

# Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 70

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Operatore primitiva Data  $f \in L^1((0,3))$ , definiamo  $Af: (0,3) \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$[Af](x) := \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in (0,3).$$

Osserviamo che si tratta di un operatore lineare.

(a) Determinare se  $A: L^2((0,3)) \rightarrow L^2((0,3))$  è continuo.

Intanto è ben definito, in quanto  $Af$  è pure limitata.

Essendo lineare, per la continuità basta studiare la limitatezza

$$\begin{aligned} |[Af](x)| &\leq \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \\ &\leq \left\{ \int_0^x |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^x 1 dt \right\}^{1/2} \\ &\leq \left\{ \int_0^3 |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

da cui  $\|Af\|_{L^\infty((0,3))} \leq \sqrt{3} \|f\|_{L^2((0,3))}$ . Integrando nuovamente:

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \int_0^3 |Af|^2 dx \leq 3 \int_0^3 \|f\|_{L^2}^2 \leq 9 \|f\|_{L^2}^2.$$

Facendo la radice abbiamo la tesi  $\|Af\|_{L^2} \leq 3 \|f\|_{L^2}$ .

Oss. In modo del tutto analogo si dimostra che

$A: L^p((0,3)) \rightarrow L^q((0,3))$  è continuo per ogni scelta di  $p \geq 1$  e  $q \geq 1$  (compresi  $+\infty$ )

(b) Determinare la norma di  $A: L^p((0,3)) \rightarrow L^\infty((0,3))$

Come sopra 
$$|[Af](x)| \leq \int_0^3 |f(t)| \cdot 1 dt$$
$$\leq \left\{ \int_0^3 |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \cdot 3^{1/p'}$$

da cui, facendo il sup al variare di  $x \in (0,3)$ :

$$\|Af\|_{L^\infty((0,3))} \leq 3^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^p} \text{ e quindi } \|A\|_{op} \leq 3^{\frac{1}{p'}}.$$

Si può ottenere il segno di  $=$ ? Ocome = in Hölder, il che è possibile prendendo  $f$  costante.

Ad esempio, per  $f(x) \equiv 1$  otteniamo  $\|f\|_{L^p} = 3^{\frac{1}{p}}$  e  $[Af](x) = x$  e quindi  $\|Af\|_{L^\infty} = 3$  e quindi

$$3 = \|Af\|_{L^\infty} \leq \|A\|_{op} \cdot \|f\|_{L^p} = \|A\|_{op} \cdot 3^{\frac{1}{p}}$$

da cui  $\|A\|_{op} \geq 3^{1-\frac{1}{p}} = 3^{\frac{1}{p'}}$ , da cui la tesi.

(c) Determinare la norma di  $A: L^2((0,3)) \rightarrow L^2((0,3))$ .

Dobbiamo calcolare  $\sup \{ \|Af\|_{L^2((0,3))} : \|f\|_{L^2((0,3))} \leq 1 \}$

Se poniamo  $u := Af$ , notiamo che  $u \in H^1((0,3))$  e  $u(0) = 0$ , e possiamo riscrivere il sup come

$$\sup \{ \|u\|_{L^2} : \|u'\|_{L^2} \leq 1, u(0) = 0 \}$$

cioè facendo il quadrato

$$\sup \left\{ \int_0^3 u(x)^2 dx : \int_0^3 u'(x)^2 dx \leq 1, u(0) = 0 \right\}$$

Visto così si tratta della COSTANTE DI POINCARÉ con una sola DBC. Il sup è in realtà un max (metodo diretto) e il punto di max risolve un'eq. del tipo

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(0) = 0 \\ u(3) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \uparrow \text{moltiplicatore di Lagrange} \\ \text{(NBC on the road)} \end{array}$$



Si verifica che esistono infiniti  $\lambda$  negativi per cui c'è soluzione e le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = a \sin\left(\frac{\pi}{6} x (2n+1)\right)$$

deve rendere  
il vincolo integrale = 1

Quella che massimizza è quella con  $n=0$ , cioè  $a \sin\left(\frac{\pi}{6} x\right)$ .  
Faccendo i conti si trova la norma dell'operatore!

Oss. Norme di  $A: L^p \rightarrow L^q$  si riducono ad analoghi problemi di max vincolato con esponenti diversi

(d) Determinare se  $A: L^{\frac{6}{5}}((0,3)) \rightarrow L^{\infty}((0,3))$  è cpt.

Brutal mode:  $A$  fa la primitiva, quindi rende più regolari, quindi fa entrare in un club + esclusivo, quindi sarà compatto.

Rigorosamente: sia  $\{f_n\} \subseteq L^{\frac{6}{5}}((0,3))$  limitata. Allora  $\{Af_n\}$  sono equi  $\frac{6}{5}$  Hölder  $(\frac{1}{p})$  e sono equilimitate grazie alla DBC in  $x=0$ .

A.A.  $\Rightarrow \exists f_{n_k} \rightarrow f_{\infty}$  unif., quindi in  $L^{\infty}$  e in tutti i possibili spazi  $L^p$ .

Altro esercizio Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  una palla. Consideriamo il problema

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} (u^2 - u^{20}) dx : u \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} |\nabla u|^7 dx \leq \varepsilon \right\}$$

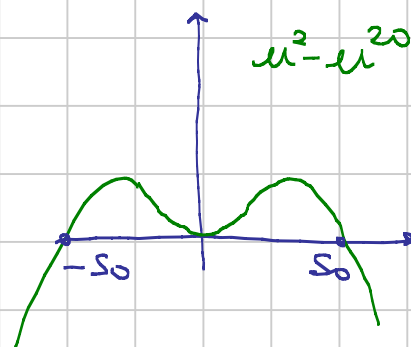
Osservo che  $\inf \leq 0$  perché posso sempre usare  $u(x) \equiv 0$ .

(a) Esistono valori di  $\varepsilon$  e  $d$  per cui  $\inf = \min = 0$ ?

Sì, basta che  $W^{1,7}$  si immerga in  $L^\infty$  ed  $\varepsilon$  sia abbastanza piccolo.

Analisi 1  $\Rightarrow$  esiste  $s_0 > 0$  t.c.

$$s^2 - s^{20} \geq 0 \quad \forall s \in [-s_0, s_0]$$



Ist AM  $\Rightarrow$  se vale l'immersione, allora

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(d, \Omega) \|u\|_{1,7,\Omega}$$

Inoltre per Poincaré, essendo  $u$  nulla al bordo, avremo

$$\|u\|_{1,7,\Omega} \leq c_1(d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^7(\Omega)}$$

e quindi in conclusione

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \underbrace{c_2(d, \Omega) \|\nabla u\|_{L^7(\Omega)}}_{\leq s_0 \text{ se } \varepsilon \text{ è piccolo}}$$

Quindi per  $\varepsilon$  piccolo vale che  $\int_{\Omega} u^2 - u^{20} \geq 0$  per ogni  $u$  ammissibile?

Quando vale  $W^{1,7}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ ? Seme  $7 > d$ .

Quindi è vero fino alla dimensione 6 per  $\varepsilon$  piccolo.

(b) esistono valori di  $\varepsilon$  e  $d$  per cui  $\inf = -\infty$ ?

Sì, è vero per ogni  $\varepsilon > 0$  non appena  $W^{1,7} \not\hookrightarrow L^{20}(\Omega)$ , cioè appena  $20 > 7^*$ , cioè

$$20 > \frac{7d}{d-7} \Leftrightarrow 20d - 140 > 7d \Leftrightarrow 13d > 140 \Leftrightarrow d \geq 11$$

Conviene provare con il solito riscaldamento. Supponendo  $\Omega$  con centro nell'origine, prendiamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  e per  $\lambda \geq 1$  poniamo

$$u(x) = \lambda^a \varphi(\lambda x)$$

Scegliendo bene l'esponente  $a$  dovrebbe essere vero che  $\|\nabla u\|_{L^7} \rightarrow 0$  e  $\|u\|_{L^{20}} \rightarrow +\infty$  e  $\|u\|_{L^2} \rightarrow 0$ .

Da questo segue la tesi (fare i conti).

(c) Esistono valori di  $\varepsilon$  e  $d$  per cui  $\inf = \min =$  numero reale negativo? (Almeno se pensiamo al min in  $W^{1,7}$ )

Sì, è vero per ogni  $\varepsilon$  abbastanza grande se la dimensione è  $d \leq 10$ , e quindi vale l'immersione  $W^{1,7}(\Omega) \hookrightarrow L^{20}(\Omega)$ .

L'immersione garantisce  $\inf \in \mathbb{R}$  per ogni  $\varepsilon \geq 0$ .

Infatti questo permette di stimare

$$\int_{\Omega} u^2 \text{ e } \int_{\Omega} u^{20} \text{ in termini di } \varepsilon.$$

Fissata  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , usiamo  $u(x) = m\varphi(x)$ , quando  $m$  è grande riusciamo a rendere  $\int_{\Omega} (u^2 - u^{20}) dx < 0$  (senza che  $20 > 2$ ).

Quindi esiste  $u \in W^{1,7}(\Omega)$  che rende l'integrale negativo. Se  $\varepsilon$  è abbastanza grande, questa  $u$  è un candidato ammissibile. Quindi  $\inf$  esiste ed è reale.

Metodo diretto classico  $\Rightarrow$  esiste il minimo. 😊

— ☺ — ☺ — ☺ —