

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 17

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

APPROCCIO VARIAZIONALE AI BVP

Boundary Value Problems

Idea: vogliamo risolvere un'eq. diff. con dati al bordo e per farlo ci consentiamo un problema di min di cui quell'eq. sia ELE.

Esempio 1
$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3, u(2) = 5 \end{cases}$$

ELE $\leadsto (L_p)' = L_s \leadsto L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s$

$[L_p(x, u, \dot{u})]' = L_s(x, u, \dot{u}) \Leftrightarrow (\dot{u})' = u^3 + x^5$

$$F(u) := \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) ds$$

Formulazione variazionale debole

hanno senso in *

$$\min \left\{ F(u) : \underbrace{u \in H^1((0, 2)), u(0) = 3, u(2) = 5}_{* \text{ su cui minimizziamo}} \right\}$$

Da qui in poi è standard. Usiamo la nozione di convergenza

$$u_m \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

$$u_m \rightarrow u_\infty \text{ debole } L^2$$

La compattzza dei sottolivelli segue dalla stima

$$L(x, s, p) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 + x^5 s \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 - 32 |s| \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A$$

↑ ↑ ↑ ↑
OCCHIO OCCHIO

Al passaggio precedente abbiamo assertedo che esiste $A \geq 0$ tale che

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A \quad \forall x \in [0, 2] \quad \forall (s, p) \in \mathbb{R}^2$$

Nota bene (Analisi 1): l'ultima disuguaglianza è equivalente a dire che

$$\frac{1}{8} s^4 - 32|s|$$

è limitata dal basso (da $-A$) su tutto $\mathbb{R}$ (è continua e tende all'infinito per $s \rightarrow \pm\infty$).

Dalla disuguaglianza segue la compattezza dei sottolivelli.

$$M \geq F(u_m) \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 + \frac{1}{8} u_m^4 - A \geq \int_0^2 \frac{1}{2} \dot{u}_m^2 dx - 2A$$

e da questo segue che

$$\int_0^2 \dot{u}_m^2 dx \leq 2M + 4A \leadsto \|\dot{u}_m\|_{L^2((0,2))} \leq M' \leadsto \dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty$$

Al solito modo

$$|u_m(x)| \leq \underbrace{|u_m(0)|}_3 + \underbrace{\sqrt{x}}_{\leq \sqrt{2}} \underbrace{\|\dot{u}_m\|_{L^2}}_{\leq M'} \leq 3 + \sqrt{2} M'$$

Da qui per A.A. $u_{m_{k_i}} \rightarrow u_\infty$ unif. Al solito $v_\infty = \dot{u}_\infty$.

Oss. Qui non abbiamo usato il termine $\frac{1}{8} s^4$. Quindi bastava una maggiorazione del tip

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{4} s^4 - 32|s| \geq \frac{1}{2} p^2 - A$$

Questa è limitata
dal basso

Da qui in poi è tutto standard fino all'esistenza di almeno una soluzione di classe C^∞ che risolve il problema.

L'unicità si può dimostrare in 2 modi.

Via equazione] Siano u e v due soluzioni del problema (con quale regolarità?)

$$\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3, u(2) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{v} = v^3 + x^5 \\ v(0) = 3, v(2) = 5 \end{cases}$$

Considero la differenza $w := u - v$. Sottraendo le equ. troviamo

$$\ddot{u} - \ddot{v} = u^3 - v^3$$

Moltiplico per $u - v$ e integro in $(0, 2)$:

$$\int_0^2 (\ddot{u} - \ddot{v})(u - v) dx = \int_0^2 (u^3 - v^3)(u - v) dx$$

$$\int_0^2 (\dot{u} - \dot{v})^2 dx$$

≥ 0
(segue dalla debole crescenza della funzione x^3)

$$+ [(\dot{u} - \dot{v})(u - v)]_0^2$$

" al bordo

Abbiamo ottenuto

$$\int_0^2 \dot{w}^2 dx \leq 0$$

il che è possibile $\Leftrightarrow \dot{w} \equiv 0 \Leftrightarrow w \equiv \text{costante}$ e la costante è 0 perché w è nulla al bordo.

Via funzionale

NON basta dire che il p.to di min. è unico, perché a priori potrebbero esserci soluzioni che non sono p.ti di minimo.

Quindi occorrono due fasi

Step 1: ogni solus. è p.to di min. per il funzionale in X

Step 2: il p.to di min. è unico.

Entrambi gli step seguono dalla convessità della Lagrangiana
(ma occorre aver chiaro COME e PERCHÉ).

Sia $u_0(x)$ una qualunque sol. dell'equazione. Allora ogni elemento $w \in X$ lo scriviamo come

$$w(x) = u_0(x) + v(x)$$

↑ verifica $v(0) = v(2) = 0$

Ora vale che

$$\begin{aligned} F(w) &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{u}_0^2}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_0 \dot{v}}_{\text{green}} + \frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^2 (u_0 + v)^4}_{\text{blue}} + \underbrace{\int_0^2 x^5 u_0}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 x^5 v}_{\text{green}} \\ &\geq \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^2 u_0^4}_{\text{orange}} + \underbrace{\int_0^2 u_0^3 v}_{\text{green}} \\ &\quad \text{(convessità di } x^4) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} F(w) &\geq F(u_0) + \underbrace{\int_0^2 (\dot{u}_0 \dot{v} + u_0^3 v + x^5 v) dx}_{=0 \text{ se } u_0 \text{ risolve l'equ.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \dot{v}^2 dx}_{\geq 0} \\ &\quad \text{(basta integrare per parti)} \end{aligned}$$

$$\geq F(u_0)$$

e vale il segue di = se e solo se $\dot{v} \equiv 0 \leadsto v \equiv \text{cost} \leadsto v \equiv 0$.

Questo risolve step 1 (u_0 è p.to di min.) e step 2 (unicità del p.to di min.).

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} \ddot{u} = u^3 + x^5 \\ u(0) = 3 \\ \dot{u}(2) = 0 \end{cases}$

Formulazione variazionale

$$\min \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + x^5 u \right) dx : \underbrace{u \in H^1((0,2)), u(0) = 3}_{\times} \right\}$$

Nota bene: La NBC $\dot{u}(2) = 0$ NON compare nella formulazione variazionale.

Non avrebbe senso farla comparire perché non hanno senso i valori puntuali delle derivate.

Il procedimento di minimizz. è analogo a prima (basta una DBC per avere la equi-limitatezza delle $\{u_n(x)\}$ necessaria per immergere A.A.).

Dopo aver dim. l'esistenza del minimo, uno deve verificare che questo soddisfa la NBC in $x=2$. Questo avviene in fase 4...

$$\varphi(t) := F(u_0 + t \overset{\substack{\text{elemento qualunque di } H^1((0,2)) \text{ con } v(0)=0 \\ \text{oppure } v \in C_c^\infty((0,2))}}{v})$$

un p.to[↑] di min

Derivando sotto il segno di integrale (dopo aver verificato che si può) si arriva a

$$\int_0^2 (\dot{u}_0 \dot{v} + u_0^3 v + x^5 v) dx = 0 \quad (\text{ELE-int 1})$$

Questo visto nella forma

$$\int_0^2 \underbrace{\dot{u}_0}_{f} \underbrace{\dot{v}}_{\dot{\varphi}} dx = - \int_0^2 \underbrace{(u_0^3 + x^5)}_{g} \underbrace{v}_{\varphi} dx$$

dice che g è la derivata debole di f (per questo basta $v \in C_c^\infty$)
da cui

$$(\dot{u}_0)' = u_0^3 + x^5$$

da cui al solito modo si guadagna $u_0 \in C^\infty$.

Usando poi delle funzioni test v che non si annullano in $x=2$ e integrando per parti (ELE - int 1) scopriamo che nasce la NBC $\dot{u}_0(2)=0$, che non era stata messa all'inizio.

Questo completa esistenza e regolarità.

Per l'unicità, valgono i due procedimenti descritti sopra.

Si consiglia di ripercorrere il procedimento per vedere dove si usano la DBC e la NBC.

— 0 — 0 —