

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 23

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esempio 1 (Uniforme + debole = debole)

Sia  $(a,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Consideriamo

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } (a,b)$$

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{debole in } L^2((a,b)) \quad (\text{o } L^p((a,b)))$$

Allora

$$f_n u_n \rightarrow f_\infty u_\infty \quad \text{debole in } L^2((a,b)).$$

Dim Devo dim. che  $\int_a^b f_n u_n \varphi \, dx \rightarrow \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \, dx$  per ogni  $\varphi \in L^2((a,b))$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n u_n \varphi - \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \right| &\leq \left| \int_a^b f_n u_n \varphi - \int_a^b f_n u_\infty \varphi \right| \\ &\quad + \left| \int_a^b f_n u_\infty \varphi - \int_a^b f_\infty u_\infty \varphi \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n - f_\infty| \cdot |u_n| \cdot |\varphi| \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_a^b \underbrace{(u_n - u_\infty)}_{\rightarrow 0} \underbrace{f_\infty \varphi}_{\text{funzione } L^2 \text{ fissa}} \right|}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

$$\int_a^b |f_n - f_\infty| |u_n| \cdot |\varphi| \leq \|f_n - f_\infty\|_\infty \int_a^b |u_n| \cdot |\varphi|$$

$$\leq \underbrace{\|f_n - f_\infty\|_\infty}_{\downarrow 0} \underbrace{\|u_n\|_{L^2}}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\|\varphi\|_{L^2}}_{\text{fissa}}$$

Morale : RHS  $\rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Oss. 1 Abbiamo usato il fatto misterioso che le succ. deb. conv. sono limitate. Volendo potevamo metterlo come ipotesi.

Oss.2 Sul secondo integrale non potevamo portare dentro il valore assoluto.

Oss.3 Cosa succedeva con l'altro termine misto? Proviamo!

$$\left| \int_a^b f_n v_n \varphi - \int_a^b f_\infty v_\infty \varphi \right| \leq \left| \int_a^b f_n v_n \varphi - \int_a^b f_n v_\infty \varphi \right| + \left| \int_a^b f_n v_\infty \varphi - \int_a^b f_\infty v_\infty \varphi \right|$$

$$2^\circ \leq \int_a^b \underbrace{|f_n - f_\infty|}_{\downarrow \text{ in norma uniforme}} \cdot |v_\infty| \cdot |\varphi|$$

$$1^\circ \leq \int_a^b |f_n| |v_n - v_\infty| \cdot |\varphi| \quad \text{e non so dove andare}$$

Inoltre non si può vedere come prod. scalare di  $v_n$  con funzione test fissa.

Esempio 2  $\min \left\{ \int_0^1 \left[ (1+u^2) \dot{u}^2 + \sin x \cdot u^4 \right] dx : u(0) = 7 \right\}$

Domanda: il minimo esiste?

Formulo debole in  $H^1((0,1))$  e osservo che è a valori reali.

Compattezza Essendo  $\sin x \geq 0$  in  $[0,1]$ , osservo che  $L(x,s,p) \geq p^2$

quindi da  $F(u_n) \leq M$  deduco che  $\|u_n\|_{L^2} \leq M$ .

Tenendo conto che  $u_n(0) = 7$  deduco che

$$|u_n(x)| \leq M' \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

da cui per A.A. e compattezza debole delle palle, a meno di s.succ.,

$$u_n \rightharpoonup u_{\infty} \text{ unif} \quad \text{e} \quad \dot{u}_n \rightharpoonup \dot{u}_{\infty} \text{ debole } L^2.$$

La DBC passa al limite

$$\boxed{\text{SCI}} \quad u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \Rightarrow \sqrt{1+u_n^2} \rightarrow \sqrt{1+u_\infty^2} \text{ unif.}$$

Sapendo inoltre che  $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$   
dal lemma precedente deduciamo che

$$\sqrt{1+u_n^2} \dot{u}_n \rightarrow \sqrt{1+u_\infty^2} \dot{u}_\infty \text{ debole } L^2$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1+u_n^2) \dot{u}_n^2 dx &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{1+u_n^2} \dot{u}_n\|_{L^2}^2 \\ &\geq \|\sqrt{1+u_\infty^2} \dot{u}_\infty\|_{L^2}^2 \\ &= \int_0^1 (1+u_\infty^2) \dot{u}_\infty^2 dx \end{aligned}$$

Sul termine  $\sin x \cdot u_n^4$  basta la conv. unif.

Regolarità

$$\varphi(t) := F(u+tv)$$

$u = \text{p.to di min. qualunque}$   
 $v = \text{variazione ammiss.}$

$$\varphi(t) = \int_0^1 (1+(u+tv)^2) (\dot{u}+t\dot{v})^2 + \sin x (u+tv)^4$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = \int_0^1 \{ &2(u+tv)v(\dot{u}+t\dot{v})^2 + (1+(u+tv)^2)2(\dot{u}+t\dot{v})\dot{v} \\ &+ \sin x \cdot 4(u+tv)^3 v \} \end{aligned}$$

Questo si può fare se l'integrande si domina per  $t$  vicini a 0.

$$\varphi'(0) = \int_0^1 \{ 2u v \dot{u}^2 + (1+u^2) 2\dot{u}\dot{v} + 4 \sin x \cdot u^3 v \} dx = 0$$

è equivalente a

$$\int_0^1 \underbrace{2\dot{u}(1+u^2)}_f \underbrace{\dot{v}}_{\varphi} dx = - \int_0^1 \underbrace{[2u\dot{u}^2 + 4 \sin x u^3]}_g \underbrace{v}_{\varphi} dx$$

Questo dice che  $g$  è la derivata debole di  $f$ , cioè

$$[2\dot{u}(1+u^2)]' = 2u\ddot{u}^2 + 4\sin x \cdot u^3$$

al LHS abbiamo la derivata debole di funzione  $L^2$

Oss. brutal  $L(x, s, p) = (1+s^2)p^2 + s^4 \cdot \sin x$

$$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u}) \text{ ho l'equazione di sopra}$$

Adesso recuperiamo regolarità su  $u$ .

$u \in H^1 \Rightarrow \text{RHS} \in L^1 \Rightarrow 2\dot{u}(1+u^2)$  è primitiva di cosa  $L^1$   
e quindi continua (anzi  $W^{1,1}$ )  
chiamiamola  $\psi$

$$\Rightarrow \dot{u} = \frac{\psi}{2(1+u^2)} \in C^0 \Rightarrow u \in C^1 \Rightarrow \text{RHS} \in C^0 \Rightarrow \psi \in C^1$$

$\Rightarrow \dot{u} \in C^1 \Rightarrow u \in C^2$ . Da qui in poi è fatta e volendo possiamo scrivere l'eq. nella forma

$$\cancel{2}\ddot{u}(1+u^2) + \cancel{2}\dot{u} \cdot 2u\dot{u} = \cancel{2}u\ddot{u}^2 + \cancel{2}\sin x \cdot u^3$$

$$\ddot{u}(1+u^2) = -u\dot{u}^2 + 2\sin x \cdot u^3$$

$$\ddot{u} = \frac{-u\dot{u}^2 + 2\sin x \cdot u^3}{1+u^2}$$

Da qui è bootstrap una derivata per volta.

Oss. L'unicità non è chiara per  $L(x, s, p)$  non è convessa nella coppia  $(s, p)$ .

— o — o —

Esempio 3  $\min \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{\dot{u}}{1+u^2} \right]^2 dx : u(0)=0, u(1)=1 \right\}$

Metodo indiretto :  $L(x, s, p) = \left( \frac{p}{1+s^2} \right)^2 \leftarrow \text{NON DIPENDE DA } x$

Scrivo ELE in forma di IDENTITÀ DI BELTRAMI

$$\dot{u} L_p(u, \dot{u}) - L(u, \dot{u}) = c$$

$$L_p(s, p) = \frac{2p}{(1+s^2)^2}$$

$$\frac{2\dot{u}^2}{(1+u^2)^2} - \frac{\dot{u}^2}{(1+u^2)^2} = c \quad \leadsto \quad \dot{u}^2 = c(1+u^2)^2$$

$$\leadsto \dot{u} = c(1+u^2) \quad \begin{array}{l} \text{perché non} \\ \text{ho messo } \pm \end{array}$$

↑  
diverso dal prec. e  
di segno qualunque

$$\frac{\dot{u}}{1+u^2} = c \quad \leadsto \quad (\arctan u)' = c \quad \leadsto \quad \arctan u = cx + d$$

$$\leadsto u = \tan(cx + d)$$

Impongo DBC :  $u(0)=0 \quad \leadsto \quad d=0$   
 $u(1)=\tan c \quad \leadsto \quad c = \frac{\pi}{4} \quad \leadsto \quad u(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Che cosa ho dimostrato? SE c'è un minimo abbastanza regolare, allora è  $\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

Per l'esistenza posso puntare sul metodo diretto in  $H^1((0,1))$ .

Formulazione debole Ok.

In fase di compattazione ho subito problemi, perché  $\frac{\dot{u}}{1+u^2}$  è "piccolo", non posso dedurre che  $\dot{u}$  è piccola. Vedi les. succ.

— o — o —