

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 68

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

"Autovalore non lineare". Indagare l'esistenza di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui il problema

$$\ddot{u} = \lambda u^3 \quad u(0) = u(1) = 0$$

ha una soluzione $u(x) \equiv 0$.

λ deve essere negativo

Moltiplicando per u e integrando per parti si ottiene

$$\lambda \int_0^1 u^4 dx = \int_0^1 \ddot{u} u dx = \underbrace{[\dot{u} u]_0^1}_{\text{DBC}} - \int_0^1 \dot{u}^2 dx < 0 \Rightarrow \lambda < 0$$

Per comodità scriviamo $\ddot{u} = -\lambda u^3$ con $\lambda > 0$

Problema vincolato $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 dx : u \in H_0^1 \text{ e } \int_0^1 u^4 dx = 1 \right\}$
DBC $\uparrow$ $\int_0^1 u^4 dx = 1$ $\uparrow$ va bene anche 1/7

L'esistenza è una facile applicazione del metodo diretto. Da

$$\int_0^1 \dot{u}_n^2 \leq M + \text{vincolo integrale} \Rightarrow \begin{aligned} u_{n_k} &\rightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_{n_k} &\rightarrow \dot{u}_\infty \end{aligned}$$

La sci è gratis, mentre DBC e il vincolo integrale passano al limite grazie alla convergenza uniforme. Quindi il minimo esiste.

Sia u un p.to di min, e applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Poniamo

$$F(u) := \int_0^1 u^2 dx$$

$$G(u) := \int_0^1 u^4 dx - 1$$

Ricordiamo in almeno uno dei 2 casi.

→ $\delta G(u, \varphi) = 0$ per ogni φ ammissibile, cioè

$$4 \int_0^1 u^3 \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \text{ "ammissibile"}$$

Ora basta prendere $\varphi \in C_c^\infty$ per scoprire che $u \equiv 0$, ma questo NON è compatibile con il vincolo.

→ Esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u, \varphi) = \lambda \delta G(u, \varphi)$ cioè

$$2 \int_0^1 u \varphi dx = 4\lambda \int_0^1 u^3 \varphi dx$$

Questo ci dice che u ha derivata debole uguale a $-2\lambda u^3$ e quindi $u \in H^2$ e

$$u'' = -2\lambda u^3 \quad \ddot{u}$$

Da qui a C^∞ il passo è breve

— o — o —

Impostazione alternativa

$$\max \left\{ \int_0^1 u^4 dx : \int_0^1 u^2 dx = 1, u \in H_0^1((0,1)) \right\}$$

Abbiamo esistenza per questo problema?

Non immediatamente Se proviamo il metodo diretto, prendiamo succ. supizzante $\{u_n\}$.

Dalle DBC e da $\|u_n\|_{L^2} = 1$, gratis segue che

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ unif. e } u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty \text{ debole}$$

Ora

$$\int_0^1 u_n^4 dx \rightarrow \int_0^1 u_0^4 dx \quad \text{😊}$$

ma purtroppo il vincolo integrale su u non passa al lim. 😞

Passo intermedio Lo stesso argomento mostra che

$$\max \left\{ \int_0^1 u^4 dx : u \in H_0^1((0,1)), \int_0^1 u^2 dx \leq 1 \right\}$$

esiste (anche se è un p.b.m. di max, visto che nel funz. $u \mapsto \int u^4$ le abbiamo continuità)

CLAIM il max del problema con il $\leq$ SATURA IL VINCOLO, cioè lo realizza con $=$.

Solito argomento di riscaldamento: se il max venisse raggiunto da una certa $u_0 \in H^1$ con $\int_0^1 u_0^2 dx < 1$, allora

potrei considerare λu_0 per un qualche $\lambda > 1$. Il vincolo sarebbe ancora OK, ma $\int \lambda^4 u_0^4 dx$ sarebbe + grande.

In più variabili, cosa diventano questi discorsi?

$\Omega = B(0,1)$ in $\mathbb{R}^d$ e proviamo a risolvere

$$\Delta u = -\lambda u^3 \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

L' impostazione variazionale

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u^4 dx = 1 \right\}$$

Abbiamo esistenza?

Provando il metodo diretto arriviamo a

$$\|u_m\|_{L^4(\Omega)} \leq 1$$

$\Downarrow$

$$\|u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$$

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$$

Quindi in conclusione $\|u_m\|_{1,2,\Omega} \leq M''$, cioè $\{u_m\}$ è limitata in $H^1(\Omega)$.

Per Rellich-Kondrachov esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ in L^q
 $\nabla u_{m_k} \rightarrow \nabla u_\infty$ debole L^2

La convergenza in L^q vale per ogni $q < 2^*$. Se per caso $4 < 2^*$, allora 😊 perché

$$\int_{\Omega} u_{m_k}^4 dx \rightarrow \int_{\Omega} u_\infty^4 dx$$

quindi il vincolo integrale passa al limite ed il resto è sc1.

$$4 < 2^* = \frac{2d}{d-2} \quad (\Leftrightarrow) \quad 4d - 8 < 2d \quad (\Leftrightarrow) \quad d < 4$$

cioè $d \in \{2, 3\}$

Quindi se $d \in \{2, 3\}$ il pbm. di minimo ha soluzione, e poi si procede come nel caso 1-dim.

Caso $d > 4$ Dico che $\inf = 0$ e minimo non esiste.

Proviamo con riscalamenti out. Prendiamo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e poniamo

$$u(x) := A(\lambda) \varphi(\lambda x)$$

Questa $\in C_c^\infty(\Omega)$ se $\lambda \geq 1$ (per $\lambda < 1$ prima o poi il supporto esce da Ω). Scegliamo $A(\lambda)$ in modo da rispettare il vincolo integrale e poi vediamo che accade al gradiente

$$1 = \int_{\Omega} u(x)^4 dx = [A(\lambda)]^4 \int_{\Omega} \varphi(\lambda x)^4 dx$$

$$= [A(\lambda)]^4 \frac{1}{\lambda^d} \underbrace{\int_{\Omega} \varphi(y)^4 dy}_{= \text{cost}}$$

$$y = \lambda x$$

$$dx = \frac{1}{\lambda^d} dy$$

Quindi $A(\lambda) = c \lambda^{d/4}$

D'altra parte $\nabla u(x) = \lambda A(\lambda) \nabla \varphi(\lambda x)$

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \lambda^2 A(\lambda)^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi(\lambda x)|^2 dx$$

$$= \lambda^{2-d} c \lambda^{d/2} \cdot \text{cost}$$

$$= \lambda^{2-\frac{d}{2}} \cdot \text{cost}$$

Se $d > 4$, allora $\text{RHS} \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$ e quindi $\inf = 0$.

Oss. Il fatto che il pbm. di min. vincolato non ha soluzioni non autorizza a dire che non c'è l'autorale non lineare, ma solo che l'approccio variazionale non funziona.

Caso $d = 4$ Fatto che si può dire: se c'è il pto di minimo, allora ce ne sono infiniti, e costituiscono un insieme che non è compatto in molti sensi ragionevoli.

FENOMENO DI CONCENTRAZIONE TIPICO DEI CASI CRITICI

Idea: sia u_0 punto di minimo. Estendiamo a 0 fuori di Ω ottenendo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^4)$. Come prima riscriviamo $u(x) := \lambda u_0(\lambda x)$

Ora

$$\int_{\Omega} u(x)^4 dx = \int_{\Omega} u_0(x)^4 dx, \quad \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx$$

quindi sono tutti di min e il loro supporto "tende a 0".