

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 60

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Esercizio Sia V lo spazio delle successioni $\{x_n\}$ di numeri reali tali che

$$\|x\|_V := \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| < +\infty$$

Si verifica abbastanza facilmente che $\|x\|_V$ è una norma in V che lo rende uno sp. di Banach (overkill: si tratta dello spazio L^1 rispetto ad una opportuna misura in $\mathbb{N}$)

Domanda: descrivere il duale di V .

Brutal mode: ci aspettiamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = f(x)$ e quindi

succ. $\{x_n\}$

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \cdot n |x_n|$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n|$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cdot \|x\|_V$$

Quindi il forte sospetto è che $\|f\|_{V'} = \sup \left\{ \frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

Detto meglio: consideriamo il solito duality pairing tra succ.

$$J(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Poniamo $V' = \left\{ \{a_n\} : \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n|}{n} < +\infty \right\}$

Allora il duality pairing definisce una mappa lineare, isometrica, iniettiva e surgettiva tra V e V'

$$[J(a)](x) := J(a, x) \quad \forall x \in V \quad \forall a \in V'$$

- Il conto di sopra mostra linearità, buona positura e $\|J(a)\|_{V'} \leq \|a\|_{V'}$
- Per la disug. opposta basta prendere $e_n = 0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione } n}}{1}, 0, \dots$ e osservare che

$$|a_n| = |[J(a)](e_n)| \leq \|J(a)\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V$$

da cui $\|J(a)\|_{V'} \geq \frac{|a_n|}{n}$ per ogni $n \geq 1$, da cui la tesi.

- Fatta l'isometria, resta solo la surgettività. Data $f \in V'$ occorre trovare a t.t. $[J(a)](x) = f(x)$ per ogni $x \in V$.
Possiamo

$$a_n := f(e_n) \quad \forall n \geq 1$$

Dimostriamo che $\frac{|a_n|}{n}$ è limitata. Infatti

$$|a_n| = |f(e_n)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|e_n\|_V = \|f\|_{V'} \cdot n$$

Dimostriamo che $[J(a)](x) = f(x)$ per ogni $x \in V$.

Questo è vero quando x è uno degli e_n , quindi anche quando $x \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, ma questo Span è denso in V .

Oss. Anche in questo caso potevamo usare l'overkill e dire che ovviamente $V = L^1(\mathbb{N}, \mu)$ e dedurre che

$$V' = L^\infty(\mathbb{N}, \mu)$$

Ora però se $a \in L^\infty(\mathbb{N}, \mu)$, allora

$$\|a\|_{L^\infty(\mathbb{N}, \mu)} := \sup \{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

SENZA DIVIDERE PER n .

Domanda: c'è contraddizione con il risultato precedente?

Risposta: ci sono sotto due duality pairing diversi

$$V = \{ \{x_n\} \text{ succ} : \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| < +\infty \}$$

$$W_1 = \{ \{a_n\} \text{ succ} : \sup_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n} < +\infty \}$$

$$W_2 = \{ \{a_n\} \text{ succ} : \sup_{n \geq 1} |a_n| < +\infty \}$$

Consideriamo $J_1(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

$$J_2(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n$$

Abbiamo visto prima che J_1 induce un isomorfismo $W_1 \rightarrow V'$.

D'altra parte J_2 induce un isomorfismo $W_2 \rightarrow V'$.

Facciamo la verifica

Step 1 Buona positura e disug. $\|J_2(a)\|_{V'} \leq \|a\|_{W_2}$

$$|[J_2(a)](x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |x_n| |a_n| \leq \|a\|_{W_2} \cdot \|x\|_V \quad \text{😊}$$

Step 2 Disug. opposta. Usando $x = e_n$ otteniamo

$$n |a_n| = |[J_2(a)](e_n)| \leq \|J_2(a)\|_{V'} \cdot \underbrace{\|e_n\|_V}_n$$

e quindi $|a_n| \leq \|J_2(a)\|_{V'}$. Facendo il sup in n abbiamo la tesi.

Step 3 Surgettività. Dato $f \in V'$ poniamo $a_n := f(e_n) \cdot \frac{1}{n}$

Occorre verificare che $a \in W_2$ e $J_2(a) = f$.

Intanto

$$|a_n| = \frac{1}{n} |f(e_n)| \leq \frac{1}{n} \|f\|_{V'} \cdot \underbrace{\|e_n\|_V}_n \leq \|f\|_{V'}$$

da cui $a \in W_2$

Ora $J_2(a)$ coincide con $f(e_n)$ per ogni n (la n nel duality pairing cancella la n al denominatore).

Quindi $J_2(a)$ ed f coincidono in $\text{span}\{e_n\}$, che è denso
— o — o —

Esercizio della lemma Hilbertiana

Sia H sp. di Hilbert con base ortonormale $\{e_n\}$.

Sia $\hat{H}$ il sottospazio definito da

$$\hat{H} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{peso}}}{n^2} v_n^2 < +\infty \right\}$$

Si verifica facilmente che $\hat{H}$ è uno spazio di Hilbert rispetto alla norma

$$\|v\|_{\hat{H}}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2.$$

Fatti generali:

- ① $\hat{H}$ è un s.sp di H , ed è pure denso (contiene tutte le comb. lin. finite degli e_n).
- ② Ogni elemento $f \in H'$ determina per restrizione un elemento di $\hat{H}'$. Quindi $H' \rightarrow \hat{H}'$ e lo fa pure in modo iniettivo (per densità) (occhie occorre dimostrare che la restrizione di f è continua in $\hat{H}$ rispetto alla norma di $\hat{H}$).
- ③ Per il teorema di Riesz, dovrebbe essere che $\hat{H}$ è isomorfo ad $\hat{H}$.

Mettendo insieme i 3 fatti si ottiene la classica lemma Hilbertiana

$$\hat{H} \xrightarrow{\textcircled{1}} H \xrightarrow{\textcircled{3}} H' \xrightarrow{\textcircled{2}} \hat{H}'$$

ma d'altra parte $\hat{H} \cong \hat{H}'$, e quindi c'è qualcosa che non va.

Spiegazione: le identificazioni tra un Hilbert ed il suo duale dipendono da un duality pairing.

Consideriamo gli spazi

$$H_0 := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty \}$$

$$H_1 := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 < +\infty \}$$

$$H_{-1} := \{ \{v_n\} \in \text{succ} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} v_n^2 < +\infty \}$$

È evidente che $H_1 \subseteq H_0 \subseteq H_{-1}$, con inclusioni strette. Si possono dimostrare i seguenti fatti

① H_0 è isomorfo ad H e H_1 è isomorfo a $\hat{H}$

② Il classico duality pairing $J(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ definisce

→ un isomorfismo tra H_0 e H_0' (sdito Riesz)

→ un isomorfismo tra H_{-1} e H_{-1}' (fare la verifica)

Queste due osservazioni spiegano le inclusioni di inizio pagina.

③ L'isomorfismo tra H_1 ed il suo duale alla Riesz non è quello indotto dal duality pairing J , ma quello indotto da

$$\hat{J}(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n y_n \quad \text{(verifica per esercizio)}$$