

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 25

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

PERDITA DI ELLITTICITÀ (Parte seconda)

Esempio 0 (già visto)

$$\min \left\{ \int_0^1 x^a \dot{u}^2 dx : u(0)=1, u(1)=0 \right\}$$

↑↑

Già visto: se $a > 1$, allora $\inf = 0$ (e min non esiste)

(Brutalmente: si può saltare da 1 a 0, o dove vuole, non pagando praticamente nulla? Chi rende possibile questo? Il coeff. che va a 0 davanti a $\dot{u}^2$)

Esempio 1 $\min \left\{ \int_{-1}^1 (\dot{u}^4 + u^3) dx : u(1) = u(-1) = 0 \right\}$

Brutale: $\dot{u}^4 = \dot{u}^2 \dot{u}^2$

↑ quando $\dot{u} = 0$ ho un coeff. che si annulla davanti a $\dot{u}^2$

Formulazione debole Almeno 2 possibilità

→ in $W^{1,4}$ con valori reali

→ in $H^1((-1,1))$ ammettendo il valore $+\infty$

} No pbm. per BCs
e $\int u^3$

Compattezza Come nozione di conv. abbiamo almeno 2 poss.:

- $u_n \rightarrow u_\infty$ unif e $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ debole L^4
- " " " " debole L^2

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^2} \leq M' \quad \text{grazie alla stima}$$

↑ 0 in L^4

$$L(x, s, p) = p^4 + s^3 \geq p^4 - |s|^3 \quad + \text{ DBCs}$$

(4 > 3)

Oss. Senza almeno una DBC la stima su $L(x,s,p)$ non basta
va per avere opt. (infatti senza condizioni l'inf.
è banalmente $-\infty$).

SCI Standard (funzione convessa di u + funzione
continua di u)

REGOLARITÀ $\varphi(t) = F(u+tv)$... verifico che si può derivare...

$$\varphi'(0) = \int_{-1}^1 (4\dot{u}^3 \dot{v} + 3u^2 \dot{v}) dx = 0 \quad \forall v \text{ ammissibile}$$

(ad es. $W^{1,4} + \text{nulle in } \pm 1$)

Bastano se $v \in C_c^\infty((-1,1))$ per dedurre che

$$(4\dot{u}^3)' = 3u^2$$

Il LHS è per ora la derivata debole di una funzione L^1 , o
se proprio vogliamo $W^{1,4/3}$ (sappiamo che $\int \dot{u}^4 < +\infty$).

Primi passi: $u \in H^1$, oppure $u \in W^{1,4}$, quindi $u \in C^0$
quindi RHS $\in C^0$

Compatibilità classica $\Rightarrow 4\dot{u}^3 \in C^1$

(questo NON implica $u \in C^1$, perché dovrai fare $\sqrt[3]{}$)

Per lo meno questo implica $\dot{u}^3 \in C^0$ e quindi $\dot{u} \in C^0$
e quindi $u \in C^1$ (poiché $\int$ è C^0)

Altro piccolo passo $\dot{u}^3 \in C^1 \Rightarrow \dot{u}^3 \in \text{Lip}$

Sapendo già che u è continua, questo basta per
dedurre che u è $\frac{1}{3}$ -Hölder

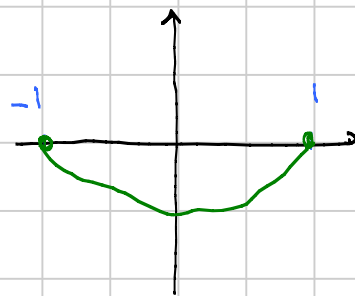
(Fatto di Analisi 1: se f è continua e f^α è Lip. ($\alpha > 1$), allora
 f è $\frac{1}{\alpha}$ -Hölder)

Quindi $u \in C^{1,1/3}$ (cioè derivabile, con derivata $\frac{1}{3}$ -Hölder)

Posso andare oltre? Il problema è che $(4\ddot{u}^3)' = 3u^2$
 $\leadsto 12\dot{u}^2\ddot{u} = 3u^2$

$\leadsto$ dove $\dot{u}$ si annulla potrebbe essere un problema ricavare $\ddot{u}$,
a meno che anche u non si annulli.

Il problema è che c'è un p.to di min.
interno in cui $\dot{u} = 0$, ma $u < 0$.



Come dimostro le cose rigorosamente?

Step 1 $u(x) \leq 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$ (argomento di truncamento)

Step 2 $u(x) \not\equiv 0$. Basta osservare che $u_{\min} < 0$. Perché?

Basta esibire v t.c. $F(v) < 0$ e questo segue dagli esponenti
coinvolti. Prendiamo $\varphi \not\equiv 0$, con $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ e $\varphi(x) > 0$
in $(-1, 1)$. Allora

$$F(\varepsilon\varphi) = \varepsilon^4 \int_{-1}^1 \dot{\varphi}^4 dx - \varepsilon^3 \underbrace{\int_{-1}^1 \varphi^3 dx}_{\text{questo comincia per } \varepsilon \rightarrow 0^+} < 0 \text{ per } \varepsilon > 0 \text{ piccolo}$$

[Nota bene: $u \equiv 0$ è comunque una soluzione di ELE + DBC]

Step 3 $u(x)$ ammette minimo per un certo $x_0 \in (-1, 1)$

(forse si può pure dimostrare che $x_0 = 0$, ma qui non serve).

In x_0 $\ddot{u}$ non può esistere (se esistesse $12\ddot{u}(x_0)\dot{u}(x_0)^2 = 3u(x_0)^2$)

Step 4 $u(x)$ non è più regolare di $C^{1,1/3}$. Supponiamo
infatti che

$$|\ddot{u}(t) - \ddot{u}(s)| \leq M |t - s|^\alpha$$

Usandola con $s = x_0$ e $t = x$ otteniamo

$$|\ddot{u}(x)| \leq M |x - x_0|^\alpha$$

coe

$$|\dot{u}(x)| \leq M |x-x_0|^{\frac{1}{3}} |x-x_0|^{\alpha-\frac{1}{3}}$$

$$\leadsto 0 \leq \frac{|\ddot{u}(x)|^3}{|x-x_0|} \leq M^3 |x-x_0|^{3\alpha-1}$$

Calcolo il limite a dx per $x \rightarrow x_0^+$. Se $\alpha > \frac{1}{3}$, allora RHS $\rightarrow 0$.
Al LHS posso usare De L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|\ddot{u}(x)|^3}{x-x_0} = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\ddot{u}(x)^3}{x-x_0} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\left(\ddot{u}(x)^3\right)'}{1} \right|$$

$\uparrow$
 $\frac{0}{0}$
 num. e denom.
 sono di classe C^1
 ($\ddot{u} \notin C^1$, MA $\ddot{u}^3 \in C^1$)

$$= \frac{3}{4} \ddot{u}(x_0)^2 \neq 0$$

da cui Q'assunto. Quindi $\dot{u}(x)$ non può essere α -Hölder con $\alpha > \frac{1}{3}$.

Oss. In generale se partivamo con $\int |\dot{u}|^p$ arrivavamo a $\dot{u}^{p-1} \in \text{Lip}$ e quindi $\dot{u} \in \frac{1}{p-1}$ Hölder.

Estensione: provare a dimostrare

→ che $x_0 = 0$ è un p.to di minimo

→ che $x_0 = 0$ è l'unico p.to di min. di $u(x)$, posto che sia vero.

Esempio 2 min $\left\{ \int_0^1 (\dot{u}^4 + u^2) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$
 $\uparrow$ variabile.

Parentesi: min $\left\{ \int_0^1 (\dot{u}^2 + u^4) dx : u(1) = \alpha > 0 \right\}$

In entrambi i casi il minimo esiste facile.

CLAIM

$$0 \leq u(x) \leq \alpha \quad \text{per ogni } x \in [0, 1]$$

$$0 < u(x) < d \quad \text{per ogni } x \in [0, 1)$$

↑ Escluso

Il primo claim è facile in entrambi i casi (argomento di truncamento)

Il secondo claim dovrebbe essere ok nel 2° caso. Perché?

ELE diventa

$$(2\dot{u})' = 4u^3 \Rightarrow \ddot{u} = 2u^3$$

Se esistesse $x_0 \in [0, 1)$ t.c. $u(x_0) = 0$, questo sarebbe un p.to di min., quindi $u'(x_0) = 0$. Ma allora u sarebbe soluzione del pbm. di Cauchy (analisi 2)

$$\begin{cases} \ddot{u} = 2u^3 \\ u(x_0) = 0 \\ \dot{u}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Ma la sd. è unica e una la conosciamo (quella $\equiv 0$), che però non è la nostra.

Analogamente se esistesse $x_0 \in [0, 1)$ t.c. $u(x_0) = \alpha$, quello sarebbe un p.to di max, ma $u(x)$ è convessa ($u'' \geq 0$) e quindi non può avere p.ti di max in $(0, 1)$.

Non può nemmeno avere max per $x_0 = 0$ perché altrimenti $\hat{u}(x_0) = 0$ e le funzioni convexe stanno sopra ogni retta tangente. Dovrebbe quindi essere $u(x) \equiv \alpha$, che non risolve ELE.

10101