

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 63

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

BAIRE VS COSTRUZIONI ESPLICITE

Esempio 1 (Non esistono sp. di Banach con base alg. numerabile)

Dim. via BAIRE Supponiamo per assurdo che $\{v_n\}$ sia base alg.
Consideriamo

$$C_k := \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

Si tratta di una famiglia di chiusi con parte interna vuota la cui unione sarebbe tutto lo spazio, il che è impossibile in uno sp. di Baire.

Fatto essenziale usato: i s.sp. di dim. finita in uno sp. normato sono chiusi (e hanno parte interna vuota)

Dim a mano Supponiamo come sopra $\{v_n\}$ sia base alg.
Supponiamo WLOG che $\|v_n\| = 1$.

Voglio costruire una succ. di Cauchy che non converge, e la cerco del tipo "somme parziali della serie"

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$

Saranno due proprietà:

- La serie sia assolutamente convergente (questo implica che le somme parziali S_n sono una succ. di Cauchy)
- L'eventuale somma NON può stare nelle comb. lin. finite di $v_1, \dots, v_n, \dots$

La prima richiesta si traduce in

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty$$

(qui abbiamo usato che $\|v_k\| = 1$ per ogni $k \geq 1$)

Per la seconda richiesta, torniamo al fatto essenziale usato nella prima dimostrazione. Noi sappiamo che $\text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$ è chiuso e non contiene v_n , dunque

$$\exists r_n > 0 \text{ t.c. } B(v_n, r_n) \cap \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \emptyset$$

Se la serie converge, esisterebbe $n \geq 1$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

la serie la scrivo come

$$\begin{array}{ccc} S_{n-1} + c_n v_n + R_n & & \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{somma parziale} & & \text{resto = serie da} \\ \text{fino a } n-1 & & n-1 \text{ in poi} \end{array}$$

Ora

$$S_{n-1} + c_n v_n + R_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

$$\Updownarrow$$

$$c_n v_n + R_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

$$\Updownarrow$$

$$v_n + \frac{1}{c_n} R_n \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{n-1})$$

ma l'ultima è possibile solo se $\frac{1}{c_n} R_n \notin B(v_n, r_n)$ cioè solo se

$$\frac{1}{|c_n|} \|R_n\| \geq r_n$$

D'altra parte

$$\|R_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|$$

Quindi se sapessimo che

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} r_n |c_n| \quad \forall n \geq 1$$

allora la serie NON potrebbe convergere (le sue somme parziali sarebbero troppo lontane da ogni span di un sottoinsieme finito della base).

Quindi dobbiamo trovare $\{c_m\}$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < +\infty \quad \text{e} \quad \forall m \geq 1 \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} |c_k| \leq \frac{1}{2} \lambda_m |c_m|$$

Quindi, moralmente, c_m deve decadere rapidamente.

Per costruire $\{c_n\}$ supponiamo wlog che $\lambda_n \in (0,1)$ e prendiamo c_n ricorsivamente in modo che $c_1 = 10^{-1}$ e

$$c_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{10} c_n \quad \forall n \geq 1$$

La prima serie converge in quanto $|c_k| \leq 10^{-k}$ per ogni $k \geq 1$.

Per quanto riguarda la seconda serie, osserviamo che

$$c_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{10} c_n, \quad c_{n+2} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{10} c_{n+1} \leq \frac{\lambda_{n+1}}{10} \frac{\lambda_n}{10} c_n \leq \frac{\lambda_n}{10^2} c_n$$

e per induzione $c_{n+i} \leq \frac{\lambda_n}{10^i} c_n$, da cui

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} c_k = \sum_{i=1}^{\infty} c_{m+i} \leq \lambda_m c_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \frac{1}{9} \lambda_m c_m,$$

il che completa la costruzione.

Achtung! Occhio alle "combinazioni lineari infinite".
Uno potrebbe dire: supponiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k = \sum_{k=1}^n a_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte otteniamo q.c. del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k = 0.$$

Domanda: supponiamo che la serie converga assolutamente e che i v_k siano lin. indip.

Possiamo concludere che tutti i b_k sono nulli?

Risposta: NO, nemmeno in uno sp. di Hilbert!

Esempio classico: $v_1 = -\frac{1}{2}e_2$, $v_2 = e_2 - \frac{1}{2}e_3$, $v_3 = e_3 - \frac{1}{2}e_4, \dots$
allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} v_k$$

questa converge assolutamente a 0, ma i v_k sono lin. indip. (dimostrarlo!) e i coeff. non sono tutti nulli.

Esempio 2 (Esistono $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue che non sono derivabili in nessun punto)

Idea della dim. via BAIRE Consideriamo lo spazio

$$V := \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ b.c. } f \text{ è continua e limitata} \}.$$

Si verifica che V è metrico completo (Banach) rispetto alla norma del sup. Consideriamo, per ogni intero $k \geq 1$, l'insieme

$$C_k := \left\{ f \in V : \begin{array}{l} \exists x \in [-k, k] \\ \forall h \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}] \\ |f(x+h) - f(x)| \leq k|h| \end{array} \right\}$$

} maniera di rendere quantitativa l'info che f è derivabile in almeno un punto

Fatto 1. Se f è derivabile in almeno un p.to x_0 , allora esiste $k \geq 1$ tale che $f \in C_k$ (fare verifica formale)

Fatto 2. I C_k sono chiusi. Prendiamo $f_n \rightarrow f_\infty$ con $f_n \in C_k$ per ogni n (qui k lo pensiamo fisso). Ad ogni f_n è associato x_n , e a meno di s.succ. $x_n \rightarrow x_0 \in [-k, k]$. Ora per ogni n sappiamo che

$$|f_n(x_n + \alpha) - f_n(x_n)| \leq k |\alpha| \quad \forall \alpha \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$$

$\downarrow$ $\downarrow$

$$|f_\infty(x_0 + \alpha) - f_\infty(x_0)| \leq k |\alpha| \quad "$$

il che dimostra che $f_\infty \in C_k$ (nel passare al limite ho usato il doppio limite per la conveng. unif. di funzioni continue)

Fatto 3 I C_k hanno parte interna vuota (dunque la loro unione non può essere tutto V).

Supponiamo per assurdo che $B_V(f_0, r_0) \subseteq C_{k_0}$ per opportuni $k_0 \geq 1$, $f_0 \in V$, $r_0 > 0$.

Wlog possiamo assumere che f_0 sia di classe C^1 , almeno in $[-k_0, k_0]$ (altrimenti regolarizzò f_0 per convoluzione o altro modo, e riduco un po' il raggio).

Ora consideriamo l'INGREDIENTE FONDAMENTALE, cioè la funzione φ in figura.

Osserviamo che $\varphi(x)$ è affine a tratti con pendenze ± 1 .

Poniamo

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \varphi(n^2 x)$$



e osserviamo che $\varphi_n(x)$ è affine su tratti di lunghezza $\frac{1}{n^2}$, su ciascuno dei quali ha pendenza $\pm n$.

CLAIM: se poniamo $f_n(x) := f_0(x) + \varphi_n(x)$, allora per n abbastanza grande avremo che $f_n \in B_V(f_0, r_0)$ ma $f_n \notin C_{k_0}$, il che è un guaio!

La prima condizione è vera non appena $\frac{1}{n} < \delta_0$.

Per la seconda condizione dovrebbe essere che esiste $x_n \in [-k_0, k_0]$ t.c.

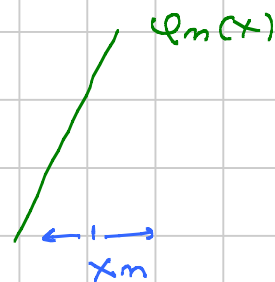
$$|f_n(x_n + \alpha) - f_n(x_n)| \leq k_0 |\alpha| \quad \forall \alpha \in [-\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_0}]$$

D'altra parte, se $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k_0}$, allora per ogni x_n posso trovare

un α con $|\alpha| \leq \frac{1}{2n^2}$ tale che $|\varphi_n(x_n + \alpha) - \varphi_n(x_n)| \geq n|\alpha|$

(Basta che x_n e $x_n + \alpha$ stiano nello stesso tratto affine di $\varphi_n(x)$)

Ma allora



$$\begin{aligned} |f_n(x_n + \alpha) - f_n(x_n)| &\geq |\varphi_n(x_n + \alpha) - \varphi_n(x_n)| \\ &\quad - |f_0(x_n + \alpha) - f_0(x_n)| \\ &\geq n|\alpha| - L|\alpha| \end{aligned}$$

$\uparrow$ costante di Lip di f_0 in $[-k_0, k_0]$

Quando n è abbastanza grande, questo impedisce al LHS di essere $\leq k_0|\alpha|$.

Piccola osservazione: il passaggio da x_n a $x_n + \alpha$, potrebbe farci uscire da $[-k_0, k_0]$, ma si rimedia facilmente assumendo che f_0 sia C^1 , e quindi Lip., in $[-k_0 - 1, k_0 + 1]$.

— o — o —