

Istituzioni di Analisi Matematica 2020/21 -- Lezione 58

Queste lezioni vanno seguite solo DOPO aver seguito le corrispondenti lezioni di un corso classico, ad esempio quello 2019/20

Note Title

06/10/2020

RETROPENSIERO. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'' = \lambda u \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Da quanto visto fino ad ora il problema si risolve solo se $\lambda = -n^2$. Ma siamo sicuri?

Chi mi impedisca di prendere $\lambda = 22$ e applicare il metodo diretto? Proviamoci...

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} u'^2 + 11 u^2 \right) dx : u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

La Lagrangiana è tranquilla, convessa, con ottime stime dal basso. Quindi il minimo esiste, MA è banalmente $u(x) \equiv 0$.

Questo da solo elimina i λ positivi. Restano i negativi. Prendiamo $\lambda = -22$.

$$\min \left\{ \int_a^b \left(\frac{1}{2} u'^2 - 11 u^2 \right) dx : u(a) = u(b) = 0 \right\}$$

Grosso guaio: abbiamo esponente 2 sia sulla derivata, sia sulla funzione. A quel p.to entrano in gioco i coefficienti e la costante di POINCARÉ.

Dato (a,b) esiste C_P , dipendente solo da $b-a$, tale che

$$\int_a^b u(x)^2 dx \leq C_P \int_a^b u'(x)^2 dx \quad \forall u \in H_0^1((a,b))$$

$\uparrow$
nulla al bordo

Da questo

$$\int_a^b \left(\frac{1}{2} u'^2 - \lambda u^2 \right) dx \geq \left(\frac{1}{2C_P} - \lambda \right) \int_a^b u(x)^2 dx$$

- Se λ è piccolo (coeff. > 0), allora $u(x) \equiv 0$ è l'unico p.to di min.
- Se λ è grande (coeff. < 0), allora basta prendere $u_m(x) := m u_0(x)$ dove $u_0(x) \neq 0$ realizza l'uguaglianza in Poincaré e si vede che $F(u_m) \rightarrow -\infty$, quindi addio metodo diretto.
- Se $\lambda = (2C_p)^{-1}$, allora il min. è 0, ed i p.ti di min. sono tutte le funzioni che realizzano l'uguaglianza in Poincaré.

Oss. La costante C_p è proprio il primo autovalore dell'iperbolica della derivata seconda con DBC.

Domanda: caratterizzare allo stesso modo il primo autovalore con NBC.

Esercizio (Operatore NON LINEARE)

Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} u'' = u^3 + f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che per ogni $f \in L^2((0,1))$ esiste unica $u \in H^2((0,1))$ che risolve il problema.

Dimostrare che l'operatore non lineare

$$\begin{aligned} A: L^2((0,1)) &\rightarrow L^2((0,1)) \\ f &\rightarrow u \quad (\text{unica soluz.}) \end{aligned}$$

è compatto.

Dei 3 approcci sembra salvarsi solo quello variazionale.

Si tratta di risolvere

$$\min \left\{ \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{4} u^4 + f(x)u \right) dx : u \in H_0^1((0,1)) \right\}$$

$\uparrow$ DBC

Con il metodo diretto si dimostra esistenza e unicità della soluzione.

C'è però una peccatura in fase di compattezza, perché non possiamo dire che esiste $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$L(x, s, p) \geq \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{8} s^4 - A \quad \forall (x, s, p) \text{ ammissibili}$$

(Questo perché $f(x)$ potrebbe essere illimitata).

Come uscire? Ad esempio usando Hölder

$$\left| \int_0^1 f(x) u(x) dx \right| \leq \left\{ \int_0^1 f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 u(x)^2 dx \right\}^{1/2}$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 + f(x) u \right) dx &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}(x)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{4} u(x)^4 dx \\ &\quad - \left\{ \int_0^1 f(x)^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^1 u(x)^2 dx \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Ora possiamo stimare la norma L^2 con la norma L^4 ed ottenere

$$\int_0^1 u(x)^2 \cdot \frac{1}{2} dx \leq \left\{ \int_0^1 1^2 dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^1 u(x)^4 dx \right\}^{1/2}$$

da cui mettendo insieme

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4 - \|f\|_{L^2} \left\{ \int_0^1 u^4 \right\}^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{8} \int_0^1 u^4 - A \end{aligned}$$

↑
ho usato che $\frac{1}{4} x - \text{cost} \cdot x^{1/4} \geq \frac{1}{8} x - A \quad \forall x \geq 0$

A questo p.to

$$F(u_n) \leq M \Rightarrow \|u_n\|_{L^2} \leq M^1, \quad \|u_n\|_{L^4} \leq M^1$$

Alternativa: usare la sdita $|AB| \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ e dedurre che

$$\begin{aligned} F(u) &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 - |f(x)u| \\ &\geq \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} f^2 - \frac{1}{2} u^2 \\ &\geq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{8} u^4 \right) dx - A \leftarrow \begin{array}{l} \text{limitata se } \|f\|_{L^2} \text{ è} \\ \text{limitata} \end{array} \\ &\quad \uparrow \\ &\text{ho usato che } \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \geq \frac{1}{8} x^4 - B \end{aligned}$$

e da qui si conclude come sopra.

Fatto questo, abbiamo la buona positura, cioè per ogni $f \in L^2$ esiste $u \in H^2$ unica che risolve, quindi posso definire l'operatore.

Si tratta di un operatore compatto? Sia $\{f_n\} \subseteq L^2((0,1))$ limitata. Vogliamo dimostrare che $\{u_n\} \subseteq L^2((0,1))$ è rel. cpt.

Slogan: se migliora, sarà quasi certamente compatto!

Seguendo con cura i ragionamenti di sopra, scopriamo che se $\{f_n\}$ è limitata, allora $\{u_n\}$ è limitata in $L^2((0,1))$. Perché? Intanto osserviamo che $F(u_n) \leq 0$ perché $u \equiv 0$ è sempre un competitore.

Seguendo i ragionamenti di sopra troviamo

$$0 \geq F(u_n) \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{2} u_n^2 + \frac{1}{8} u_n^4 \right) dx - \frac{1}{2} \|f_n\|^2 - B$$

$$\text{da cui } \|u_n\|^2 \leq \underbrace{\|f_n\|^2 + 2B}_{\text{limitato se } f_n \text{ è limitata in } L^2}.$$

Ma allora $\{u_n\}$ verifica le ipotesi di AA (equiv $\frac{1}{2}$ -Hölder e equiuniformità grazie alle DBC o al teorema della media integrale). Quindi esiste $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ unif., e a maggior ragione in L^2 .

Prima variante: possiamo considerare $A: L^2((0,1)) \rightarrow H^1((0,1))$.
È ancora compatto?

Slogan: se migliora lo sarà, e H^2 è meglio di H^1 .

Prendiamo $\{f_n\}$ e $\{u_n\}$ come prima, e questa volta ci serve $u_{n_k} \rightarrow u_\infty$ in H^1 , quindi anche $\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$ in L^2 .

Delle $\dot{u}_n$ sappiamo che sono equiuniformità in L^2 , ma non basta per convergenza forti. D'altra parte,

$$\dot{u}_n = \underbrace{u_n^3}_{\substack{\uparrow \\ \text{limitato} \\ \text{in } L^\infty}} + \underbrace{f_n(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{limitato in } L^2}}$$

quindi $\{\dot{u}_n\}$ sono equiuniformità in L^2 , ma allora $\{\dot{u}_n\}$ sono equi $\frac{1}{2}$ -Hölder + equi L^2 (e quindi equi L^∞ per teo media integrale, o per Rolle a scelta) e quindi ancora una volta, a meno di ulteriori s.succ., $\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$ adol. ritorna uniformemente.

Conclusione: l'operatore è compatto e c'è pure margine!!

Seconda variante: visto come $A: L^2 \rightarrow H^2$ è ancora cpt?

Slogan: ora non migliora più tanto!

Cerchiamo di costruire un controesempio. Sia $\{f_n\} \subseteq L^2((0,1))$ una suce. limitata che non ammette s.succ. che convergono fortemente (basta prendere una base ortonormale o delle funzioni con supporti a due a due disgiunti).

Supponiamo che $\{u_n\}$ ammetta s.succ. che converge in H^2 , cioè

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \quad \dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty \quad \ddot{u}_{n_k} \rightarrow \ddot{u}_\infty$$

(tutte convergenze forti in L^2).

Dai punti precedenti sappiamo che la prima e la seconda sono in realtà anche uniformi (senza nemmeno passare a s.succ.: perché?) e quindi anche

$$u_{n_k}^3 \rightarrow u_\infty^3 \quad \text{unif. e in } L^2(0,1)$$

Ma allora

$$f_{n_k}(x) = \ddot{u}_{n_k} - u_{n_k}^3 \xrightarrow[L^2]{} \ddot{u}_\infty - u_\infty^3$$

il che avevamo assunto essere impossibile. 😊

Oss. Gli stessi argomenti mostrano che $A: L^2 \rightarrow L^2$ e

$$A: L^2 \rightarrow H^1$$

sono operatori continui, cioè $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow u_n \rightarrow u_\infty$.

Domanda: L'operatore $A: L^2 \rightarrow H^2$ è continuo?

Esercizio: divertirsi a porsi domande con altre scelte di partenza ed arrivo.

— o — o —