}\|^2 \\ &= \lambda_{n_i}^2 + \lambda_{n_j}^2 \geq 2m^2 > 0 \end{aligned}$$

e quindi non può diventare $< \varepsilon$ piccolo a piacere per i, j grandi

Alternativa diretta Consideriamo la successione $\{e_n\}$ che è limitata.

Allora le immagini $\{\lambda_n e_n\}$ devono avere s.succ. che converge forte. Questa succ. è limitata e converge debolmente a 0 (sulle succ. limit. la conv. debole è equivalente alla conv. delle componenti).

Quindi l'unico limite forte possibile per una s.succ. è 0. Quindi deve esistere

$$\lambda_{n_k} e_{n_k} \rightarrow 0 \quad \text{forte}$$

cioè

$$\begin{array}{c} \|\lambda_{n_k} e_{n_k}\| \rightarrow 0 \\ \parallel \\ |\lambda_{n_k}| \end{array}$$

Cosa abbiamo dimostrato? Che $\{\lambda_n\}$ ammette una s.succ. che tende a 0. Questo NON BASTA.

Per concludere, serve il Lemma della SOTTO-SOTTO.

→ Allo stesso modo si dimostra che ogni s.succ. di $\{\lambda_n\}$ ammette una sotto-sotto-succ. che tende a 0.

→ Questo basta per concludere che TUTTA tende a 0.

Per l'altra implicazione vedi lezione successiva

(e) A è continuo w-s se e solo se è compatto.

Dalla teoria generale compatto + simmetrico $\Rightarrow$ continuo w.s.

$$\boxed{\text{Continuo w-s} \Rightarrow \lambda_n \rightarrow 0} \xRightarrow{\text{dopo}} \text{compatto}$$

Consideriamo $e_n \rightarrow 0$. Deve essere $Ae_n \rightarrow 0$ forte
cioè $\lambda_n e_n \rightarrow 0$ forte, cioè
 $|\lambda_n| \rightarrow 0$, cioè $\lambda_n \rightarrow 0$.

— 0 — 0 —