

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 19

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIAZIONALE AI BVP (TERZA PUNTATA)

(Come portone delle NBC "strane")

Esempio 1

$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3 \\ u(2) = 5 \end{cases}$$

1° modo Partendo da $L(x, s, p)$, se non metto BC quando mi inizi, nascono on the road delle Neumann del tipo

$$L_p(x, u, \dot{u}) = 0$$

agli estremi dell'intervallo.

Cerchiamo una funzione della x che vale 3 in $x=0$ e 5 in $x=2$, ad esempio $x+3$.

Ci piacerebbe che

$$L_p(x, u, \dot{u}) = \dot{u} - x - 3$$

perché sostituendo $x=0$ e $x=2$ in $\dot{u} - x - 3 = 0$ avrei esattamente le NBC richieste. Quindi serve

$$L_p(x, u, \dot{u}) = p - x - 3$$

$$\leadsto L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \text{roba}(x, s)$$

Serve pure che $(L_p)' = L_s$ sia $\ddot{u} = u^3 + x^5$

$$(\dot{u} - x - 3)'$$

"

$$\ddot{u} - 1 \leadsto L_s(x, u, \dot{u}) = u^3 + x^5 - 1$$

da cui

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s - s$$

Formulazione variazionale:

$$F(u) := \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 - (x+3)u + \frac{1}{4} u^4 + (x^5-1)u \right) dx$$

e cerchiamo

$$\min \{ F(u) : u \in H^1((0,2)) \}$$

↑ senza ulteriori condizioni

Verifica: ELE diventa $[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u})$

$$[\dot{u} - x - 3]' = u^3 + x^5 - 1$$

$$\ddot{u} - 1 = u^3 + x^5 - 1$$

$$\ddot{u} = u^3 + x^5$$



NBC on the road:

$$L_p(x, u, \dot{u}) = 0 \text{ al bordo}$$

$$\dot{u} = x+3 \text{ al bordo}$$



Si tratta di dimostrare che il minimo esiste, è regolare, risolve il problema ed è unico.

Compattanza

(oss.: non abbiamo DBC che diano una mano, quindi $F(u)$ deve stimare sia $\dot{u}$ sia u)

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 - (x+3)p + \frac{1}{4} s^4 + (x^5-1)s$$

$$x \in [0, 2] \rightarrow \geq \frac{1}{2} p^2 - 5|p| + \frac{1}{4} s^4 - 3|s|$$

occluso a seguir e
valori assoluti

$$\geq \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{88} s^4 - A$$

↑↑

↑↑

(limitatezza dal basso di
opportune funzioni)

[Come al solito va raccontata come "esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c. $L(x, s, p) \geq \dots$ per ogni $x \in [0, 2]$ e per ogni $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ "]

Grazie a questa otteniamo le stime volute

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|\dot{u}_n\|_{L^2((0,2))} \leq M' \quad (\text{trovare } M')$$

$$F(u_m) \leq M \Rightarrow \int_0^2 u_m(x)^4 dx \leq M''$$

$\uparrow$
stimata su L^0

$$\Rightarrow \exists x_m \in (0, 2) \text{ t.c. } |u_m(x_m)| \leq M'''$$

$\uparrow$
media integr.

$$\Rightarrow |u_m(x)| \leq M_4 \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\uparrow$
passo prec. + stima di $\|u_m\|_{L^2}$

Questo garantisce $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ unif. e $i_{m_k} \rightarrow i_\infty$ debole L^2 .

SCI Quasi gratis nel senso che, se u_m converge a u_∞ come $\uparrow$

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 i_m^2 \geq \int_0^2 i_\infty^2 \quad (\text{sci della norma})$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 (x+3) i_m = \int_0^2 (x+3) i_\infty \quad (\text{prod. scalare con } (x+3))$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^2 \left(\frac{1}{4} u_m^4 + (x^5 - 1) u_m \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} u_\infty^4 + (x^5 - 1) u_\infty \right) \quad (\text{conv. unif.})$$

Regolarità, nascita delle NBC strane, unicità $\leadsto$ come sempre.

2° modo **Cambio di variabili**

Cerco una funzione $u_0(x)$ qualunque che rispetti le NBC strane $i_0(0) = 3$ e $i_0(2) = 5$. Un esempio è

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$i_0(x) = x + 3$$

Poniamo $u(x) = u_0(x) + v(x)$ e osserviamo che $\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0$.

Domanda: quale equazione risolve $v(x) = u(x) - u_0(x)$?

$$\begin{aligned} \ddot{v}(x) &= \ddot{u}(x) - \ddot{u}_0(x) = u(x)^3 + x^5 - 1 = (u_0(x) + v(x))^3 + x^5 - 1 \\ &= \left(v(x) + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right)^3 + x^5 - 1 \end{aligned}$$

Conclusione: v risolve

$$\ddot{v} = \left(v + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^3 + x^5 - 1$$

con NBC $\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0$. Imposto questo pbm. in modo variazionale.

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}\left(s + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^4 + (x^5 - 1)s$$

Si verifica (farlo!) che la ELE associata è quella voluta e le NBC $L_p = 0$ pure. Quindi cerco

$$\min \left\{ \int_0^2 L(x, v, \dot{v}) : v \in H^1((0, 2)) \right\}$$

↑ nessuna ulteriore condizione

L'unica cosa delicata è la compattezza, per cui spero in una stima del tipo: esiste $A \in \mathbb{R}$ t.c.

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{8}s^4 - A \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

Un modo è quello di espandere la quarta potenza e stimare i termini con la x . In alternativa si può usare la convessità

$$\frac{1}{4}\left(s^4 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right)^4 \geq \frac{1}{4}s^4 + s^3\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) \geq \frac{1}{4}s^4 - 8|s|^3$$

↑
 $(a+b)^4 \geq a^4 + 4a^3b$

e idem sul termine di primo grado.

Data questa stima, si procede poi come sempre per la compattezza ed il resto è storia

Occhio a far vedere la nascita on the road delle NBC

$$\dot{v}(0) = \dot{v}(2) = 0.$$

3° modo Aggiungere al funzionale i valori $u(0)$ e $u(2)$ opportunamente pesati

$$F(u) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx + \alpha u(0) + \beta u(2),$$

Questo produce E-L senza
NBC strane

scegliendo bene α e β .

$$\varphi(t) = F(u + t v) = \dots$$

$$\varphi'(0) = \int_0^2 (\dot{u} \dot{v} + u^3 v + x^5 v) dx + \alpha v(0) + \beta v(2) = 0$$

Quando l'integrale per parti viene

$$0 = \int_0^2 (-\ddot{u} + u^3 + x^5) v dx + \dot{u}(2) v(2) - \dot{u}(0) v(0) + \alpha v(0) + \beta v(2)$$

In fase 1 ($v \in C_c^\infty$) se ne va l'integrale, in fase 2 nascono le condizioni

$$\dot{u}(0) = \alpha$$

$$\dot{u}(2) = -\beta$$

$$\leadsto \alpha = 3 \text{ e } \beta = -5$$

Alla luce di questo considero il problema

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx + 3u(0) - 5u(2) : u \in H^1((0,2)) \right\}$$

Il problema è come sempre da compattezza.

$$\text{Come sempre} \quad \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{10} s^4 - A$$

$$\text{e come sempre} \quad |u_n(x)| \leq |u_n(x_n)| + \sqrt{2} \|\dot{u}_n\|_{L^2((0,2))}$$

Ora però

$$|u_m(x_m)| = |u_m(x_m)^4|^{1/4} \leq \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u_m(x)^4 dx \right\}^{1/4}$$

da cui

$$|u_m(x)| \leq \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u_m(x)^4 dx \right\}^{1/4} + \sqrt{2} \|u_m\|_{L^2} \quad \forall x \in [0, 2].$$

Quest'ultima stima vale in particolare per $x=0$ e $x=2$, quindi

$$\begin{aligned} M \geq F(u_m) &\geq \underbrace{\frac{1}{2} \|u_m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{10} \|u_m\|_{L^4}^4 - 2A}_{\text{parte dovuta all'integrale}} \\ &\quad - 8 \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_m\|_{L^4}^4 + \sqrt{2} \|u_m\|_{L^2}^2 \right\}}_{\text{dovuto ai termini } u(0) \text{ e } u(2)} \end{aligned}$$

soliti discorsi $\nearrow$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{4}}_{\uparrow} \|u_m\|_{L^2}^2 + \underbrace{\frac{1}{20}}_{\uparrow} \|u_m\|_{L^4}^4 - B$$

Da qui $\|u_m\|_{L^2} \leq M'$ e $\|u_m\|_{L^4} \leq M''$ e avanti come sempre.

— o — o —

ACHTUNG! TIMEO COMPACTETIAM ET DONA
FERENTEM !!!