

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 11

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Dimostrazione a mano della completezza spazi ℓ^p o $L^p(I)$

Def. Sia I un insieme di indici (anche più che numerabile). Indichiamo con $L^p(I)$ (dove $p \geq 1$ è un numero reale) l'insieme delle funzioni $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tali che l'insieme $\{i \in I : f(i) \neq 0\}$ è al più numerabile e

$$\sum_{i \in I} |f(i)|^p < +\infty$$

(si intende che la somma si fa solo sugli $i \in I$ per cui $f(i) \neq 0$)

Si verifica facilmente che

$$\|f\|_{L^p(I)} := \left\{ \sum_{i \in I} |f(i)|^p \right\}^{1/p}$$

è una norma su questo spazio.

Teorema Per ogni $p \geq 1$ e per ogni insieme I , lo spazio $L^p(I)$ è completo rispetto alla distanza indotta dalla norma.

Oss. Quando $I = \mathbb{N}$ lo spazio si indica con ℓ^p .

In ogni caso si tratta dello spazio L^p rispetto alla misura che conta i punti in I (cioè $\text{meas}(A) = \text{numero el. di } A$ per ogni $A \subseteq I$).

Dim (senza passare per la teoria generale degli spazi L^p rispetto ad una misura)

Sia $\{f_n\} \subseteq L^p(I)$ una succ. di Cauchy. Devo dimostrare che $f_n \rightarrow f_\infty$ rispetto alla norma di $L^p(I)$.

Step 1 (Identificazione di un limite puntuale)

Esiste $f_\infty: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f_n(i) \rightarrow f_\infty(i)$ per ogni $i \in I$.
Per definire $f_\infty(i)$ basta dimostrare che $\{f_n(i)\} \subset \mathbb{R}$ è una succ. di Cauchy per ogni indice $i \in I$.

Questo segue da

$$\begin{aligned} |f_n(i) - f_m(i)| &= \left\{ |f_n(i) - f_m(i)|^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \left\{ \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_m(i)|^p \right\}^{1/p} \quad (\text{su cosa sto davvero sommando?}) \\ &= \|f_n - f_m\|_{L^p(I)} \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. RHS $\leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0, m \geq n_0$.
La stessa cosa vale quindi per il LHS.

Step 2 Dimostriamo che $f_\infty \in L^p(I)$.

Osserviamo intanto che gli indici $i \in I$ tali che $f_\infty(i) \neq 0$ sono una quantità numerabile (sono contenuti nell'unione degli indici per cui le f_n sono $\neq 0$, e unione numerabile di numerabili è numerabile). Adesso indiciamo con

$$I_\infty := \{i \in I : f_\infty(i) \neq 0\}.$$

Per ogni sottoinsieme FINITO $J \subset I_\infty$ vale

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} |f_\infty(i)|^p &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J} |f_n(i)|^p \\ &\quad \uparrow \text{limite di somma FINITA} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} |f_n(i)|^p \quad \leftarrow \text{Tutti gli indici} \end{aligned}$$

$$= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^p(I)}^p$$

limitate (succ. di Cauchy sono limitate per fatto generale metrico)

Tutte le somme parziali sono EQUILIMITATE (indip. da J),
quindi la serie converge.

Quindi finora

$$f_n \rightarrow f_\infty \in L^p(I) \quad \text{PUNTUALMENTE}$$

Step 3 (Stima uniforme sulle code)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \subseteq I \text{ FINITO} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{i \in I \setminus J} |f_m(i)|^p \leq \varepsilon$$

Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m \geq n_0 \quad \forall n \geq m_0 \quad \|f_n - f_m\|_{L^p(I)}^p \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

(esiste perché $\{f_n\}$ è di Cauchy)

Per ogni $n = 1, \dots, n_0$ esiste J_n t.c.

$$\sum_{i \in I \setminus J_n} |f_n(i)|^p \leq \frac{1}{2^p} \varepsilon$$

Considero $J := \bigcup_{n=1}^{n_0} J_n$, e dico che questo va bene.

Infatti, se $n \leq n_0$ siamo a posto perché

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p \leq \sum_{\substack{i \in I \setminus J_n \\ \uparrow \\ \text{ho tolto + inclusi a sx}}} |f_n(i)|^p \leq \frac{1}{2^p} \varepsilon \leq \varepsilon$$

Se $n \geq n_0$, allora

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p = \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_{n_0}(i) + f_{n_0}(i)|^p$$

$$\begin{aligned} (a+b)^p &\leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \\ \forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0 \end{aligned} \leq 2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_{n_0}(i)|^p + 2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_{n_0}(i)|^p$$

$$\leq \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_{n_0}(i)|^p}_{2^{p-1} \|f_n - f_{n_0}\|_{L^p(I)}^p \leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_{n_0}(i)|^p}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon}$$

$$\leq \varepsilon,$$

come richiesto

Step 4 (Anche f_∞ ha le code ugualmente piccole)

$\forall \varepsilon > 0 \exists J \subseteq I$ FINITO (lo stesso di sopra) tale che

$$\sum_{i \in I \setminus J} |f_\infty(i)|^p \leq \varepsilon$$

Per dimostrarlo, basta rifare lo step 2. Per ogni sottoinsieme FINITO $K \subseteq I \setminus J$ vale

$$\sum_{i \in K} |f_\infty(i)|^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in K} |f_n(i)|^p \leq \varepsilon \text{ indep. da } K.$$

Step 5 Mostriamo che davvero c'è convergenza in $L^p(I)$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo il J corrispondente dello Step 3 e dello Step 4. Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p &= \underbrace{\sum_{i \in J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{\text{ricopio}} + \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p \\ &\leq \underbrace{\sum_{i \in J} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{\substack{\downarrow \text{(somma FINITA)} \\ 0}} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_n(i)|^p}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{2^{p-1} \sum_{i \in I \setminus J} |f_\infty(i)|^p}_{\leq \varepsilon} \end{aligned}$$

$|a-b|^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$

Ma allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p \leq 2 \cdot 2^{p-1} \cdot \varepsilon$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, abbiamo la tesi
— o — o —

Achtung! Il p.to fondamentale è avere le code uniformem. piccole.

Occhio a non cadere nella grande tentazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p = \sum_{i \in I} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(i) - f_\infty(i)|^p}_{=0} = 0$$

(NON SI SCAMBIANO LIMITI E SERIE INFINITE).
— o — o —

Oss. Nel caso in cui $p=2$ e $I = \mathbb{R}$ (o qualunque cosa più che numerabile), abbiamo un esempio di spazio di Hilbert che non ammette una base Hilbertiana numerabile.

In questo caso una base Hilbertiana sono le funzioni $\{f_i\}_{i \in I}$ definite da

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=i \\ 0 & \text{se } x \neq i \end{cases}$$

È banale verificare che sono ortonormali e che hanno Span denso.

Domanda Potrebbe esistere un'altra base (ovviamente diversa) una numerabile?

Certamente NO Se uno spazio ha base Hilbertiana numerabile, allora è separabile, e questo non dovrebbe esserlo.

Si può fare con le mani: se $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ fosse una base numerabile, allora l'insieme degli indici in cui almeno un elemento è $\neq 0$ sarebbe numerabile.

Di conseguenza tutti gli elementi dello spazio, scrivendosi come serie delle f_n , sarebbero nulli al di fuori di uno stesso insieme numerabile di indici, il che ovviamente non è vero.

Quindi una base Hilbertiana numerabile non esiste, e lo spazio non può essere separabile.

Anche quest'ultimo fatto si può dim. direttamente (se esistesse un denso $\{f_n\}$ numerabile, allora sarebbe $\neq 0$ solo ...).

— o — o —