

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 18

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIAZIONALE AI BVP - SECONDA PUNTATA

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) = 0 \end{cases}$$

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : u \in H^1([0,2]) \right\}$$

↑
senza ulteriori condizioni

Cosa cambia? Un p.to importante! In fase di opt., non ci sono più le DBC che permettevano di limitare $|u_n(x)|$ che immesca poi A.A.

In questo caso è fondamentale la stima

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A$$

↑↑

Da questa, supponendo $F(u_n) \leq M$, deduciamo al solito modo che $\|u_n\|_{L^2} \leq M'$, ma anche che

$$\frac{1}{8} \int_0^2 u_n(x)^4 dx \leq M + 2A$$

Per il lemma della media integrale, questo ci dice che
lunghezza interv.

$$\exists x_n \in (0,2) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{8} u_n(x_n)^4 = \frac{1}{8} \int_0^2 u_n(x)^4 dx$$

$$\text{da cui} \quad |u_n(x_n)| \leq M'' (= 4M + 8A).$$

↑ dipende da n

e quindi

$$|u_n(x)| \leq \underbrace{|u_n(x_n)|}_{\leq M''} + \underbrace{|x - x_n|}_{\leq \sqrt{2}} \underbrace{\|\dot{u}_n\|_{L^2([0,2])}}_{\leq M'} \quad \forall x \in [0,2]$$

da cui ancora una volta una stima uniforme su $|u_n(x)|$ che permette di applicare A.A.

Oss. In generale, ci sono due modi di avere stime puntuali su $u_n(x)$

- stima uniforme su $\|u_n\|_{L^2}$, più DBC in almeno un estremo;
- " " " $\|u_n\|_{L^2}$, più stima uniforme su qualche integrale di u_n , e conclusione con il teorema della media integrale.

Per il resto, sono i soliti ragionamenti (SCI, esistenza del minimo, regolarità e nascita delle NBC, unicità in uno dei due modi).

LE PRIME VOLTE SCRIVERE TUTTI I DETTAGLI

Occhio: se si fa l'unicità via funzionale, non basta la stima

$$F(w) \geq F(u_0) + \int_0^2 (u_0 \dot{v} + u_0^3 v + x^5 v) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 dx \geq F(u_0)$$

perché da $\dot{v} \equiv 0$ si arriva a $v \equiv \text{costante}$, ma v non è nulla al bordo e quindi non basta per dedurre $v \equiv 0$.

Occorre sfruttare anche la stretta convessità di $\frac{1}{4} s^4$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (u_0 + v)^4 dx &= \underbrace{\int_0^2 u_0^4 dx}_{F(u_0)} + \underbrace{4 \int_0^2 u_0^3 v dx}_{\text{ELE}} + \int_0^2 v^2 (6u_0^2 + 4u_0 v + v^2) dx \\ &\quad \text{forma quadratica definita positiva} \end{aligned}$$

Quindi l'ultimo integrale è nullo se e solo se per ogni $x \in [0, 2]$ vale che $v(x) = 0$ oppure form. quadr. = 0, cioè $u_0(x) = 0$ e ancora $v(x) = 0$. In ogni caso $v(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Ci si può appellare alla stretta convessità di S^4 dicendo che

$$(a+b)^4 \geq a^4 + 4ab^3 \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

e vale il segno di $=$ se e solo se $b=0$.

Usandola con $a = u_0(x)$ e $b = v(x)$ otteniamo che $F(u) \geq F(u_0)$ e vale il segno di $=$ se e solo se $v(x) \equiv 0$ (se ci fosse $x_0 \in [0,2]$ in cui $v(x_0) \neq 0$, allora la disug. sarebbe stretta in tutto un intorno di x_0 , e questo renderebbe stretta la disug. tra gli integrali).

$$\boxed{\text{Esempio 2}} \quad \begin{cases} u'' = u^3 + x^5 \\ u(0) = u(2) \\ u'(0) = u'(2) \end{cases}$$

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : u \in H^1((0,2)), u(0) = u(2) \right\}$$

L'uguaglianza tra le derivate nascerà on the road, l'uguaglianza $u(0) = u(2)$ ha senso in H^1 .

Anche qui in fase di compattezza NON si può contare sulle DBC.

Esempio 3 (Digressione) Consideriamo il pbm. di minimo

$$\min \left\{ \int_0^2 (u'^2 - 7u) dx : u \in H^1((0,2)), u(0) = u(2) \right\}$$

È facile che il problema NON ha soluzione e $\inf = -\infty$ (basta osservare che $u_n \equiv n$ si ottiene $F(u_n) \rightarrow -\infty$).

Cosa va storto nel metodo diretto?

Dalla stima $F(u_n) \leq M$ non si riescono ad ottenere stime uniformi su $\|u_n\|_{L^2}$ oppure $\{u_n(x)\}$ e quindi la parte di compattezza fallisce.

Se ci fosse una DBC sarebbe completamente diverso.
Supponiamo che ci sia $u(0) = 7$. Allora

$$|u_m(x)| \leq |u_m(0)| + |x|^{1/2} \| \dot{u}_m \|_{L^2} \leq 7 + \sqrt{2} \| \dot{u}_m \|_{L^2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} M \geq F(u_m) &= \int_0^2 (\dot{u}_m(x)^2 - 7 u_m(x)) dx \\ &= \| \dot{u}_m \|_{L^2}^2 - 7 \int_0^2 u_m(x) dx \\ &\geq \| \dot{u}_m \|_{L^2}^2 - 7 \int_0^2 |u_m(x)| dx \\ &\geq \| \dot{u}_m \|_{L^2}^2 - 7 \cdot 2\sqrt{2} \| \dot{u}_m \|_{L^2} - 49 \cdot 2 \end{aligned}$$

quindi $\| \dot{u}_m \|_{L^2} \leq M'$ (solito sottolivello di un polinomio di 2° grado)

Se avessimo avuto da risolvere
$$\begin{cases} \ddot{u} = -\frac{7}{2} \\ u(0) = u(2) \\ \dot{u}(0) = \dot{u}(2) \end{cases}$$

l'approccio variazionale non funzionava per mancanza di compattezza !! Questo vuol dire che il problema BVP non ha soluzione?

1° modo Sarà vero che ogni soluzione è p.to di min. del funzionale?

Sia u_0 una soluzione, e poniamo $w = u_0 + v$. Allora

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^2 \dot{u}_0^2 + \int_0^2 \dot{v}^2 + 2 \int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v} - 7 \int_0^2 u_0 - 7 \int_0^2 v \\ &= F(u_0) + \underbrace{\int_0^2 (2 \dot{u}_0 \dot{v} - 7 v) dx}_{=0} + \int_0^2 \dot{v}(x)^2 dx \geq F(u_0) \end{aligned}$$

Il secondo termine è nullo perché al bordo resta

$$2 [\underbrace{\ddot{u}_0(2)u(2) - \ddot{u}_0(0)u(0)}_{\text{dall'equazione}}] \quad \text{ovvio se } u_0 + u \text{ è ammissibile}$$

Non ensemble pti di min., non possono esserci sol. dell'egu.

2° modo Dall'equazione vediamo che $\ddot{u} < 0$ sempre, quindi $\ddot{u}$ è strett. decrescente, ma allora $\ddot{u}$ non può avere gli stessi valori agli estremi.

Achtung! Se uno non era cauto in fase di compattezza, non si accorgeva di tutto questo !!

Esempio 4 Problema di min. con penalizzazione del dato al bordo

$$\min \left\{ \int_0^2 (\dot{u}^2 + \tau u) dx + u(0) : u \in C^1([0,2]), u(2) = 5 \right\}$$

$\uparrow \uparrow$
il valore in $x=0$ compare nel funzionale

Formulazione debole: solita sostituendo C^1 con H^1 (notiamo che $u(2)$ e $u(0)$ hanno senso in H^1)

Compattezza: come sopra, dopo aver osservato che la DBC $u(2)=5$ ci permette di stimare $u(0)$ e $\int u$ in termini di $\|\dot{u}\|_{L^2}$

SCI: solito + osservazione che $u_n(0) \rightarrow u_\infty(0)$ grazie al fatto che a livello di funzioni abbiamo conv. uniforme.

REGOLARITÀ + ELE:

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^2 (\ddot{u}^2 + 2t\ddot{u}\ddot{v} + t^2\ddot{v}^2 + 7u + 7tv) dx + u(0) + t v(0)$$

da cui $\varphi'(0) = \int_0^2 (2\ddot{u}\ddot{v} + 7v) dx + v(0)$

Fase 1: usando $v \in C_c^\infty$ troviamo l'eq. $2\ddot{u} = 7$, da cui tanta regolarità

Fase 2: avendo regolarità, integrando per parti troviamo

$$\begin{aligned} 0 &= v(0) + \int_0^2 (2\ddot{u}\ddot{v} + 7v) dx \\ &= v(0) + \underbrace{2\ddot{u}(2)v(2) - 2\ddot{u}(0)v(0)}_{\substack{\uparrow \\ =0 \text{ per la DBC} \\ \text{che porta } v(2)=0}} + \underbrace{\int_0^2 (-2\ddot{u} + 7)v dx}_{=0} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{v(0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{arbitrario}}} (1 - 2\ddot{u}(0))$$

Quindi alla fine ogni pto di min. deve risolvere

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{7}{2} \\ u(2) = 5 \\ \dot{u}(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{DBC data} \\ \text{NBC data on the road} \end{array}$$

— 0 — 0 —