

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 61

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Spazi di Baire Teoria : ci sono 3 classi classiche di sp. di Baire

- sp. metrichi completi
- sp. loc. compatti (forse serve Hausdorff)
- aperti in sp. di Baire.

Esempi classici

- [1] $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ con la metrica classica sono sp. di Baire (metrici completi, pure $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$:)
- [2] Intervalli (a,b) aperti sono sp. di Baire (aperti in Baire)
- [3] Intervalli $[a,b]$ chiusi sono sp. di Baire (sono metrici completi, oppure localmente compatti)
- [4] Gli aperti in un Banach sono sp. di Baire (aperti in Baire)
- [5] I chiusi in un Banach sono sp. di Baire (sono completi!)
- [6] I chiusi in un metrico completo sono sp. di Baire (sono a loro volta metrici completi)
- [7] I chiusi in un loc. cpt. sono sp. di Baire (sono a loro volta loc. cpt.)
- [8] $\mathbb{Q}$ NON è uno sp. di Baire con la metrica classica

Si verifica che i p.ti sono chiusi con parte interna vuota, ma

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \quad \text{ha parte interna} \neq \emptyset$$

unione numerabile di chiusi
con parte interna vuota

In alternativa

$$\emptyset = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{q\}) \quad \text{non è denso}$$

intersezione num. di aperti densi

Oss. Ma anche in $\mathbb{Z}$ abbiamo che $\mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}$
e l'unione è numerabile. E allora?

Esercizio (o domanda) Caratterizzare i sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$ che sono sp. di Baire.

[9] $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è uno sp. di Baire.

Slogan: se si ha a che fare con la topologia ristretta ad un sottoinsieme, è una questione delicata a prescindere.

Dim Usiamo la caratterizz. con gli aperti e qualche fatto generale

FG1 $A \subseteq I$ è aperto in I se e solo se esiste $\hat{A} \subseteq \mathbb{R}$ aperto in $\mathbb{R}$ tale che $A = \hat{A} \cap I$.

FG2 $B \subseteq I$ è denso in I se e solo se B è denso in $\mathbb{R}$

FG3 Un aperto $A \subseteq I$ (aperto in I) è denso in I se e solo se $\hat{A}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Siano ora A_n degli aperti densi in I . Occorre dim. che la loro intersezione è densa in I .

Per FG1 e FG3, esistono $\hat{A}_n$ aperti e densi in $\mathbb{R}$ t.c.
 $A_n = I \cap \hat{A}_n$.

Ora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n \right) \cap I = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n \right) \cap \left(\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{q\}) \right)$$

intersezione numerabile di aperti densi in $\mathbb{R}$, e quindi è $\neq \emptyset$

In conclusione in LHS è un sottoinsieme di I che è denso in $\mathbb{R}$, dunque a maggior ragione denso in I per FG2.

Esercizio → Dimostrare per bene i fatti generali, sia pensando I ed $\mathbb{R}$ come sp. metrici, sia usando le successioni.
→ Dimostrare che I è sp. di Baire utilizzando una delle caratterizzazioni con i chiusi.

Oss. Dovremmo aver dimostrato più in generale che $\mathbb{R}$ \ insieme numerabile di p.ti è sp. di Baire.
— o — o —

CHIUSO IN BAIRE NON È NECESSARIAMENTE BAIRE

Prendiamo $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in \mathbb{Q}\}}_{X_2}$

Brutalmente: X è tutto $\mathbb{R}^2$ meno gli irrazionali contenuti nell'asse x .

Si osserva facilmente che X_2 è chiuso in X (controimmagine di 0 rispetto alla proiezione sulla seconda componente) ed è omeomorfo a $\mathbb{Q}$, quindi X_2 non è sp. di Baire.

Come dimostro che X è uno sp. di Baire?

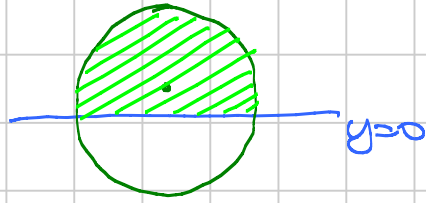
Si può usare un argomento del tutto analogo alla dimostrazione che $\mathbb{R}^2$ è uno sp. di Baire.

Sia A_n una succ. di aperti in X densi, e mostriamo che la loro intersezione è densa, cioè interseca ogni palla di X . Consideriamo $(x_0, y_0) \in X$ e consideriamo una palla con centro in (x_0, y_0) e raggio $r > 0$. Questa avrà intersezione non vuota con il semipiano $y > 0$ o il semipiano $y < 0$.

Supponiamo sia con il semipiano $y > 0$.

Chiamo B_+ questa palla e osservo che

$A_n \cap B_+$ sono aperti densi in B_+
(nello spazio metrico B_+). Ora B_+ è
uno sp. di Baire, dunque



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_+)$$

è densa in B_+ , quindi in particolare $(\bigcap A_n) \cap B_+ \neq \emptyset$.
Essendo questo vero per ogni centro e per ogni raggio, allora
abbiamo finito.

— o — o —

QUALCHE ALTRA PATOLOGIA TOPOLOGICA

Fatto generale X sp. metrico separabile, $Y \subseteq X$ sottosistema
qualsunque. Allora Y è separabile.

Dim X separabile $\Rightarrow$ esiste base numerabile fatta da $B(x, r)$
al variare di x nel denso numerabile $D \subseteq X$ e di r in $\mathbb{Q}$.

Allora $Y \cap B(x, r)$, per gli stessi x ed r , sono una base
per la topologia di Y (quasi per def. di top. indotta).

A questo punto basta prendere un punto in ogni $Y \cap B(x, r)$.

In breve, il giro fatto è

X separabile $\Rightarrow$ X a base numerabile
 $\Rightarrow Y$ a base numerabile
 $\Rightarrow Y$ separabile

questo vale solo nei metrici

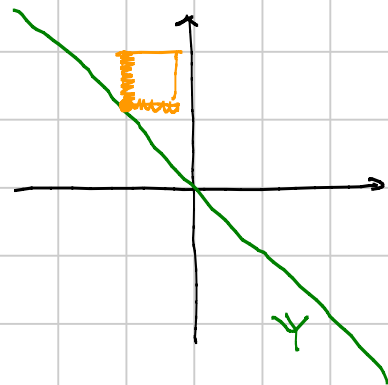
Controesempio in generale Prendiamo $\mathbb{R}$ con la topologia
generata dagli intervalli del tipo $[a, b)$

Chiamiamolo $\hat{X}$. Poniamo $X := \hat{X} \times \hat{X}$ con la topologia

chiuso aperto

prodotto.

Allora vale che



① $\hat{X}$ è separabile ($\mathbb{Q}$ è ancora denso)

② X è separabile ($\mathbb{Q}^2$ è denso)

③ $Y = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ è un sottoinsieme di X (forse pure chiuso) che eredita da X la topologia discreta in cui tutti i p.ti sono aperti, e quindi non è separabile.
(Occone osservare che i quadrati con lato basso e dx compreso sono aperti in X)

— o — o —