

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 26

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio precedente  $\min \left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u^2) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$

Domanda : è vero che  $u(x) > 0$  per ogni  $x \in (0, 1]$ ?

Brutal mode : ELE è  $(4\dot{u}^3)' = 2u$  e un po' abusivamente  
 $6\dot{u}^2\ddot{u} = u$

Una soluzione di questa si vede quasi a occhio. Condividiamo del tipo  $u(x) = cx^a$ . Allora  $\dot{u}(x) = ca x^{a-1}$ ,  $\ddot{u} = ca(a-1)x^{a-2}$  e quindi

$$6\dot{u}^2\ddot{u} = u \Leftrightarrow 6c^2a^2x^{2a-2}ca(a-1)x^{a-2} = cx^a$$

Uguaglio esponenti :  $3a-4 = a \leadsto 2a = 4 \leadsto a = 2$

Uguaglio coeff :  $6c^3a^3(a-1) = c \leadsto$  dato  $a$  trovo  $c = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Quindi  $u(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} x^2$  è una soluzione di ELE.

Rigorous mode Se  $\alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}}$ , allora il unico p.to di minimo

è  $u_0(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} x^2$ . Basta usare che risolve ELE nella forma  $(4\dot{u}^3)' = 2u$  e sfruttare la convessità della Lagrangiana!

Nota bene : nell'esempio con  $\dot{u}^2$  i punti di minimo non potevano annullarsi NEMMENO per  $x=0$ .

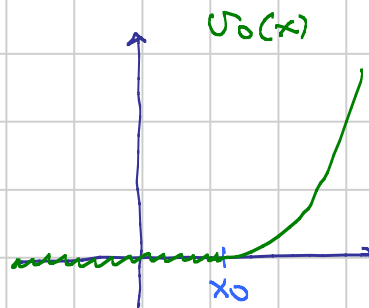
Nota pure : esistono almeno due sol. di ELE che verificano le condizioni di CAUCHY  $u(0)=0$ ,  $\dot{u}(0)=0$ .

(Il guaio nasce dalla perdita di ELLITTICITÀ, cioè non poter ricavare  $\ddot{u}$  da ELE)

Ancora più grave

Anche la funzione

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ \frac{1}{4\sqrt{3}} (x-x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$



risolve ELE. Di conseguenza, per ogni  $x \in (0, \frac{1}{4\sqrt{3}})$  è lei (per  $x_0$  opportuno) il p.to di minimo.

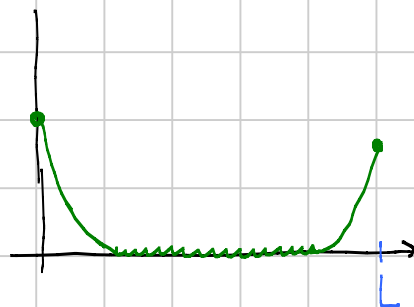
Dunque il p.to di min può essere nullo in un intero intervallo, cosa che nell'esempio con  $u^2$  non era possibile.

Nota bene: anche in questo caso la soluzione non è  $C^2$ , ma soltanto  $C^1$ .

Esercizio min  $\left\{ \int_0^L (u^4 + u^2) dx : u(0) = 2020, u(L) = 1937 \right\}$

Sembra ragionevole che, per  $L$  abbastanza grande, la soluzione vada a 0 su un intero intervallo

Idea: probabilmente si scrive esplicitamente usando le parabole precedenti.



Questo NON sarebbe possibile scambiando gli esponenti.

Esempio 2 (Ancora truncamenti e principi del massimo)

Consideriamo l'equazione  $\ddot{u} = u^3 + 7 \sin t$

Consideriamo una soluzione definita per  $x \in [0, 2\pi]$ . Cosa possiamo dire del massimo / minimo della soluzione? Viene raggiunto al bordo o in un p.to interno?

Poniamo che le condizioni siano  $u(0) = A$  e  $u(2\pi) = B$ .

Brutal mode: supponiamo  $x_0 \in (A, B)$  p.to di min. della solus.  
Allora  $u'(x_0) = 0$  e  $u''(x_0) \geq 0$ , ma allora

$$u(x_0)^3 + 7 \sin x_0 \geq 0, \text{ cioè}$$

$$u(x_0)^3 \geq -7 \sin x_0 \geq -7, \text{ cioè } u(x_0) \geq -\sqrt[3]{7}$$

Risultato

$$\min \{u(x) : x \in [0, 2\pi]\} \geq \min \{-\sqrt[3]{7}, u(0), u(2\pi)\}$$

$$\max \{u(x) : x \in [0, 2\pi]\} \leq \max \{\sqrt[3]{7}, u(0), u(2\pi)\}$$

Principi del massimo

Le disuguaglianze dovrebbero essere strette nel caso di max/min assunti in p.ti interni.

1° modo: dall'equazione

Ragionare come nel brutale per le disuguaglianze  $\geq$  e  $\leq$ .

Vediamo quella stretta con  $-\sqrt[3]{7}$ . Intanto dovrebbe essere  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ . Abbandoniamo per un momento.

2° modo: dall'approccio variazionale

Se  $u(x)$  risolve l'eq., allora è l'unico p.to di min di

$$F(u) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + 7 \sin x \cdot u \right) dx$$

con DBC  $u(0) = A$  e  $u(2\pi) = B$ .

Un argomento di truncamento dovrebbe dire che non conviene andare sotto  $-\sqrt[3]{7}$ . Questo è vero se c'è un risparmio sulla parte di funzione truncando a  $-\sqrt[3]{7}$ , cioè

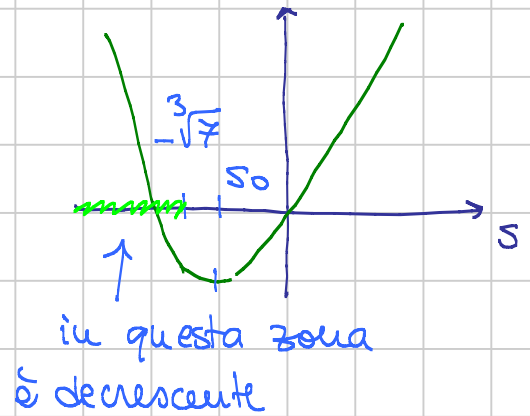
$$\frac{1}{4} s^4 + 7 \sin x \cdot s \geq \frac{1}{4} 7^{4/3} - 7^{1/3} \sin x \quad \text{se } s < -\sqrt[3]{7}$$

Questo è vero perché, fissato  $x \in [0, 2\pi]$ , vale che la funzione

$$s \rightarrow \frac{1}{4} s^4 + 7 \sin x \cdot s$$

ha minimo quando  $s^3 + 7 \sin x = 0$ ,  
cioè

$$s = -\sqrt[3]{7 \sin x} > -\sqrt[3]{7}$$



Morale: le disuguaglianze del tipo "principio del max" sono equivalenti ad argomenti di truncamento.

Domanda a cui pensare: disuguaglianze strette.

Esempio 3 Mostrare che l'equazione  $\ddot{u} = u^3 + 7 \sin x$  ha un'unica soluzione  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  e PERIODICA (N.B.: non sto dichiarando il periodo)

- ROAD MAP**
- ① Con il metodo variazionale trovo una soluzione con periodo  $2\pi$
  - ② Mostro che il periodo è necessariamente un multiplo di  $2\pi$
  - ③ Mostro che il periodo minimo è sempre e comunque  $2\pi$ .

① Risolvo  $\min \left\{ \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + 7 \sin x \cdot u \right) : u(0) = u(2\pi) \right\}$

Metodo diretto: esistenza, regolarità, e nascita su due road della condizione  $u(0) = u(2\pi)$  (e dall'equazione pure  $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(2\pi)$ )

Ripetendo per periodicità abbiamo una sol. periodica.

(Nota bene: se risolvessimo con BCs  $u(0) = u(37)$  avremmo comunque esistenza e condizioni  $\dot{u}(0) = \dot{u}(37)$ , ma dall'equazione Nox ottenevamo  $\ddot{u}(0) = \ddot{u}(37)$  e non potevamo estendere replicando)  
(Anche bene anche periodo  $4\pi$ ).

② Scritto  $7 \sin x = \ddot{u} - u^3$ , si vede che, se  $u(x)$  è  $T$  periodica, allora lo è pure  $\sin x$ , quindi  $T = 2k\pi$  con  $k \geq 1$  intero.

③ Proviamo una soluzione di periodo  $22\pi$ . Questa risolve ELE del problema variazionale con BC  $u(0) = u(22\pi)$ .

Per le solite storie di stretta convergenza, questa è l'unica soluzione di ELE + PBC in  $[0, 22\pi]$ .

Ma noi una sol. già la conosciamo (è quella in  $[0, 2\pi]$  ripetuta 11 volte).

Ma allora non esistono sol. esotiche che non siano quella del pto ① ripetuta.

— o — o —