

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 52

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 $\Omega = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$

$$F(u) = \iint_{\Omega} \{ u_x^2 + u_y^2 + u^6 - \sin x \cdot u \} dx dy$$

Stabilire se $\inf \{ F(u) : u \in C^\infty(\Omega) \} \in \mathbb{R}$
 $\uparrow$ senza BC

Possiamo sperare che esista

$$\min \{ F(u) : u \in H^1(\Omega) \}$$

$\in W^{1,4}(\Omega)$
 $\in W^{1,3}(\Omega)$

Formulazione debole: Ok con ognuna delle scelte degli spazi.

In $W^{1,4}(\Omega)$ i valori sono reali, altrimenti occorre ammettere $\pm\infty$ (l'importante è non avere pezzi che potenzialmente fanno $+\infty$ e altri che fanno $-\infty$).

Compattezza Sia $\{u_m\} \subseteq H^1(\Omega)$ t.c. $F(u_m) \leq M$. Osserviamo che

$$M \geq F(u_m) \geq \iint_{\Omega} \{ u_m^2 + u_m^2 + u_m^6 - |u_m| - 1 \} dx dy$$

$\uparrow$ abbiamo usato che $p^4 \geq p^2 - 1$ $\uparrow$ occhio al valore assoluto

$$\geq \iint_{\Omega} \{ u_m^2 + u_m^2 + \frac{1}{2} u_m^6 - A \} dx dy$$

per una opportuna costante A (abbiamo usato $s^6 - |s| - 1 \geq \frac{1}{2}s^6 - A$)

Quindi $F(u_m) \leq M$ implica

$$\| \nabla u_m \|_{L^2(\Omega)} \leq M^1 \quad \text{e} \quad \| u_m \|_{L^6(\Omega)} \leq M^1$$

Dalla seconda stima integrale deduciamo $\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq M_3$
e quindi

$$\|u_m\|_{1,2,\Omega} \leq M_4 \quad (\text{controllo della norma in } H')$$

Per compattezza debole delle palle, a meno di s. succ. non ridom.

$$u_{mx} \rightarrow v_\infty \\ \text{debole } L^2$$

$$u_{my} \rightarrow w_\infty \\ \text{debole } L^2$$

e per immersione compatta $u_m \rightarrow u_\infty$ in L^2 forte
(e anzi in tutti L^q con $q < +\infty$).

Per le solite compatibilità $v_\infty = u_{\infty x}$ e $w_\infty = u_{\infty y}$, quindi
possiamo scrivere

$$u_m \rightarrow u_\infty \\ \text{forte}$$

$$\nabla u_m \rightarrow \nabla u_\infty \text{ debole } L^2$$

$$\boxed{\text{SCI}} \quad \liminf \iint_{\Omega} u_{mx}^2 dx dy \geq \iint_{\Omega} u_{\infty x}^2 dx dy \\ \uparrow \\ \text{sci della norma}$$

$$\liminf \iint_{\Omega} u_{my}^4 dx dy \geq \iint_{\Omega} u_{\infty y}^4 dx dy \\ \uparrow \\ \text{funzione convessa + convergenza debole}$$

Parentesi: in realtà abbiamo pure che $u_{my} \rightarrow u_{\infty y}$
debole in $L^4(\Omega)$. Quindi potevamo usare sci della norma

Fatto generale: succ. limitata in $L^4(\Omega)$ + debolmente conv.
in $L^1(\Omega)$ (o comunque in qualunque $L^p(\Omega)$
con $p \in [1, 4)$) implica conv. debole in L^4 .

Fatto generale: per una succ. limitata in qualche L^q , la
conv. debole basta testarla su un denso.

Per la parte di funzione abbiamo almeno due strategie

- ① Osservare che $u_n^6 - \sin x u_n \geq -A$ dove A non dipende da n o da x (solita stima $S^6 - \sin x \cdot S \geq S^6 - |S| \geq -A$)
A questo punto si può usare Fatou grazie al fatto che possiamo assumere che

$$u_n \rightarrow u_\infty \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

- ② Usare che $u_n \rightarrow u_\infty$ in L^6 e anche in L^4 , e usare la continuità della norma.

Nel caso ① si ottiene SCI, nel caso ② pure continuità.

Conclusione Il minimo esiste in $H^1(\Omega)$, quindi l'inf. $\in \mathbb{R}$ in ogni classe + piccola (e coincide con l'inf se la classe è densa, come nel vostro caso).

REGOLARITÀ BIG PROBLEM per colpa del termine $u y^4$.

Ricaviamo almeno ELE.

$$\varphi(t) := F(u + tv)$$

con u p.to di min. e v opportuna (ad esempio H^1 , ma occhio ad evitare dei $+\infty$).

Dopo aver verificato che si può derivare sotto il segno di integrale (FARLO!) otteniamo

$$\varphi'(0) = \iint_{\Omega} \{2u_x v_x + 4u y^3 v_y + 6u^6 v - \sin x v\} dx dy = 0$$

Limitandoci alle sole $v \in C_c^\infty(\Omega)$ troviamo

$$-\iint_{\Omega} \{2u_x v_x + 4u y^3 v_y\} dx dy = \iint_{\Omega} \{6u^6 - \sin x\} dx dy$$

e questa è la formulazione debole dell'equazione

$$\operatorname{div}(2u_x, 4u y^3) = 6u^6 - \sin x,$$

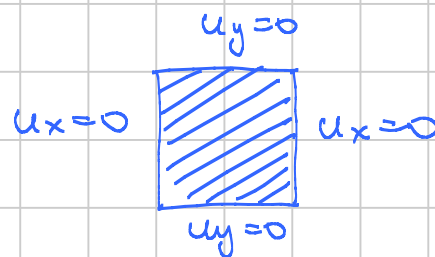
e cioè

$$2u_{xx} + 12u_y^2 u_{yy} = 6u^6 - \sin x$$

(è come se brutalmente avessimo integrato per parti)

Usando in fase 2 delle $v \in C^2(\bar{\Omega})$ che non sono nulle al bordo troviamo le NBC che nascono "on the road", nel nostro caso

$$\begin{aligned} u_x &= 0 & \text{sui lati verticali} \\ u_y &= 0 & \text{sui lati orizzontali} \end{aligned}$$



Potendo integrare da prima per parti, verrebbe

$$-\iint_{\Omega} \langle \nabla v, \vec{E} \rangle dx dy = \iint_{\Omega} v \cdot \operatorname{div} \vec{E} dx dy + \int_{\partial\Omega} v \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

con $\vec{E} = (2u_x, 4u_y^3)$, da cui una specie di FLCV su $\partial\Omega$ implica che

$$\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Le NBC date "on the road" si possono riassumere come

$$\langle \nabla u, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{cioè} \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0} \quad \text{su } \partial\Omega$$

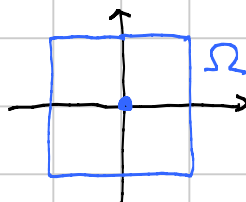
↑ derivata nella direzione
NORMALE al bordo

Oss. La vera sfida sarebbe capire se u_{xx} e u_{yy} esistono in qualche senso classico. — o —

Esempio 2 $\inf \left\{ \iint_{\Omega} \{ |u_x|^p + |u_y|^p + u^6 \} dx dy : u \in C^\infty(\Omega) \right\}$

$$u(0,0) = 7$$

dove $\Omega := (-1,1)^2$.



- CLAIM**
- Per $p > 2$, $\inf$ è > 0
 - per $p \in [1, 2]$, $\inf = 0$.

Primo tentativo Riscaldamento. Data $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ consideriamo $u_n(x) := \varphi(nx)$, con $x \in \mathbb{R}^2$ (notazione vettoriale)
 $\uparrow$ stiamo "restringendo" φ

$$u_{nx}(x) = n \varphi_x(nx) \quad \text{e} \quad u_{ny}(x) = n \varphi_y(nx). \quad \text{Quindi}$$

$$F(u_n) = \iint_{\Omega} \{ n^p |\varphi_x(nx)|^p + n^p |\varphi_y(nx)|^p + \varphi(nx)^6 \} dx$$

$$\stackrel{y=nx}{=} \frac{1}{n^2} \iint_{\Omega} \{ n^p |\varphi_x(y)|^p + n^p |\varphi_y(y)|^p + \varphi(y)^6 \} dy$$

$\uparrow$ siamo in 2 variabili

Questo mostra che per $p \in [1, 2)$ $\swarrow$ per ora escluso si ha che $F(u_n) \rightarrow 0$, quindi $\inf = 0$

Secondo tentativo Esistenza del min in $W^{1,p}(\Omega)$.

osservazione CHIAVE: se $p > 2$ la condizione puntuale $u(0,0) = 7$ ha senso in $W^{1,p}(\Omega)$, perché in tal caso si tratta di funzioni continue.

Metodo diretto classico $\Rightarrow$ il minimo esiste e NON può essere nullo (nessuna funz. continua con $u(0,0) = 7$ può avere integrale di u^6 nullo). Quindi $\inf > 0$ se $p > 2$.

Caso critico Per $p = 2$ il pbm. di minimo in $H^1 = W^{1,2}$ non ha senso, perché le funzioni in H^1 non hanno necessariamente valori puntuali. Usando funzioni del tipo

$$u_\alpha(x) = \begin{cases} 7(1 - |x|^\alpha) & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

si dovrebbe veder che $F(u_\alpha) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow 0$ $\nearrow$ es. prec.
 $\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$