

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 64

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

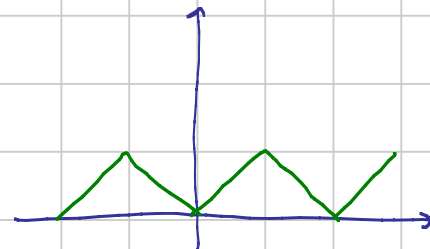
06/10/2020

Esistono $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che non hanno la derivata in nessun punto

Dim a mano Partiamo dalla solita $\varphi(x)$ come in figura.

Poniamo

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \varphi(i_k x)$$



Obiettivo: scegliere succ. $\{\varepsilon_k\}$ e $\{i_k\}$ in modo che la serie converga e abbia le proprietà richieste.

Per la convergenza basta $\varepsilon_k > 0$ e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$$

Per conv. totale, dunque uniforme, $f(x)$ risulta continua e limit. su tutto $\mathbb{R}$.

Voglio scegliere i_k con questa proprietà. Comunque si scelga $x_0 \in \mathbb{R}$, ponendo $R_n = \pm \frac{1}{2i_n}$ (il segno va scelto bene di volta in volta) si ha che

$$|f(x_0 + R_n) - f(x_0)| \geq n |R_n|$$

Se questo è vero, la derivata non può esistere in x_0 .

Fissato $n \geq 1$ scriviamo

$$f(x) = S_{n-1}(x) + \varepsilon_n \varphi(i_n x) + R_n(x)$$

↑
somma parziale
con $k \leq n-1$

↑
resto, cioè la
somma per $k \geq n+1$

Ora $\varphi(i_m x)$ è affine su tratti di lunghezza $\frac{1}{i_m}$, e su ciascuno di questi tratti ha pendenza i_m (supponiamo $i_m > 0$).
 Quindi, visto che $Q = \pm \frac{1}{2i_m}$, posso scegliere il segno in maniera tale che x_0 e $x_0 + Q_m$ stiano nello stesso intervallo in cui $\varphi(i_m x)$ è affine. Ma allora

$$|\varepsilon_m \varphi(i_m(x_0 + Q_m)) - \varepsilon_m \varphi(i_m x_0)| \geq \varepsilon_m i_m |Q_m|$$

e quindi

desidero:



$$\begin{aligned} |f(x_0 + Q_m) - f(x_0)| &\geq |\varepsilon_m \varphi(i_m(x_0 + Q_m)) - \varepsilon_m \varphi(i_m x_0)| \leftarrow \text{grande} \\ &\quad - |S_{m-1}(x_0 + Q_m) - S_{m-1}(x_0)| \leftarrow \text{piccolo} \\ &\quad - |R_m(x_0 + Q_m) - R_m(x_0)| \leftarrow \text{piccolo} \end{aligned}$$

Stimiamo i termini della seconda e 3ª riga

$$|S_{m-1}(x_0 + Q_m) - S_{m-1}(x_0)| \leq \overset{\text{cost. di Lip. di } S_{m-1}}{L_{m-1}} |Q_m|$$

Ora
$$L_{m-1} \leq \sum_{k=1}^{m-1} L_k = \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k.$$

Per l'ultima riga, facciamo una stima estremamente drastica:

$$|R_m(x_0 + Q_m) - R_m(x_0)| \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |R_m(x)| = 2 \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k$$

Mettendo tutto insieme abbiamo ottenuto

$$|f(x_0 + Q_m) - f(x_0)| \geq \left\{ \varepsilon_m i_m - \sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon_k i_k - 4 i_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k \right\} |Q_m|$$

↑
abbiamo moltiplicato e diviso per R_m

Serve che $\{ \dots \} \rightarrow +\infty$ per $m \rightarrow +\infty$

Quindi a noi serve

$$\varepsilon_m i_m \rightarrow +\infty \quad (B)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k i_k < \varepsilon_m i_m \quad (C)$$

$$\frac{1}{i_m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k < \varepsilon_m \quad (D)$$

oltre alla richiesta iniziale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty \quad (A)$$

Idea dalla lezione precedente: era utile $\frac{1}{n} \varphi(n^2 x) \dots$

Poniamo $\varepsilon_k := \frac{1}{10^k}$ e $i_k = 100^k$. Vediamo cosa funziona.

(A) è banale e (B) pure

(D) è la solita

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k = \frac{1}{9} \frac{1}{10^m} = \frac{1}{9} \varepsilon_m$$

$$\text{Verifichiamo (C): } \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k i_k = \sum_{k=1}^{n-1} 10^k = \frac{10^n - 1}{9} < \frac{10^n}{9} = \frac{\varepsilon_m i_m}{9} \quad \text{😊}$$

Mettendo tutto insieme: qualunque sia x_0 , esiste $\delta_m \rightarrow 0$ tale che

$$|f(x_0 + \delta) - f(x_0)| \geq \left\{ 10^m - \frac{10^m}{9} - \frac{10^m}{9} \right\} |\delta| = \frac{7}{9} 10^m |\delta|$$

e questo impedisce a $f'(x_0)$ di esistere!

Oss. Abbiamo seguito una via euristica, ma alla fine abbiamo dimostrato che

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \varphi(100^k x)$$

è continua in $\mathbb{R}$, ma non derivabile.

Esempio (Hölder $\not\Rightarrow$ Sobolev)

Abbiamo visto che $f \in H^1((a,b)) \Rightarrow f$ è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana in (a,b) .
Non vale il viceversa, nemmeno nelle forme più deboli possibili,
cioè esiste f che è $\frac{1}{2}$ -Hölder in $(0,1)$ ma non sta nemmeno
in $W^{1,1}((0,1))$.

(e si può aggravare richiedendo che f sia α -Hölder per ogni $\alpha < 1$)
(la Hölderianità sotto la Lip. non implica essere Sobolev)

Grosso indizio: non c'è verso di stimare la norma L^1 della
derivata in termini della costante di Hölder
nella dim.

Prendiamo la solita $\varphi(x)$. Questa è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana con una
certa costante H_0 . Il punto fondamentale è che $\varepsilon \varphi(\lambda x)$
è $\frac{1}{2}$ -Hölderiana con costante $\varepsilon \lambda^{1/2} H_0$ (dimostrare per
bene questo lemma di Analisi 1).

Ora se prendiamo $\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$ abbiamo che sono
equi- $\frac{1}{2}$ -Hölder, pure tutte con la stessa costante, ma la
norma L^1 delle derivate scoppiano (e a fortiori le norme L^p).

Dall'indizio alla dim via BAIRE Consideriamo lo spazio

$$V := \left\{ f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(y) - f(x)| \leq |y - x|^{1/2} \right. \\ \left. \forall (x,y) \in (0,1)^2 \right\} \leftarrow \text{Ho fissato la costante di Lip}$$

Si verifica che V è sp. di Banach rispetto alla norma del sup.
Dico che V contiene funzioni che NON sono $W^{1,1}((a,b))$ per
ogni $(a,b) \subseteq (0,1)$.

Prendiamo

$$C_k := \left\{ f \in V : \text{esiste } a \in (0, 1 - \frac{1}{k}) \text{ t.c.} \right. \\ \left. f \in W^{1,1}\left(a, a + \frac{1}{k}\right) \text{ e } \|f'\|_{L^1\left(a, a + \frac{1}{k}\right)} \leq k \right\}$$

sto rendendo quantitativa la lunghezza
dell'intervallo e la norma della derivata.

Passo 1 I C_k sono chiusi. Se $f_n \rightarrow f_\infty$, allora a meno di s.succ. $a_n \rightarrow a_\infty$ e si tratta di dimostrare che $f_\infty \in W^{1,1}(C_{a_\infty, a_\infty + \frac{1}{k}})$ e $\|f'_\infty\|_{L^1(C_{a_\infty, a_\infty + \frac{1}{k}})} \leq k$

[Sistemare i dettagli (in tutto ciò k è fisso)]

Passo 2 I C_k hanno parte interna vuota (e questo basta per finire).

Supponiamo che $B_r(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$ per qualche $f_0 \in V$, $r_0 > 0$, $k_0 \geq 1$.

Primo punto chiave: possiamo assumere (a meno di convoluzioni e riduzioni di raggio) che

→ f_0 è di classe C^1 in (a, b) con derivata limitata

→ f_0 è $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante strettamente minore di 1 (se serve cambio f_0 con $(1-\varepsilon)f_0$ per ε piccolo)

Secondo punto chiave: consideriamo

↙ basta qualunque
esponente < 2 e > 1

$$f_n(x) := f_0(x) + \frac{1}{n} \varphi(n^{3/2}x)$$

Osserviamo che per n grande $f_n \in B_r(f_0, r_0)$ (in quanto $f_n \rightarrow f_0$ uniformemente). Inoltre la costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di $\frac{1}{n} \varphi(n^{3/2}x)$ tende a 0 e quindi per n grande la costante di $\frac{1}{2}$ -Hölder di f_n è ≤ 1 .

Basta dimostrare che per n grande $\int_a^b |f'_n(x)| dx \geq k_0$ in ogni intervallo di lunghezza $\frac{1}{k_0}$, il che impedisce a f_n di stare in C_{k_0} . Questo segue dal riscaldamento delle derivate, in quanto

$$|f'_n(x)| \geq \sqrt{n} - |f'_0(x)| \geq \sqrt{n} - \text{costante} \quad \forall x \in (0, 1)$$

— 0 — 0 —