

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 59

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

Duali e funzionali allineati Esempi in $\mathbb{R}^2$ con norme p -esime.

Esercizio 1 Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.

Mostriamo che $V' = \mathbb{R}^2$ con norma ∞ .

Overkill: usare che $\mathbb{R}^2$ con norma 1 è uguale a $L^1(X, \mu)$ dove X è uno spazio con 2 p.ti e μ è la misura che conta i punti.

Con le mani $\|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$

Un elemento del duale è $f(x, y) = ax + by$ (geometria 1).

Ora

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} (|x| + |y|) \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} \|(x, y)\|_1 \end{aligned}$$

Facendo il sup del LHS tra tutti gli (x, y) di norma unitaria scopriamo che

$$\|f\|_{V'} \leq \max\{|a|, |b|\}$$

Per avere la disuguaglianza opposta osserviamo che

$$|a| = |f(1, 0)| \leq \|f\|_{V'} \|(1, 0)\|_1 = \|f\|_{V'}$$

$$|b| = |f(0, 1)| \leq \|f\|_{V'} \|(0, 1)\|_1 = \|f\|_{V'}$$

Da qui

$$\max\{|a|, |b|\} \leq \|f\|_{V'}$$

In conclusione

$$\|f\|_{V'} = \max\{|a|, |b|\} = \|(a, b)\|_\infty$$

Esercizio 2 Il duale di $\mathbb{R}^2$ con norma 4 è $\mathbb{R}^2$ con norma $\frac{4}{3}$
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

Con le mani, posto $f(x,y) = ax + by$,

$$|f(x,y)| = |ax + by| \leq \{x^4 + y^4\}^{1/4} \{ |a|^{4/3} + |b|^{4/3} \}^{3/4}$$

$\uparrow$ Hölder

il che ci dice che $\|f\|_{V'} \leq \|(a,b)\|_{4/3}$.

Per la disuguaglianza opposta scegliamo $x = |a|^{1/3} \text{sign}(a)$ e $y = |b|^{1/3} \text{sign}(b)$ e otteniamo

$$|a|^{4/3} + |b|^{4/3} = a |a|^{1/3} \text{sign}(a) + b |b|^{1/3} \text{sign}(b)$$

$$= f(x,y)$$

$$\leq \|f\|_{V'} \|(x,y)\|_4$$

$$= \|f\|_{V'} \{ |a|^{4/3} + |b|^{4/3} \}^{1/4}$$

Semplificando otteniamo $\|(a,b)\|_{4/3} \leq \|f\|_{V'}$, da cui l'uguaglianza.

Esercizio 3 $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.

Trovare tutti i funzionali allineati di $(0,1)$ e $(-2,1)$.

Caso di $(0,1)$ Stiamo cercando tutte le coppie (a,b) con
 $\max\{|a|, |b|\} \leq 1$ (norma in V' di $f(x,y) = ax + by$)
e $b = 1$ ($f(0,1) = 1$)

Quindi ci sono infinite soluzioni, cioè tutti i funzionali
 $f(x,y) = ax + y$ con $|a| \leq 1$

Caso di $(-2,1)$ Ancora una volta stiamo cercando

$f(x,y) = ax+by$ con $\|(a,b)\|_\infty \leq 1$ e

$f(-2,1) = \|(-2,1)\|_1 = 3$, cioè $-2a+b=3$.

Quindi serve

$$\begin{cases} \max\{|a|, |b|\} \leq 1 \\ -2a+b=3 \end{cases}$$

Si vede ad occhio che una soluzione è $a=-1$ e $b=1$.

D'altra parte è unica in quanto

$$3 = -2a+b \leq 2|a|+|b| \leq 2+1=3$$

↑
per avere uguale
serve $a < 0$ e $b > 0$

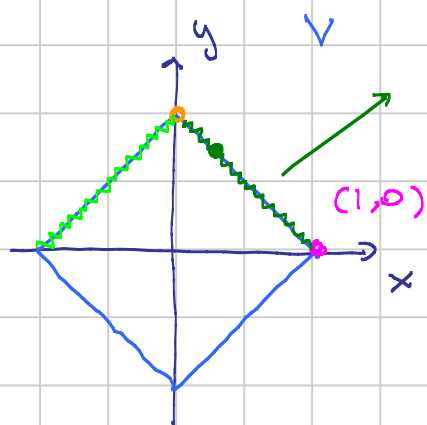
↑
per avere uguale serve
 $|a|=|b|=1$

Oss. Allo stesso modo si dimostra che, se $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, allora l'unico funzionale allineato è $ax+by$ con $a = \text{sign}(x_0)$ e $b = \text{sign}(y_0)$

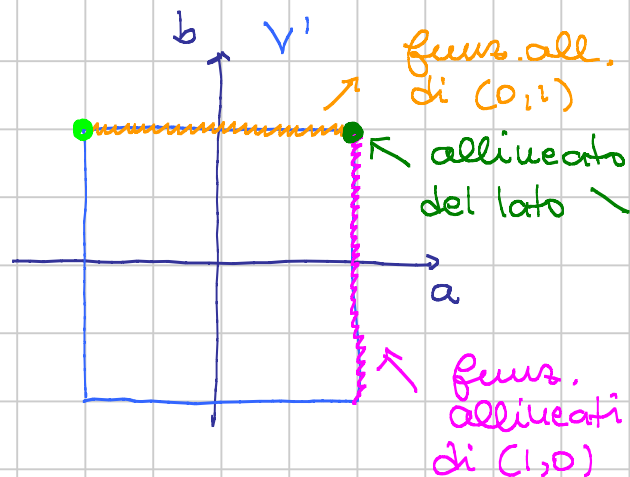
Se invece una componente tra x_0 e y_0 è nulla, allora il corrispondente coeff. può variare a piacere tra -1 e 1 , mentre l'altro è uguale al segno della variabile non nulla. Quindi ci sono ancora ∞ funzionali allineati.

Esercizio 4 Il funzionale allineato definisce una mappa (eventualmente multivoca) tra la sfera unitaria di V e la sfera unitaria di V' .

Descriviamo tale mappa nel caso di $V = \mathbb{R}^2$ con norma 1.



tutti questi hanno
lo stesso funz.
allineato
 $f(x,y) = x+y$



Esercizio 5 Sia V uno spazio normato, e sia $v_0 \in V$.

Se $f_1 \in V'$ e $f_2 \in V'$ sono funzionali allineati di v_0 , allora tutte le loro comb. convesse lo sono

[Dim] Ipotesi: f_1 ed f_2 funz. all. di v_0 , quindi
 $\|f_1\|_{V'} \leq 1, \|f_2\|_{V'} \leq 1, f_1(v_0) = f_2(v_0) = 1$
se $v_0 \neq 0$, allora sono proprio 1

Terzi: $\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$ è funz. allineato di $v_0 \forall \lambda \in [0,1]$

Basta osservare che $\lambda f_1(v_0) + (1-\lambda)f_2(v_0) = 1$ e
 $\|\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2\|_{V'} \leq 1$

Piccolo commento sulla seconda

$$\begin{aligned} |\lambda f_1(v) + (1-\lambda)f_2(v)| &\leq \lambda |f_1(v)| + (1-\lambda) |f_2(v)| \\ &\leq \lambda \|v\|_V + (1-\lambda) \|v\|_V = \|v\|_V \end{aligned}$$

Facendo il sup al variare di v con $\|v\|_V \leq 1$ segue la tesi.

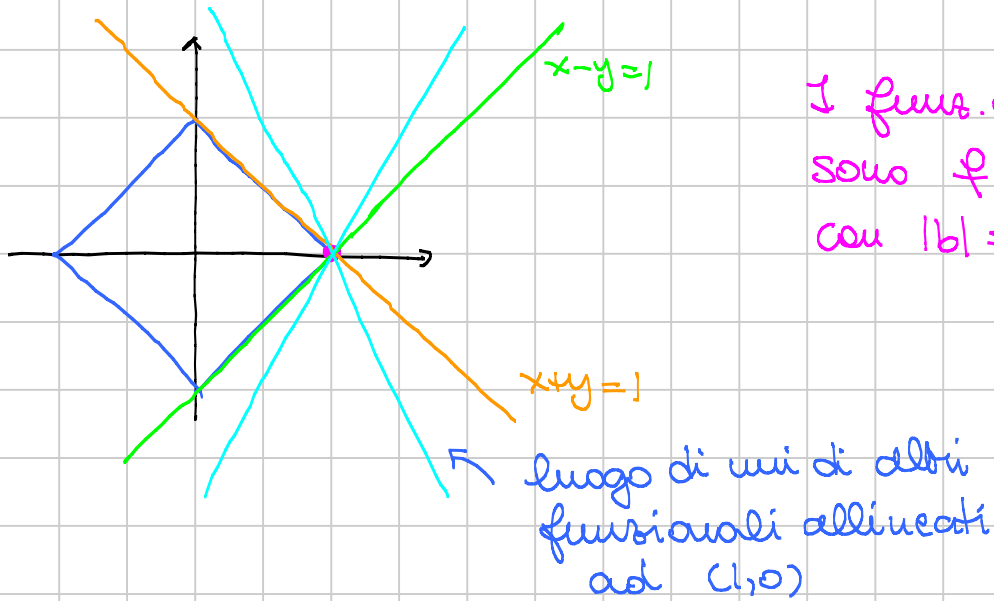
Esercizio 5 bis Se $f \in V'$ è funz. allineato per $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$, allora f è funzionale allineato di $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2$ per ogni $\lambda \in [0,1]$.

Oss. Per avere la non unicità del funzionale allineato occorre che la sfera unitaria in V' contenga dei segmenti non banali (con estremi diversi)
Se V' è strett. convesso, questo non può accadere.

Oss. Sia $v_0 \in V$ con $\|v_0\|_V = 1$. Sia $f \in V'$ un funzionale allineato di V . Allora l'iperpiano $\{v \in V : f(v) = 1\}$ è tangente alla palla unitaria di V , cioè
→ interseca la palla in v_0 (almeno)
→ lascia la palla tutta dalla stessa parte $\{v \in V : f(v) \leq 1\}$

Quindi se c'è + di un funzionale allineato a u_0 , allora c'è più di un iperpiano tangente in u_0 , e quindi la sfera unitaria non è "smooth" in u_0 .

Nel caso di $\mathbb{R}^2$ con norma 1:



I funz. allineati di $(1,0)$
sono $f(x,y) = x + by$
con $|b| \leq 1$

SLOGAN Se il funzionale allineato a $u_0 \neq 0$ NON è unico, allora

- la palla $\{v \in V : \|v\|_V \leq 1\}$ ha "un angolo" in u_0
- la sfera $\{f \in V' : \|f\|_{V'} = 1\}$ contiene un segmento con estremi distinti.