

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 66

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Precisazione sul duale di C_0 Teoria: $(C_0)' = \ell^1$ con duality pairing

$$J(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = [J(y)](x)$$

$\uparrow \ell^1 \quad \uparrow C_0$

Step 1 Buona positura e stima $\|J(y)\|_{C_0'} \leq \|y\|_{\ell^1}$

Step 2 Isometria, cioè $\|y\|_{\ell^1} \leq \|J(y)\|_{C_0'}$. Per fare questa, si suppone $y \in \ell^1$ dato, volendo anche non nullo, e per ogni $N \geq 1$ si considera la successione x_N definita da

$$(x_N)_i := \begin{cases} \operatorname{sign}(y_i) & \text{se } i \leq N \\ 0 & \text{se } i \geq N+1 \end{cases}$$

In questo modo è ovvio che $x_N \in C_0$ per ogni N e $\|x_N\|_{C_0} \leq 1$. Inoltre

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |y_i| &= \sum_{i=1}^N y_i \frac{\operatorname{sign}(y_i)}{(x_N)_i} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i (x_N)_i \\ &= [J(y)](x_N) \\ &\leq \|J(y)\|_{C_0'} \cdot \underbrace{\|x_N\|_{C_0}}_{\leq 1} \\ &\leq \|J(y)\|_{C_0'} \end{aligned}$$

Facendo tendere $N \rightarrow +\infty$ abbiamo la tesi.

Step 3 Surogettività. Vedi lezioni ISTAM 20.

Oss. Non posso prendere in un colpo solo $x_i := \operatorname{sign}(y_i)$
(potrebbe non stare in C_0)

Duale di C Sappiamo che $C' = \ell^1 \oplus_1 \mathbb{R}$ con duality pairing

$$J(y, x) := \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i + y_{\infty} \lim_{i \rightarrow +\infty} x_{\infty} =: [J(y)](x)$$

Vediamo lo step 2 in cui si dimostra che $\|y\|_{\ell^1} + |y_{\infty}| \leq \|J(y)\|_{C'}$.
Per ogni $N \geq 1$ poniamo

$$(x_N)_i := \begin{cases} \operatorname{sign}(y_i) & \text{se } i \leq N \\ \operatorname{sign}(y_{\infty}) & \text{se } i > N. \end{cases}$$

Ancora una volta si verifica che $x_N \in C$ (definitiv. è costante) e $\|x_N\|_C \leq 1$. A questo punto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N |y_i| + |y_{\infty}| &= \sum_{i=1}^N y_i \operatorname{sign}(y_i) + y_{\infty} \cdot \operatorname{sign}(y_{\infty}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i (x_N)_i + y_{\infty} \cdot \lim_{i \rightarrow +\infty} (x_N)_i \\ &= [J(y)](x_N) \\ &\leq \|J(y)\|_{C'} \|x_N\|_C \end{aligned}$$

e si conclude come prima.

— o — o —

Elementi strani di $(\ell^{\infty})'$

Consideriamo $L: C \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$L(x) := \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i$$

Si osserva che $|L(x)| \leq \|x\|_{\ell^{\infty}}$ per ogni $x \in C$. Per HB possiamo estendere L ad un elemento di $(\ell^{\infty})'$, che possiamo indicare con

$$\hat{L}: \ell^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$$

Oss. Vale l'immersione isometrica $\ell^1 \rightarrow (\ell^\infty)'$ via il solito duality pairing tra successioni, ma non è surgettiva in quanto $\hat{L}$ non sta nella sua immagine

[basta vedere che succede scontrando con $0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$ posiz. n]

CLAIM: $\hat{L}$ è lungi dall'essere unico. Inoltre per ogni successione vale che

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} x_i \leq \hat{L}(x) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} x_i \quad \forall x \in \ell^\infty$$

(e non può essere sempre uguale all'uno o all'altro, perché non sarebbe lineare)

Caso di allenamento Vedere le possibilità per $L(x)$ dove $x = 3, 7, 3, 7, 3, 7, \dots$

Dalla dim. di HB sappiamo che deve valere

$$L(z) - \|x - z\|_{\ell^\infty} \leq \hat{L}(x) \leq \|x + y\|_{\ell^\infty} - L(y)$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ e ogni $y \in \mathbb{C}$ (condizioni che si ottengono quando si estende da $\mathbb{C}$ a $\text{span}(\mathbb{C}, x)$).

Ponendo $y = 0, 0, 0, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \leq \|x\|_{\ell^\infty} = 7$

Ponendo $z = 3, 3, 3, 3, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \geq 3 - 4 = -1$ e non basta di certo.

Ponendo $z = 7, 7, 7, 7, \dots$ troviamo $\hat{L}(x) \geq 7 - 4 = 3$ 😊

Quindi abbiamo trovato che $3 \leq \hat{L}(x) \leq 7$ sono condizioni necessarie. Mostriamo ora che sono pure sufficienti.

CLAIM Per ogni costante $\gamma \in [3, 7]$ esiste $\hat{L} \in (\mathcal{Q}^\infty)'$ tale che

$$(i) \quad \hat{L}(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i \quad \text{se } x \in C$$

$$(ii) \quad \hat{L}(x) = \gamma \quad \text{se } x = (3, 7, 3, 7, 3, 7, \dots)$$

$$(iii) \quad |\hat{L}(x)| \leq \|x\|_{\mathcal{Q}^\infty} \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{Q}^\infty$$

Sia E il sottospazio di $\mathcal{Q}^\infty$ generato da C e da $3, 7, 3, 7, \dots$.

Basta dimostrare che $\hat{L}$ definita univocamente in E da (i) e (ii) verifica (iii) per ogni $x \in E$. A quel punto ci pensa HB.

Sia ora $x = x_1, x_2, x_3, \dots$ e $y = 3, 7, 3, 7, \dots$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dobbiamo verificare che

$$\hat{L}(x + \beta y) \leq \|x + \beta y\|_{\mathcal{Q}^\infty} \quad (\text{basta senza val. ass. al LHS})$$

ma questo si ottiene ripercorrendo la dimostrazione di HB.

→ Se $\beta = 0$, allora è banale

→ Se $\beta > 0$, allora

$$\begin{aligned} \hat{L}(x + \beta y) &= \hat{L}(x) + \beta \hat{L}(y) \\ &= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \beta \gamma \\ &\leq \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \beta \limsup_{i \rightarrow +\infty} y_i \\ &= \limsup_{i \rightarrow +\infty} (x_i + \beta y_i) \\ &\leq \|x + \beta y\|_{\mathcal{Q}^\infty} \end{aligned}$$

→ se $\beta < 0$, allora poniamo $\beta = -\tilde{\beta}$ e avremo che

$$\begin{aligned}
\hat{L}(x - \hat{\beta}y) &= \hat{L}(x) - \hat{\beta}L(y) \\
&= \hat{L}(x) - \hat{\beta}\gamma \\
&\leq \hat{L}(x) - 3\hat{\beta} \\
&= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i - \liminf_{i \rightarrow +\infty} (\hat{\beta}y_i) \\
&= \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i + \limsup_{i \rightarrow +\infty} (-\hat{\beta}y_i) \\
&= \limsup_{i \rightarrow +\infty} (x_i - \hat{\beta}y_i) \\
&\leq \|x - \hat{\beta}y\|_{\ell^\infty}.
\end{aligned}$$

In ogni caso la disuguaglianza è dimostrata.

Esercizio Dimostrare che ogni $\hat{L}$ che HB estende il limite in c è sempre compreso (e non solo nel caso di $3, 7, 3, 7, \dots$) tra $\liminf$ e $\limsup$.

Oss. Se consideriamo cc come il sottospazio di ℓ^∞ in cui il limite alla Cesàro esiste, questo stesso esempio dice che esistono infiniti elementi di $(cc)'$ che coincidono in c con il limite, e hanno norma ≤ 1 .

[Possiamo scegliere a piacere in $[3, 7]$ il valore che assume sull'elemento $3, 7, 3, 7, \dots$ di cc]

Domanda (con risposta molto prob. negativa): esiste una caratterizzazione decente di $(cc)'$?