

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 69

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

NEUMANN LAPLACIAN

$\Omega := (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$ e consideriamo

$$Au = -\ddot{u}$$

$$A: \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2((0, \pi))$$

con dominio

$$\mathcal{D}(A) := \{ u \in H^2((0, \pi)) : \underline{\dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0} \}$$

NBC (ben definite in H^2)

Si tratta di un operatore di moltiplic. rispetto alla base ortogonale (ma facilmente normalizzabile)

$$\{ \cos(mx) : m \geq 0 \text{ intero} \}$$

$\uparrow u=0$ compreso e diventano le costanti

Oss. Ristretto in partenza ed arrivo alle funzioni a media nulla è l'inverso del solver del pbm

$$-\ddot{u} = f \quad \dot{u}(0) = \dot{u}(\pi) = 0 \quad S: f \rightsquigarrow u$$

(vedi qualche les. precedente).

Gli autovalori sono $\{ m^2 : m \geq 0 \text{ intero} \}$ poiché

$$A \cos(mx) = m^2 \cos(mx)$$

Esercizio Determinare $\mathcal{D}(A^{1/2})$. Claim: si tratta di $H^1((0, \pi))$.
(senza ulteriori BC)

Ricordiamo che

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx) : \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{D}(A^s) := \left\{ \quad \quad \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{4s} u_n^2 < +\infty \right\}$$

$$u_n = \int_0^\pi u(x) \cos(nx) dx$$

(modulo qualche costante)

Ci sono due verifiche da fare

$$\textcircled{1} \quad u \in D(A^{1/2}) \Rightarrow u \in H^1((0, \pi))$$

$$\textcircled{2} \quad u \in H^1((0, \pi)) \Rightarrow u \in D(A^{1/2}), \text{ cioè } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 < +\infty$$

Verifica di $\textcircled{1}$ Per ipotesi $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx)$ con $\uparrow \substack{n \geq 0 \\ L^2((0, \pi))}$ con $\uparrow$

Consideriamo la serie delle derivate

$$- \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot n \sin(nx)$$

Questa converge in L^2 perché $\{\sin(nx)\}$ sono ortogonali e $\sum u_n^2 n^2 < +\infty$. Allora chiamate S_n le somme parziali di quella iniziale abbiamo che

$$S_n(x) \rightarrow u(x)$$

$$S'_n(x) \rightarrow v(x) \text{ forti } L^2.$$

Per le solite ragioni $u \in H^1$ e $v(x) = u'(x)$.

Verifica di $\textcircled{2}$ Per ipotesi $u \in H^1$. Integrando per parti (ora posso) troviamo che

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^\pi u(x) \cos(nx) dx = \left[- \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}}_0 u(x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} u'(x) dx \\ &= \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^\pi \sin(nx) u'(x) dx}_{v_n} \end{aligned}$$

Osserviamo che i v_n sono i coeff. di F di $u'(x)$ rispetto ad un sistema "quasi ortonormale" $\{\sin(nx)\}$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 u_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty, \text{ cioè } u \in D(A^{1/2}).$$

Esercizio $D(A^2) = \{u \in H^4((0, \pi)) : \underbrace{\ddot{u}(0) = \ddot{u}(\pi) = \ddot{\ddot{u}}(0) = \ddot{\ddot{u}}(\pi) = 0}_{\text{on the road}}\}$

$D(A^2) \Rightarrow H^4 + BC$ L'ipotesi è che $\sum_{n=0}^{\infty} n^8 u_n^2 < +\infty$.

Da questa si deduce che, scritta $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx)$, convergono anche la serie delle derivate fino alla 4^a, da cui $u \in H^4$. Inoltre

$$\ddot{\ddot{u}}(x) = + \sum_{n=0}^{\infty} n^3 \sin(nx)$$

converge pure uniformemente e le somme parziali si annullano al bordo.

$H^4 + BC \Rightarrow D(A^2)$ Devo dim. che $\sum n^8 u_n^2 < +\infty$, ma

$$u_n = \int_0^{\pi} u(x) \cos(nx) dx \stackrel{\text{si } u=0 \text{ al bordo}}{=} -\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \ddot{u}(x) \sin(nx) dx$$

$$\stackrel{\ddot{u}(0)=\ddot{u}(\pi)=0}{=} + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \ddot{\ddot{u}}(x) \cos(nx) dx$$

$$\stackrel{\text{si } \ddot{u}=0 \text{ al bordo}}{=} -\frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} \ddot{\ddot{\ddot{u}}}(x) \sin(nx) dx$$

$$\stackrel{\ddot{\ddot{u}}(0)=\ddot{\ddot{u}}(\pi)=0}{=} -\frac{1}{n^4} \underbrace{\int_0^{\pi} \ddot{\ddot{\ddot{\ddot{u}}}}(x) \cos(nx) dx}_{v_n}$$

Come prima $\sum_{n=0}^{\infty} n^8 u_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 < +\infty$ perché $\{\cos(nx)\}$ sono quasi ortonormali.

— o — o —

Spari $H^S((0, \pi))$ definiti a partire dal Dirichlet Laplacian

$$H^S((0, \pi)) = D(A^{S/2}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \underbrace{\sin(nx)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Dirichlet Laplacian}}} : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2S} u_n^2 < +\infty \right\}$$

"
 $W^{S,2}((0, \pi))$

Dirichlet Laplacian

Per questi spazi valgono gli analoghi dei teoremi di immersione

$$u \in W^{s,p}(\Omega) \begin{cases} \nearrow u \in L^q(\Omega) & \forall q \leq \frac{pd}{d-sp} & \text{se } sp < d \\ \rightarrow u \in L^q(\Omega) & \forall q < +\infty & \text{se } sp = d \\ \searrow u \text{ è } s - \frac{d}{p} \text{ Hölder} & & \text{se } sp > d \end{cases}$$

se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ è un aperto abbastanza regolare

Nel caso specifico $\Omega = (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$, quindi $d=1$ e $p=2$ otteniamo

$$u \in H^2((0, \pi)) \begin{cases} \nearrow u \in L^q((0, \pi)) & \forall q \leq \frac{2}{1-2s} & \text{se } s \in (0, \frac{1}{2}) \\ \rightarrow u \in L^q((0, \pi)) & \forall q < +\infty & \text{se } s = \frac{1}{2} \\ \searrow u \text{ è } s - \frac{1}{2} \text{ Hölder} & & \text{se } s \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

$\uparrow$
per $s=1$ diventa il classico
 $u \in H^1 \Rightarrow u \text{ è } \frac{1}{2} \text{ Hölder}$

se $s \in (0, \frac{1}{2})$ e $q > \frac{2}{1-2s}$, allora $H^2 \not\hookrightarrow L^q$

Costruiamo controesempio del tipo $u(x) = \frac{1}{x^a}$.

Sappiamo che $u \notin L^q \Leftrightarrow \int_0^\pi \frac{1}{x^a q} dx = +\infty \Leftrightarrow \boxed{a \geq \frac{1}{q}}$

Ora

$$u_m = \int_0^\pi \frac{1}{x^a} \sin(mx) dx = \int_0^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y^a} dy \quad \begin{matrix} \uparrow \\ mx=y \\ dx = \frac{1}{m} dy \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{\int_0^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y^a} dy} \\ \downarrow \text{Analisi } \pm \end{matrix} \sim \text{cost } \frac{1}{m^{1-a}}$$

$$0 < \ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y^a} dy$$

Quindi $u \in H^s \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} \frac{1}{n^{2-2a}} < +\infty \Leftrightarrow 2-2a-2s > 1$

$$\Leftrightarrow 2a < 1-2s \Leftrightarrow \boxed{a < \frac{1}{2}-s}$$

Quindi per il controesempio serve trovare a t.c.

$$\frac{1}{q} \leq \alpha < \frac{1}{2} - s$$

e questo è possibile $\Leftrightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{2} - s = \frac{1-2s}{2} \Leftrightarrow q > \frac{1-2s}{2}$ 😊

$s \in (\frac{1}{2}, 1) \text{ e } u \in H^s \Rightarrow u \text{ è } \alpha \text{-Hölder con } \alpha < s - \frac{1}{2}$

Per ipotesi $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 n^{2s} < +\infty$

Osserviamo che $\sin(x)$ è α -Hölderiana con una costante H_α .
Con i soliti argomenti si verifica che $a \sin(bx)$ è
 α -Hölderiana con costante $H_\alpha |a| \cdot |b|^\alpha$
e in particolare ↑ facendo α derivare, b esce alla potenza α

$u_n \sin(nx)$ è α -Hölderiana con costante $H_\alpha |u_n| \cdot n^\alpha$.

Per dimostrare che $u(x)$ è α -Hölderiana basta la convergenza delle serie delle costanti di Hölder (basta una non serve, e in questo sta la non ottimalità di questa dimostrazione).

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot n^\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| n^s n^{\alpha-s} \\ &\leq \underbrace{\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 n^{2s} \right\}^{1/2}}_{\text{converge per hp}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s-2\alpha}} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

e la seconda converge $\Leftrightarrow 2s - 2\alpha > 1 \Leftrightarrow 2\alpha < 2s - 1$

$$\Leftrightarrow \alpha < s - \frac{1}{2} \quad \text{😊}$$

Oss. la dimostrazione per $\alpha = s - \frac{1}{2}$ è più delicata, perché la cond. suff. non è verificata per forza.