

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 67

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Per ogni funzione $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ consideriamo $Tf: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$[Tf](x) = \sin(f(x)) \quad \forall x \in (0,1)$$

Vogliamo studiare T come operatore tra diversi spazi funzionali.

Prima osservazione: T NON è lineare.

(a) Determinare se T è continuo $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ con $p \geq 1$ e $q \geq 1$ finiti.

Intanto è ben definito poiché $\sin(f(x)) \in L^q((0,1))$ per ogni q .
Per la continuità osserviamo che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^p \Rightarrow f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ per quasi ogni } x \in (0,1)$$

$\uparrow$ sotto succ.

$$\Rightarrow \sin(f_{n_k}(x)) \rightarrow \sin(f_\infty(x)) \quad "$$

$$\Rightarrow Tf_{n_k} \rightarrow Tf_\infty \text{ grazie all'equi limitatezza}$$

$$\int_0^1 \underbrace{|\sin(f_\infty(x)) - \sin(f_{n_k}(x))|^q}_{\rightarrow 0 \text{ q.o. dominato da } 2^q} dx \rightarrow 0$$

Basta per concludere? NO, perché dobbiamo liberarci della s.succ.

Questo si fa con il solito LEMMA DELLA SOTTO-SOTTO.

Con lo stesso ragionamento si dim. che ogni s.succ. Tf_{n_k} ha una sotto-sotto $Tf_{n_{k_i}}$ che converge a Tf_∞ (sempre lo stesso). Questo implica che

$$Tf_n \rightarrow Tf_\infty \text{ tutta.}$$

(b) Determina se T è continuo come $T: L^2((0,1)) \rightarrow L^\infty((0,1))$

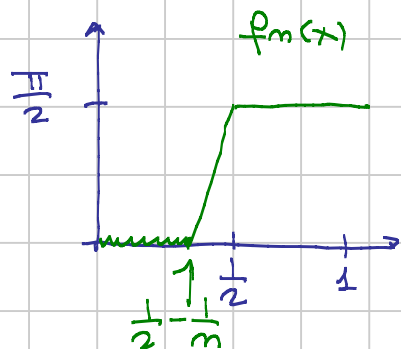
Ancora una volta è ben definito. Se fosse continuo, vorrebbe dire che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^2 \Rightarrow \sin f_n \rightarrow \sin f_\infty \text{ in } L^\infty$$

dunque uniformi

e in particolare se le f_n sono cont., allora f_∞ è cont.

Questo è assurdo. Esempio esplicito



In questo caso f_n e $\sin f_n$ tendono puntualmente ad una funzione discontinua. Inoltre f_n ci tende L^2 .

(c) Determinare se $T: L^4((0,1)) \rightarrow L^2((0,1))$ è Lipschitz.

Senza che $\|Tf(x) - Tg(x)\|_{L^2} \leq \text{cost} \cdot \|f - g\|_{L^4}$

Ora

$$\begin{aligned} \text{LHS}^2 &= \int_0^1 (\sin f(x) - \sin g(x))^2 dx && (\text{uso } |\sin b - \sin a| \leq |b - a|) \\ &\leq \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 \cdot \frac{1}{2} dx \\ &\leq \left\{ \int_0^1 (f(x) - g(x))^4 dx \right\}^{1/2} \cdot 1 \\ &= \|f - g\|_{L^4}^2 \end{aligned}$$

Facendo la radice si ha la tesi con $\text{cost} = 1$.

Vediamo se l'argomento si estende a $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$

$$\begin{aligned}
\|Tf - Tg\|_{L^q}^q &= \int_0^1 |\sin f(x) - \sin g(x)|^q dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|^{\frac{q}{p}} dx \quad (\text{valido se } p \geq q) \\
&\leq \left\{ \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right\}^{\frac{q}{p}} \cdot 1 \\
&= \|f - g\|_{L^p}^q
\end{aligned}$$

Facendo la radice q -esima abbiamo la tesi.

Risposta: L'operatore $T: L^p((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ è 1 -Lip. se $p \geq q$ (in generale la costante di Lip. dipende dalla lunghezza dell'intervallo e dagli esponenti).

(d) Studiare la regolarità di $T: L^2((0,1)) \rightarrow L^4((0,1))$

Morale che ci sta sotto: L^4 è un ambiente + esclusivo rispetto ad L^2 , quindi convergere in L^4 è più difficile che in L^2 .

Non stupisce di aver Lip da L^4 in L^2 , mentre ci si aspetta meno da L^2 in L^4 .

$$\begin{aligned}
\|Tf - Tg\|_{L^4}^4 &= \int_0^1 |\sin(f(x)) - \sin(g(x))|^4 dx \\
&\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)|^4 dx
\end{aligned}$$

e sono fregato (non c'è speranza di controllare una norma 4 con una norma 2).

Idea

$$\begin{aligned}
|\sin(f) - \sin(g)|^4 &= |\sin(f) - \sin(g)|^2 \cdot |\sin(f) - \sin(g)|^2 \\
&\leq 4 \quad \leq |f - g|^2
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 |\sin(f(x)) - \sin(g(x))|^4 dx \leq 4 \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx$$

$$= 4 \|f - g\|_{L^2}^2$$

Facendo la radice quarta troviamo

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} \leq \sqrt{2} \|f - g\|_{L^2}^{1/2} \quad \forall (f, g) \in L^2((0, 1))^2$$

il che dice che T è $\frac{1}{2}$ -Hölder.

(Discorso simile vale per $T: L^p \rightarrow L^q$ con $q > p$)

Vogliamo ora dimostrare che $\frac{1}{2}$ -Hölder è ottimale. Per questo usiamo

$$g(x) \equiv 0 \quad f(x) = \mathbb{1}_{[0, \varepsilon]} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{funzione caratteristica}$$

In questo modo $Tg \equiv 0$ e $Tf = \mathbb{1}_{[0, \varepsilon]}$ e quindi

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} = \varepsilon^{1/4} \quad \text{e} \quad \|f - g\|_{L^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \varepsilon^{1/2}$$

E questo mostra che non si può avere meglio di $\frac{1}{2}$ -Hölder

$$\|Tf - Tg\|_{L^4} \leq H_\alpha \|f - g\|_{L^2}^\alpha$$

$$\varepsilon^{1/4} \leq H_\alpha \varepsilon^{\alpha/2} \quad \text{da cui}$$

$$\varepsilon^{\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2}} \leq H_\alpha \quad \text{facendo } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ si vede che } \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

(e) Determinare se $T: H^1 \rightarrow L^4$ è compatto

spazio $\uparrow$ SNOB, quindi forse sì ☺

Affermativo: se $\{f_n\} \subseteq H^1((0,1))$ è limitata, allora

soddisfa le hp di A.A. (equi $\frac{1}{2}$ -Hölder + equilimitate in almeno un pto grazie alla media integrale)

Quindi $\exists f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ uniform., dunque a maggior ragione $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ in $L^4((0,1))$.

Allo stesso modo si verifica che $T: W^{1,p}((0,1)) \rightarrow L^q((0,1))$ è compatto per ogni $p > 1$ e per ogni $q \geq 1$, anche $q = +\infty$.

Domanda: cosa succederà per $p=1$?

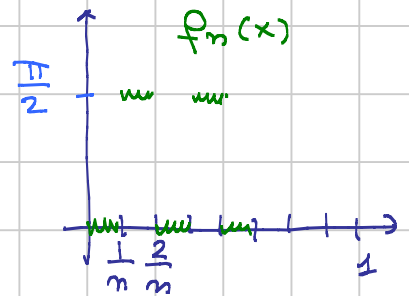
(f) Determinare se $T: L^4 \rightarrow L^2$ è compatto

$\uparrow$ SNOB, ma abbastanza da garantire opt.?

Idea: L^4 NON è abbastanza SNOB, mentre H^1 lo era

Se $\{f_n\} \subseteq L^4$ limitata b.c. $\{stu(f_n)\}$ non ha s.succ. convergenti in L^2 .

Possiamo prendere f_n come in figura (divido $(0,1)$ in n parti e poi alterno 0 e $\pi/2$).



La limitatezza di f_n in L^4 è chiara.

Ora Tf_n alterna 0 ed 1 in modo sempre più fitto.

Si verifica che $Tf_n \rightarrow 0$ debole L^2 (vedi prime lezioni, basta usare funzioni test $\mathbb{1}_{(a,b)}$), quindi 0 è l'unico limite forte possibile (se $Tf_n \rightarrow g_\infty$ forte, allora $Tf_n \rightarrow g_\infty$).

D'altra parte $Tf_n \not\rightarrow 0$ perché $\|Tf_n\|_{L^2} = \|Tf_n - 0\|_{L^2}$ è una costante non nulla.

(g) Determinare se $T: L^2 \rightarrow L^2$ è differenziabile.

Servirebbe che, per ogni $f \in L^2$, esista $L \in \mathcal{L}(L^2, L^2)$ t.c.
"(DT)f

$$T(f+R) = Tf + L_f(R) + o(\|R\|_{L^2}) \quad \text{per } R \xrightarrow{\text{in } L^2((0,1))} 0$$

Usando $R(x) = t\varphi(x)$ con $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in L^2$ si ha che

$$\sin(f(x) + t\varphi(x)) - \sin(f(x)) = t L_f(\varphi) + o(t\|\varphi\|_{L^2})$$

Dividendo per t e facendolo tendere $t \rightarrow 0^+$ si ottiene

$$\cos(f(x)) \cdot \varphi(x) = L_f(\varphi) \quad (\text{il piccolo sparisce})$$

[Nota bene: sono i discorsi che si facevano con i funzionali]

Quindi ora sappiamo chi dovrebbe essere L_f .

Questo NON va bene nemmeno per $f \equiv 0$. Dovrebbe infatti essere

$$\sin(R(x)) = R(x) + o(\|R\|_{L^2}) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Ora posso prendere $R(x) = \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}(x)$ e ottengo

$$(\sin(1) - 1) \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)} = o(\|R\|_{L^2})$$

il che è falso perché $\|R\|_{L^2((0,1))} = \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\|LHS\|_{L^2} = |\sin(1) - 1| \sqrt{\varepsilon}$$

quindi NON è o piccolo.

MORALE: le funzioni tra spazi normati, anche Hilbert,
NON HANNO NESSUNA VOGLIA DI ESSERE
DIFFERENZIABILI !!