

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 65

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Calcolo differenziale ed integrale tra spazi normati

Dimostrazioni per dualità dell'Analisi 2

Esempio 1

$$\left\| \int_{\Omega} f(x) dx \right\| \leq \int_{\Omega} \|f(x)\| dx$$

Setting Analisi 2: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ misurabile con misura finita (ma non necessariamente) e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ e la norma è quella euclidea

Se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ si intende che

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \left(\int_{\Omega} f_1(x) dx, \dots, \int_{\Omega} f_m(x) dx \right)$$

= vettore che ha come componenti l'integr. delle comp.

Vogliamo dim. lo stesso risultato per una norma qualunque in $\mathbb{R}^m$.

[Provare col esempio con la norma 4]

Idea chiave: DIMOSTRAZIONE PER DUALITÀ. Posto $V = \mathbb{R}^m$ con la norma data, l'oss. chiave è che

$$L\left(\int_{\Omega} f(x) dx\right) = \int_{\Omega} L(f(x)) dx \quad (\text{uguaglianza di numeri})$$

per ogni $L \in V'$.

La verifica di questo fatto è la linearità dell'integrale, poiché

$$L(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Ora preso un qualunque $L \in V'$ con $\|L\|_{V'} \leq 1$ vale che

$$\left| L \left(\int_{\Omega} f(x) dx \right) \right| = \left| \int_{\Omega} L(f(x)) dx \right|$$

$$\text{Analisi} \nearrow \leq \int_{\Omega} |L(f(x))| dx$$

$$\|L\|_{V'} \nearrow \leq \int_{\Omega} \|f(x)\|_V dx$$

Ora facciamo il sup del LHS al variare di tutti gli $L \in V'$ con $\|L\|_{V'} \leq 1$. [O usiamo il funzionale allineato dell'argomento].
—o—o—

Oss. per il futuro Con la stessa dim. si può estendere il risultato a funzioni $f: \Omega \rightarrow V$ con V spazio normato qualunque, a patto di aver definito l'integrale per queste funzioni in maniera tale che commuti con gli elementi $L \in V'$,

Oss. Per funzioni $f: \Omega \rightarrow V$ continue, l'integrale si può anche definire alla Riemann via "partizioni taggate". Nel caso $\Omega = (a, b)$ si considerano somme di Riemann del tipo

$$S(P, T) := \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(s_i)$$

è ben definita se V è sp. vett. e commuta con el. di V'

dove $\underbrace{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b}_{\text{partizione}}$ e $\underbrace{s_i \in [t_{i-1}, t_i]}_{\text{tag}}$

Se f è unif. cont., allora esiste un unico $I \in V$ tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall (P, T) \quad \underbrace{\text{diam}(P) \leq \delta}_{\substack{\uparrow \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |t_i - t_{i-1}|}} \Rightarrow \|I - S(P, T)\| \leq \varepsilon$$

$\uparrow$ integrale

Esercizio: verificare che I commuta con appl. lineari

Calcolo Diff. tra spazi normati

Analisi 2: una $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice diff. in x_0 se esiste un'appl. lin. $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ t.c.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \overset{\text{matrice jacobiana}}{A}h + o(\|h\|) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

dove $w(h) = o(\|h\|)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|}{\|h\|} = 0$

$\swarrow$ norma in $\mathbb{R}^m$
 $\nearrow$ norma in $\mathbb{R}^m$

Siano V e W sp. normati, e sia $f: V \rightarrow W$. Diciamo che f è diff. in $v_0 \in V$ se esiste $L \in \mathcal{L}(V, W)$ (lineare e continua) tale che

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \overset{\text{Differenziale di } f \text{ in } v_0, \text{ e' equiv. della matrice jacobiana}}{L}(h) + o(\|h\|_V)$$

dove $w(h) = o(\|h\|_V)$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|w(h)\|_W}{\|h\|_V} = 0$

$\nearrow$ limite in V .

Caso speciale: $V = H$ sp. di Hilbert e $W = \mathbb{R}$. In tal caso per Riesz l'operatore L sta in H' e si rappresenta come prod. scalare, e quindi la formula diventa

$$f(v_0 + h) = f(v_0) + \langle w, h \rangle + o(\|h\|_H)$$

$\uparrow$
 $\nabla f(v_0) = \text{gradiente di } f \text{ in } v_0$

In entrambi i casi valgono risultati analoghi all'analisi 2.

Uguaglianza Lagrange Direzionale

Sia V sp. normato, sia $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ diff. ovunque, e siano $a \in V$ e $b \in V$.

eccessivo, si può risparmiare

↑↑ in arrivo c'è $\mathbb{R}$

Allora esiste c nel segmento di estremi a e b t.c.

$$\varphi(b) - \varphi(a) = [D\varphi(c)](b-a)$$

il RHS è l'equiv. della derivata direzionale con direzione $b-a$

↑
 $c \in V'$ ed è il diff. di φ in c

segmento che congiunge a e b

Dim Basta considerare $\psi(t) := \varphi(a + t(b-a))$ per $t \in [0, 1]$ e osservare che a questa si applica Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(t_0)$$

Ora si conclude osservando che $\psi'(t) = [D\varphi(a + t(b-a))](b-a)$

↑
specie di Chain Rule

e ponendo $c := a + t_0(b-a)$.

Disuguaglianza di Lagrange direzionale

Siano V e W sp. normati, sia $f: V \rightarrow W$ diff. ovunque (ma si può risparmiare) e siano $a \in V$ e $b \in V$.

Allora esiste c nel segmento di estremi a e b tale che

$$\|f(b) - f(a)\|_W \leq \| [Df(c)](b-a) \|_W \leq \| Df(c) \|_{\mathcal{L}(V,W)} \|b-a\|_V$$

↑
 $\in \mathcal{L}(V,W)$ ed è il diff. di f in $c \in V$

Dim Solo la prima disuguaglianza va dimostrata, e si fa per dualità!

Consideriamo un qualunque $L \in W'$ con $\|L\|_{W'} \leq 1$.
Consideriamo la funzione $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(v) := L(f(v))$$

A questa si applica l'uguaglianza direzionale, da cui

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = |[D\varphi(c)](b-a)|$$

da cui

$$\begin{aligned} |L(f(b) - f(a))| &= |L(f(b)) - L(f(a))| \\ &= |\varphi(b) - \varphi(a)| \\ &= |[D\varphi(c)](b-a)| \end{aligned}$$

Chi è $D\varphi$? Per la solita chain rule $D\varphi = \underset{\substack{\uparrow \\ \in W'}}{L} \circ \underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathcal{L}(V, W)}}{Df} \in V'$

ma allora

$$\begin{aligned} &L([Df(c)](b-a)) \\ |L(f(b) - f(a))| &= |L([Df(c)](b-a))| \\ &\leq \underbrace{\|L\|_{W'}}_1 \cdot \|[Df(c)](b-a)\|_W \end{aligned}$$

Facendo il sup del LHS al variare di $L \in W'$ con $\|L\|_{W'} \leq 1$ si ottiene la tesi (in alternativa basta prendere come L il funzionale allineato al vettore $f(b) - f(a)$).

Oss. 1 La dim. è un banale anche nel caso di $V = \mathbb{R}^m$ e $W = \mathbb{R}^m$ con norme strane

Oss. 2 Le due chain rule utilizzate si dimostrano abbastanza facilmente [Falso!].

— o — o —